

307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

V. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 1-2. FÜZET

1960

★

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ V., СЕРИЯ А, 1-2.

1960

★

PUBLICATIONS

OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME V. SERIES A, FASC. 1-2.

1960



1960

2

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

SZEKERES, G.: On the propagation of gravitational waves.....	3
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On the evolution of random graphs.....	17
HARARY, F.: Unsolved problems in the enumeration of graphs.....	63
ALFÁR, L.: Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, III	97
VERMES, P.: Transformations of periodic sequences	153
ERDŐS, P.: On sets of distances of n points in Euclidean space	165
ЗАК, Л. А.—МИЛЬЧЕНКО, Т. И.—СМИРЯГИН, В. П.: Краткое описание машины „БЭСМ“-II. (Основные параметры)	171
BIHARI, I.—FREY, T.—PETHŐ, Á.: Über ein Problem der Gasdynamik (Charakteristische Randwertaufgabe mit unstetigkeiten in den Randwerten)	179
PETHŐ, Á.: Eine Matrixmethode zur Lösung von Anfangswertaufgaben linearer Differenzengleichungen	203
ACZÉL, J.—GHERMANESCU, M.—HOSSZÚ, M.: On cyclic equations	215
ADLER, G.: Sur un état pseudo-stationnaire intervenant dans la théorie du mélange	223
BALATONI, F.: Über die Charakterisierbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe der Variationsrechnung	229
List of lectures held in the seminar of the institute in 1959	234
List of recent papers and books written by members of the institute published or in print elsewhere	235

Труды Математического Института Венгерской Академии Наук начиная с тома V будут выходить в двух сериях: в выпусках серии А будут публиковаться статьи на иностранных языках, а в серии В — на венгерском языке. Выпуски 1, 2 и 3 каждого тома принадлежат серии А, а выпуск 4 — серии В. Как подписчикам, так и учреждениям, меняющим журнал на другие издания, будут высылаться выпуски обоих серий.

Beginning with volume V, the Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences is divided into two Series, of which Series A is published in foreign languages, Series B in Hungarian. Of each volume fasciculi 1, 2 and 3 belong to Series A and fasciculus 4 to Series B. All subscribers and all exchange partners will receive both Series in future.

HÁJEK, J.: Limiting distributions in simple random sampling from a finite population (Предельные распределения при простой случайной выборке из конечной совокупности)	361
HARARY, F.: Unsolved problems in the enumeration of graphs (Нерешенные проблемы о перечислении графов)	63
KONCZ, K.: Über gewisse Elementenfolgen des Hilbertschen Raumes (О некоторых последовательностях элементов Гильбертова пространства)	255
MARTOS B.: Hiperbolikus programozás — (Hyperbolic programming)..... (Гиперболическое программирование)	383
PALÁSTI, I.: On some random space filling problems..... (Проблемы относительно случайного заполнения пространства)	353
PETHŐ, Á.: Eine Matrixmethode zur Lösung von Anfangswertaufgaben linearer Differenzgleichungen (Применение матричного исчисления к решению задачи Коши для линейных уравнений в конечных разностях)	203
REIMANN, J.—VINCZE, I.: On the comparison of two samples with slightly different sizes (Теоремы о распределении и предельном распределении, связанные с двумя выборками с незначительно различным числом элементов)	293
RÉNYI, A.: Bemerkung zur Arbeit „Über gewisse Elementenfolgen des Hilbertschen Raumes“ von K. Koncz..... (Замечание к работе «О некоторых последовательностях элементов Гильбертова пространства» от К. Концз)	265
RÉNYI A.—ZIERMANN M.: Üzletek áruellátásával kapcsolatos szélsőértékfeladatok (On some inventory problems of shops) (О проблемах, связанных со снабжением магазинов товарами)	495
RÉVÉSZ, P.: Some remarks on the random ergodic theorem I..... (Одна вероятностная эргодическая теорема I.)	375
SARKADI, K.: On testing for normality (О проверке гипотезы нормальности)	269
SZÁSZ, F.: Ringe, deren echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind... (Кольца A , каждое истинное подкольцо которых является кольцом вида aA ($a \in A$))	287
SZEKERES, G.: On the propagation of gravitational waves (О распространении гравитационных волн)	3
SZEKERES, G.: On a theorem of Paul Lévy..... (Об одной теореме Paul Lévy)	277
TANKÓ J.: A stationárius folyamatok egy textiliparban használatos jellemzője... (A characteristic of stationary processes used in textile research) (Одна из характеристик стационарных процессов, употребляемая в текстильной промышленности)	407
VERMES, P.: Transformations of periodic sequences..... (О преобразованиях периодических последовательностей)	153
ZAJTA A.: A Lehmann próbáról (On the Lehmann test) — (О пробе Lehmann-a)	447
ЗАК, Л. А. — Мильченко, Т. И. — Смирягин, В. П.: Краткое описание машины БЭСМ—II (Основные параметры) (A short description of the most important parameters of the computer BESM-II)	171
List of lectures held in the seminar of the institute in 1959..... (Список докладов читанных на семинаре института в течение 1959 года)	234
List of recent papers and books written by members of the institute published or in print elsewhere..... (Список новых работ членов института, опубликованных в других местах)	235
A Matematikai Kutató Intézet Osztályszemináriumaiiban 1959-ben elhangzott előadások kivonatai..... (Abstracts of lectures delivered in the seminars of the Institute) (Резюме докладов произнесенных на семинарах отделений Института)	507
Az Intézet munkatársainak a korábbi dolgozatjegyzékekben még fel nem tüntetett, másutt megjelent vagy sajtó alatt levő magyar nyelvű dolgozatainak jegyzéke (List of papers in Hungarian of the members of the Institute published or in print in another periodical and not yet marked in the previous lists of papers) (Список работ сотрудников Института на венгерском языке опубликованных в других изданиях или находящихся в печати и еще не отмеченных предыдущих списках литературы).	517

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

ACZÉL, J.—GHERMANESCU, M.—HOSSZÚ, M.: On cyclic equations.....	215
(О циклических уравнениях)	
ADLER, G.: Sur un état pseudo-stationnaire intervenant dans la théorie du mélange	223
(О псевдостационарном состоянии, встречающемся в теории смешивания)	
ALPÁR, L.: Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, III.	97
(Замечание о суммируемости ряда Тейлора на окружности сходимости, III)	
BALATONI, F.: Über die Charakterisierbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe der Variationsrechnung	229
(О возможности характеристики дифференциальных уравнений в частных производных с помощью вариационного исчисления)	
BÁNKÖVI, G.: Evaluation of integrals by Monte Carlo methods based on the one dimensional random space filling	339
(Расчет интегралов методом Монте-Карло, основанным на одномерном случайном заполнении пространства)	
BIHARI, I.—FREY, T.—PETNŐ, A.: Über ein Problem der Gasdynamik (Charakteristische Randwertaufgabe mit unstetigkeiten in den Randwerten)	179
(Об одной проблеме газовой динамики [характеристическая граничная задача с разрывными граничными значениями])	
CSÁKI, P.—FISCHER, J.: On bivariate stochastic connection.....	311
(О стохастических связях с двумя переменными)	
CSÁKI, P.—FISCHER, J.: Contributions to the problem of maximal correlation... ..	325
(Замечание о проблеме максимальной корреляции)	
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On the evolution of random graphs.....	17
(О разветвление случайных графов)	
ERDŐS, P.: On sets of distances of n points in Euclidean space.....	165
(О расстояниях между n точками Евклидова пространства)	
FÉNYES, T.: A modern operátorszámítás alkalmazása egyszerű átvivőrendszerek válasz-analíziseben	461
(Die Anwendung der modernen Operatorenrechnung bei der Antwort-Analyse einfacher Übertragungssysteme)	
(Приложения современного операционного исчисления к ответному анализу простых переносных систем)	
FÉNYES T.—NÁDAS T.: Törpetranszformátorok lemezmaglapjainak általános geometriai gazdaságossági problémái	473
(Untersuchung der allgemeinen geometrischen Wirtschaftlichkeit der Kernbleche von Kleintransformatoren)	
(Общие проблемы о геометрической экономичности пластиночных ядерных листов карликовых трансформаторов)	
ГОЛЕНКО, Д. И. — СМІРЯГІН, В. П.: Датчик случайных чисел равномерно распределенных в интервале (0,1)	241
(A source of random numbers which are equidistributed in [0,1])	
GRÄTZER, G.—SCHMIDT, E. T.: Über einfache Körpererweiterungen.....	283
(О простых расширениях тел)	

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEИ az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEИnek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50.— Ft, külföldi címre 70.— Ft. (Kötetenként 5 \$.) *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. *Külföldi* megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15.— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: АЛФРÉД РЕ́НЬИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: КАТАЛИН БОГНА́Р, ПА́Л РЕ́ВЭШ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, БУДАПЕСТ V., РЕАЛТАНОДА U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюме на языках отличающихся от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, (Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50.— Ft to an address in Hungary and 70.— Ft (\$ 5.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

V. ÉVFOLYAM

1960

★

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ V.

1960

★

PUBLICATIONS

OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME V.

1960



1960

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

V. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 1–2. FÜZET

1960

★

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ V., СЕРИЯ А, 1–2.

1960

★

PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME V. SERIES A, FASC. 1–2.

1960



1960

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaírv terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatoloznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 \$.) Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadón keresztül adhatók fel (Budapest, V. Alkotmány u. 21., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 15.915.111—46), külföldi megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, P.O.B. 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest, V. Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: АЛФРÉД РЕ́НИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: КАТАЛИН БОГНА́Р, ПА́Л РЕ́ВЭШ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюме на языках отличающихся от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Местные заказы принимает Издательство Академии Наук (Budapest, V. Alkotmány u. 21., счёт Венгерского Национального Банка 15.915.111—46), заграничные заказы принимает Культура (Budapest, 62, P.O.B. 149). По поводу отношения обмена просят обращаться к Библиотеке Института (Budapest, V. Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages, series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 5.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Académie Publishing House in Hungary (Budapest, V. Alkotmány u. 21., single account number in the Hungarian National Bank 15.915.111—46) resp. at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, P.O.B. 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest, V. Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

ON THE PROPAGATION OF GRAVITATIONAL WAVES

by
G. SZEKERES¹

*Dedicated to Professor K. Novobátzky,
for his 75th birthday.*

§ 1. Introduction

The study of gravitational waves in general relativity suffers from an inherent difficulty which arises from the principle of equivalence and the corresponding lack of definitiveness of coordinate systems. If other aspects of the surrounding Universe are disregarded, it is quite possible to produce gravitational waves (even under perfectly flat conditions) by introducing suitable spacetime coordinates, and the objectivity of wave phenomena depends partly on the objectivity with which one can select a reliable coordinate system. The difficulty affects both the dynamical and kinematical aspects of wave propagation. Since field energy can only be calculated from the well known pseudotensor, it is impossible to make precise statements concerning the amount of energy transferred by gravitational radiation unless the coordinate system is specified; and the same is true for statements on the propagation of gravitational signals.

For the case of weak fields, EINSTEIN himself proposed a solution in the early days of relativity. EINSTEIN showed that if there exists a coordinate system in which deviations from the Minkowskian values are everywhere small then one can select by means of suitable auxiliary conditions a class of reasonably good almost Minkowskian coordinate systems in which gravitational signals propagate with the velocity of light. The idea of auxiliary conditions has been exploited with great success in recent times, particularly by V. FOCK and his school. FOCK calls a coordinate system *harmonic*² if it satisfies

$$(1) \quad \sum_{\mu=0}^3 \frac{\delta}{\delta x_{\mu}} ((-g)^{1/2} g^{\mu\nu}) = 0, \quad g = \det g_{\mu\nu}, \quad (\nu = 0, 1, 2, 3);$$

it is usually possible to satisfy these conditions, and the coordinate system so obtained has some rather attractive properties, particularly where wave propagation is concerned. One of these properties is that under ordinary circumstances and suitable boundary conditions at infinity, harmonic coordinates are uniquely determined, apart from the arbitrariness of a Lorentz transformation. Hence the suggestion, put forward by FOCK, that harmonic

¹ University of Adelaide, South Australia.

² For a concise account see V. Fock, *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957), 325—333.

coordinates should have the same status in general relativity theory as inertial frames have in special relativity.

It is not altogether easy to assess the correct significance and position of the harmonic condition (1) within the framework of general relativity. Superficially, it resembles the famous Lorentz condition on the vector potential in electrodynamics which is essentially a mathematical device to obtain solutions of the field equations in a convenient form. But whereas the Lorentz condition has no influence on the (physically observable) electromagnetic field forces, the harmonic condition is to characterize a class of "natural" frames of reference in which for instance gravitational energy changes can conveniently be represented. But when a physicist chooses a space-time coordinate system to describe gravitational effects (e. g. in the solar system), he will mainly be guided by visual considerations such as observations of the position of distant stars or measurements of DOPPLER shift in the radiation from these distant sources. Now there is no a priori reason why this "visual" frame should satisfy the harmonic condition, and in the present paper we shall discuss a situation where the two coordinate systems (namely the visual and the harmonic) are definitely not identical.

In this connection it is interesting to note that the Schwarzschild frame, which is most commonly used to describe the centrosymmetrical static field because of its formal simplicity, does not satisfy the harmonic condition. Of course the centrosymmetric harmonic frame with the line element

$$\left(1 - \frac{\mu}{r}\right) \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^{-1} \left(dt^2 - \frac{\mu^2}{r^2} dr^2\right) - \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^2 \sum_{k=1}^3 dx_k^2$$

is physically just as acceptable and leads to the same observational effects as the Schwarzschild line element

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 - \frac{2\mu}{r - 2\mu} dr^2 - \sum_{k=1}^3 dx_k^2.$$

But beyond this assertion the harmonic system does not offer any particular advantages.

This example shows at any rate that under suitable circumstances symmetry conditions can be quite an effective substitute for auxiliary conditions. The intrinsic strength of symmetry conditions is that if they are applicable to all, they are comparatively immune to objections; if a configuration admits certain geometrical symmetries, it seems to be sound philosophy to use a coordinate system which exhibits these symmetries.

In the present note we shall use this principle to examine the existence and propagation of pure gravitational waves, in the special case of a rotating ellipsoidal body. The inherent symmetries of this model enable us to guess the general form of an adequate line element with reasonable certainty, and it will be possible to obtain a reliable picture of the generated waves without imposing the harmonic condition. As expected, we shall find spherical (or almost spherical) gravitational potential waves spreading out with the velocity of light, but the form of the waves and in particular the law of decrease of their amplitude, will depend quite essentially on whether the visual or the harmonic frame is used.

§ 2. The rotating ellipsoid

We consider an ellipsoidal body of gravitational radius μ and principal semi-axes $a(1 + \varepsilon_1)$, $a(1 + \varepsilon_2)$, $a(1 + \varepsilon_3)$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$,

$$(2) \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,$$

which rotates with constant angular velocity ω about the axis of $a(1 + \varepsilon_3)$. The velocity of light at infinity is taken to be 1. In order to avoid the complexities of an exact solution, we assume that the eccentricities ε_p are small and neglect all quantities in which ε_p^2 or $\omega^2 \mu^2 \varepsilon_p$ appears. These approximations are quite adequate for the purpose of finding out the essential characteristics of the generated waves. Occasionally we shall refer to "small" values of r ; by this we mean that ωr is small. Otherwise no restriction will be placed on the angular velocity itself.

With the above mentioned approximation the Newtonian potential outside the body at rest is

$$(3) \quad V = \mu/r + \frac{3}{2} M r^{-3} \sum_{p=1}^3 \varepsilon_p H_p^2.$$

$$H_p = \sum_{k=1}^3 A_{pk} \xi_k, \quad \xi_k = x_k/r,$$

where M is the moment of inertia of the ellipsoid about its axis of rotation and

$$\mathbf{A}_p = (A_{p1}, A_{p2}, A_{p3}), \quad p = 1, 2, 3$$

are mutually perpendicular unit vectors in the directions of the (body-fixed) principal axes. Suffices such as m, n, p will always appear in the lower position and run from 1 to 3; the time suffix 0 will usually be written out separately. The summation convention will only be used in conjunction with ε_p (or ε_p^* defined below) and then in a rather unconventional manner: the index is required to appear three times in the term. Thus $\varepsilon_p H_p A_{pm}$ denotes $\sum_{p=1}^3 \varepsilon_p H_p A_{pm}$

and $\varepsilon_p H_p^2$ denotes $\sum_{p=1}^3 \varepsilon_p H_p H_p$. On the other hand $\varepsilon_m H_m$, $\varepsilon_m^* \xi_m$ are not to be summed for m . Note that

$$(4) \quad \sum_{m=1}^3 \varepsilon_p A_{pm} A_{pm} = \sum_{p=1}^3 \varepsilon_p = 0$$

because of the orthogonality of the \mathbf{A}_p and the normalization (2).

If the x_3 -axis is placed in the direction of the (space and body-fixed) rotation axis and the time origin is suitably chosen we can set

$$(5) \quad \mathbf{A}_1 = (\cos \omega t, \sin \omega t, 0), \quad \mathbf{A}_2 = (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0),$$

$$\mathbf{A}_3 = (0, 0, 1)$$

hence

$$H_1^2 = \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{1}{2} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \cos 2\omega t + \xi_1 \xi_2 \sin 2\omega t$$

$$H_2^2 = \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) - \frac{1}{2} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \cos 2\omega t - \xi_1 \xi_2 \sin 2\omega t$$

$$H_3^2 = \xi_3^2,$$

and

$$(6) \quad \varepsilon_p H_p^2 = \varepsilon_p^* \xi_p^2 + \varepsilon \cos^2 \Theta \cos 2(\varphi - \omega t)$$

where

$$(7) \quad \varepsilon_1^* = \varepsilon_2^* = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad \varepsilon_3^* = \varepsilon_3, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

and

$$(8) \quad \xi_1 = \cos \varphi \cos \Theta, \quad \xi_2 = \sin \varphi \cos \Theta, \quad \xi_3 = \sin \Theta.$$

Note furthermore that

$$(9a) \quad \varepsilon_p H_p^2 = \varepsilon_p^* \xi_p^2 - \frac{1}{4\omega^2} \varepsilon_p (H_p^2)^{\cdots}$$

$$(9b) \quad \varepsilon_p H_p A_{pm} = \varepsilon_m^* \xi_m - \frac{1}{4\omega^2} \varepsilon_p (H_p A_{pm})^{\cdots}$$

$$(9c) \quad \varepsilon_p A_{pm} A_{pn} = \frac{1}{2} (\varepsilon_m^* + \varepsilon_n^*) \delta_{mn} - \frac{1}{4\omega^2} \varepsilon_p (A_{pm} A_{pn})^{\cdots}$$

where $(\cdot) = \partial/\partial t$. Hence

$$(10a) \quad \varepsilon_p (H_p^2)^{\cdots} = -4\omega^2 \varepsilon_p (H_p^2)^{\cdot}$$

and similar expressions for $\varepsilon_p (H_p A_{pm})^{\cdots}$, $\varepsilon_p (A_{pm} A_{pn})^{\cdots}$.

To obtain the most general form of a coordinate system with symmetries appropriate to the problem, we employ the following device: We set tentatively

$$g_{00} = 1 - 2V, \quad g_{0n} = 0, \quad g_{mn} = -\delta_{mn}$$

where V is given by (3), and calculate the RICCI tensor. In order to be able to satisfy EINSTEIN's equations, we must clearly allow the metric tensor to contain all types of terms which appear in the RICCI tensor. This consideration finally leads to the following assumption:

$$(11a) \quad g_{00} = 1 - 2\mu r^{-1} - 3Mr^{-3} \varepsilon_p^* \xi_p^* - \omega^2 V_1 \varepsilon_p (H_p^2)^{\cdot} - \omega V_2 \varepsilon_p (H_p^2)^{\cdots},$$

$$(11b) \quad g_{0n} = \omega^2 B_1 \varepsilon_p (H_p A_{pn})^{\cdot} + \omega B_2 \varepsilon_p (H_p A_{pn})^{\cdots} + \omega^2 C_1 \varepsilon_p (H_p^2)^{\cdot} \xi_n + \\ + \omega C_2 \varepsilon_p (H_p^2)^{\cdots} \xi_n,$$

$$\begin{aligned}
(11c) \quad -g_{mn} = & \delta_{mn} + 2\mu r^{-1} \xi_m \xi_n + D_0 r^{-3} \varepsilon_p^* \xi_p^2 \delta_{mn} + E_0 r^{-3} \varepsilon_p^* \xi_p^2 \xi_m \xi_n + \\
& + F_0 r^{-3} (\varepsilon_m^* + \varepsilon_n^*) \xi_m \xi_n + G_0 r^{-3} (\varepsilon_m^* + \varepsilon_n^*) \delta_{mn} + \\
& + \omega^2 D_1 \varepsilon_p (H_p^2)^* \delta_{mn} + \omega D_2 \varepsilon_p (H_p^2)^{**} \delta_{mn} + \\
& + \omega^2 E_1 \varepsilon_p (H_p^2)^* \xi_m \xi_n + \omega E_2 \varepsilon_p (H_p^2)^{**} \xi_m \xi_n + \\
& + \omega^2 F_1 \varepsilon_p [(H_p A_{pm})^* \xi_n + (H_p A_{pn})^* \xi_m] + \\
& + \omega F_2 \varepsilon_p [(H_p A_{pm})^{**} \xi_n + (H_p A_{pn})^{**} \xi_m] + \\
& + \omega^2 G_1 \varepsilon_p (A_{pm} A_{pn})^* + \omega G_2 \varepsilon_p (A_{pm} A_{pn})^{**},
\end{aligned}$$

where D_0, \dots, G_0 are constants and B_1, B_2, \dots, V_2 are functions of ωr . Hence $\partial B_1 / \partial r = \omega B_1'$ etc.

Strictly speaking one ought to add a term of the form $2Mr^{-2}\Omega_m$ to the expression for g_{0n} where $\Omega_1 = -\varepsilon_2 \omega$, $\Omega_2 = \varepsilon_1 \omega$, $\Omega_3 = 0$ to take into account the motion of the rotating matter relatively to the coordinate frame³ but it can be omitted as it has no relevance to our problem. We may imagine the field created by pulsation rather than actual rotation in which case the term does not appear at all. Also terms containing $(\mu/r)^2$ have been omitted as they have no effect on further calculations.

The amount of arbitrariness of the coordinate system is expressed by the transformation

$$(12a) \quad t = \bar{t} + \omega^2 T_1 \varepsilon_p (H_p^2)^* + \omega T_2 \varepsilon_p (H_p^2)^{**},$$

$$\begin{aligned}
(12b) \quad x_m = & \bar{x}_m + \omega^2 M_1 \varepsilon_p (H_p A_{pm})^* + \omega M_2 \varepsilon_p (H_p A_{pm})^{**} + \\
& + \omega^2 N_1 \varepsilon_p (H_p^2)^* \xi_m + \omega N_2 \varepsilon_p (H_p^2)^{**} \xi_m
\end{aligned}$$

where T_1, \dots, N_2 are functions of $\omega \bar{r}$, of the same general order of smallness as the coefficients of the metric tensor in (11). In the new coordinates

$$(13a) \quad \bar{g}_{00} = g_{00} - 8\omega^3 T_2 \varepsilon_p (H_p^2)^* + 2\omega^2 T_1 \varepsilon_p (H_p^2)^{**},$$

$$\begin{aligned}
(13b) \quad \bar{g}_{0n} = & g_{0n} + \omega^3 \left(T_1' - \frac{2}{\omega \bar{r}} T_1 + 4 N_2 \right) \varepsilon_p (H_p^2)^* \xi_n + \\
& + \omega^2 \left(T_2' - \frac{2}{\omega \bar{r}} T_2 - N_1 \right) \varepsilon_p (H_p^2)^{**} \xi_n + \\
& + \omega^3 \left(\frac{2}{\omega \bar{r}} T_1 + 4 M_2 \right) \varepsilon_p (H_p A_{pn})^* + \\
& + \omega^2 \left(\frac{2}{\omega \bar{r}} T_2 - \omega^2 M_1 \right) \varepsilon_p (H_p A_{pn})^{**}
\end{aligned}$$

by (10), where g_{00}, g_{0n} are the same expressions in the new coordinates as they were in the old ones; a similar formula can be obtained for \bar{g}_{mn} . In the calcula-

³ J. Lense and H. Thirring, Phys. Z. **19** (1918), 156—163.

tion of (13) we have made no distinction between differentiation with respect to t and \bar{t} ; this is permissible in the present approximation.

By a suitable determination of M_i , N_i , T_i , $i = 1, 2$, we can evidently achieve that g_{00} be time-independent and $g_{0n} = 0$. However, the time-coordinate corresponding to the first assumption is not likely to be useful to an actual observer, and we prefer not to specify the coordinate system at this stage but try to satisfy the Einstein equations

$$R_{\mu\nu} = 0$$

with the general line element (11).

The computation of the RICCI tensor is straightforward but rather tedious, and details will be suppressed. One gets a system of 14 equations for the unknown functions B_i , ..., V_i , which turn out to be compatible and which can be reduced to the following system:

$$(14) \quad P_i'' + \frac{2}{x} P_i' - \frac{6}{x^2} P_i + 4 P_i = 0$$

$$(15) \quad H_i = -x P_i' - 2 P_i + x K_i'$$

$$(16) \quad L_i = \frac{1}{2} x (P_i' + H_i') - (P_i + H_i)$$

$$(17) \quad V_i = 2x^2 K_i + \frac{1}{2} x P_i' + 2(1 - x^2) P$$

($i = 1, 2$), where

$$(18) \quad x = \omega r$$

and the quantities P_i , H_i , K_i , L_i are given by

$$(19) \quad P_i = D_i - \frac{1}{2} F_i - \frac{1}{2} \overline{B}_i' + \frac{1}{2x} \overline{B}_i + \frac{1}{x} \overline{C}_i,$$

$$(20) \quad H_i = F_i + \overline{B}_i' - \frac{1}{x} \overline{B}_i + \frac{2}{x} \overline{C}_i,$$

$$(21) \quad K_i = G_i + \frac{2}{x} \overline{B}_i,$$

$$(22) \quad L_i = E_i + 2 \overline{C}_i' - \frac{6}{x} \overline{C}_i$$

with

$$(23) \quad \overline{B}_1 = B_2, \quad \overline{B}_2 = -\frac{1}{4} B_1, \quad \overline{C}_1 = C_2, \quad \overline{C}_2 = -\frac{1}{4} C_1.$$

Equation (14) shows that $x^{1/2} P_1$ and $x^{1/2} P_2$ are Bessel functions of, $2x$ of order $\pm \frac{5}{2}$; therefore

$$(24) \quad P_i = \alpha_i \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{4x^3} \right) \sin(2x + \beta_i) + \frac{3}{2x^2} \cos(2x + \beta_i) \right], \quad i = 1, 2,$$

where α_i, β_i are integration constants. P_i is the only combination of the field quantities which can be determined from the equations independently of the arbitrariness of the coordinate system. The others depend on three pairs of arbitrary functions, namely B_i, C_i and G_i , corresponding to the free choice of M_i, N_i and T_i in (12). We can dispense with the first two by setting

$$(25) \quad B_i = C_i = 0;$$

it gives $g_{0i} = 0$, that is a stationary coordinate system.⁴ Thus we are left with a pair of free functions G_1 and G_2 ; the only restriction on these functions is that they should vanish sufficiently rapidly at infinity.

In order that V_i vanish at infinity, we must have by (17) and (24)

$$(26) \quad K_i = G_i = \alpha_i \left[\frac{1}{x} \sin(2x + \beta_i) + \frac{1}{x^2} \cos(2x + \beta_i) \right] - \frac{\gamma_i}{4x^3} \sin(2x + \beta_i) + \frac{Q_i}{x^2}$$

where $Q_i \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$ and γ_i is a constant. For clarity we have separated out the part with γ_i from Q_i ; the latter can then be regarded as an "aperiodic" part whose appearance is due to an inappropriate choice of coordinates. By setting $Q_i = 0$ and substituting (25), (26) into (15)–(22), we get

$$(27) \quad V_i = \alpha_i \left[\left(\frac{3}{2x} - \frac{3}{8x^3} \right) \sin(2x + \beta_i) + \frac{3}{4x^2} \cos(2x + \beta_i) \right] - \frac{\gamma_i}{2x} \sin(2x + \beta_i)$$

$$(28) \quad D_i = \alpha_i \left[\left(\frac{1}{2x} - \frac{9}{8x^3} \right) \sin(2x + \beta_i) + \frac{5}{4x^2} \cos(2x + \beta_i) \right] + \gamma_i \left[\frac{3}{8x^3} \sin(2x + \beta_i) - \frac{1}{4x^2} \cos(2x + \beta_i) \right],$$

$$(29) \quad L_i = (2\alpha_i - \gamma_i) \left[\left(-\frac{1}{2x} + \frac{15}{8x^3} \right) \sin(2x + \beta_i) - \frac{7}{4x^2} \cos(2x + \beta_i) \right],$$

$$(30) \quad H_i = -\alpha_i \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{4x^3} \right) \sin(2x + \beta_i) + \frac{1}{2x^2} \cos(2x + \beta_i) \right] + \gamma_i \left[\frac{3}{4x^3} \sin(2x + \beta_i) - \frac{1}{2x^2} \cos(2x + \beta_i) \right].$$

⁴ We shall find later that the harmonic condition leads to a non-zero determination of B_i . The obvious advantage of stationary coordinates is that it allows a clear separation into "space" and "time". The potential function V_i itself is not affected by the choice of B_i .

The most interesting feature of the solution is the appearance of the constant γ_i in the expression for V_i . It means that the observed fluctuation of the gravitational potential depends significantly on the selected value of γ_i and its determination must be regarded as a physical problem rather than a matter of mathematical convenience.

Fortunately it is possible to fix the coordinate system on physical grounds, in spite of the principle of equivalence, because of the near-centrosymmetry and one-body character of the problem which allows us to localize the source of oscillations at the origin. Clearly a good coordinate system is one which does not take part in the radial oscillations of the gravitational acceleration. Now any oscillation of this kind can be detected visually, by observing variations of DOPPLER shift in a stream of light which comes from a distant source in radial direction. Therefore we must seek a coordinate frame in which such a DOPPLER shift effect is absent, and this will certainly be the case if we can choose the system so that the radial velocity of light at every spatially fixed point is constant in time. In terms of the metric tensor (11) we have the condition that

$$(31) \quad V_i + D_i + E_i + 2F_i + G_i = 0$$

for all x . It is not altogether obvious that equation (31) can be satisfied at all. But if we substitute the expressions (26)–(30) into (31) we get

$$(32) \quad (3\alpha_i - \gamma_i) \left[\frac{1}{4x^3} \sin(2x + \beta_i) - \frac{1}{2x^2} \cos(2x + \beta_i) \right] = 0$$

and we see that (32) holds provided that γ_i is determined from

$$(33) \quad \gamma_i = 3\alpha_i \quad (i = 1, 2).$$

There is another circumstance which favours this selection of γ_i : as seen from (27), it is the only value of γ_i which leads to a $1/x^2$ law of decrease of the gravitational potential (hence also of the periodic acceleration) for large x . We have therefore good reason to believe that (33) is the physically most acceptable value of γ_i .

It is interesting to compare (33) with the value obtained for γ_i in a harmonic coordinate system. It can be shown that the harmonic condition

$$(34) \quad \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} g^{\mu\nu} + \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\lambda=0}^3 \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} g^{\mu\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3)$$

leads to the equations

$$(35) \quad \frac{1}{2} x^2 (K_i'' - P_i'') + 3x (K_i' - P_i') + 2x^2 (K_i - P_i) - P_i = 0,$$

$$(36) \quad x^2 B_i'' + 2x B_i' + 4x^2 B_i - 2B_i + 4C_i = 0,$$

$$(37) \quad x^2 C_i'' + 2x C_i' + 4x^2 C_i - 12C_i = 0.$$

From the last equation it follows that $x^{1/2} C_i$ is a Bessel function of order $\pm \frac{7}{2}$ in $2x$; but as C_i cannot be of order x^{-4} for small x , it must be of the form

$$C_i = \delta_i \left[\left(\frac{15}{8x^4} - \frac{3}{x^2} \right) \sin 2x + \left(-\frac{15}{4x^3} + \frac{1}{x} \right) \cos 2x \right].$$

From (36) we find that $x^{1/2} B_i = -\frac{2}{5} x^{1/2} C_i$ plus a Bessel function of order $\pm \frac{3}{2}$ which is admissible as it behaves well both for small and large x . Thus there is a considerable indeterminacy in the harmonic coordinate system due to the degenerate character of the problem of uniform rotation. The indeterminacy will be removed in section 3 where non-uniform rotation is considered. We shall find that the correct determination of B_i and C_i is such that

$$(38) \quad \bar{B}'_i - \frac{1}{x} \bar{B}_i + P_i = 0, \quad C_i = 0.$$

Hence $B_i \neq 0$ and the harmonic system is not stationary. With the above determination, equations (19), (20) and (22) take the simple form

$$(19^*) \quad \frac{1}{2} P_i = D_i - \frac{1}{2} F_i,$$

$$(20^*) \quad H_i = F_i - P_i,$$

$$(22^*) \quad L_i = E_i.$$

Finally (35) gives with (24)

$$(39) \quad K_i = \alpha_i \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} \right) \sin (2x + \beta_i) + \frac{1}{x^2} \cos (2x + \beta_i) \right]$$

plus a term $x^{-5/2} J_i$ where J_i is a Bessel-function of order $\frac{5}{2}$ in $2x$: It will be found that in the correct frame this last part vanishes and K_i is given by (39). Comparing with (26) we find that $Q_i = 0$ and

$$(40) \quad \gamma_i = 2\alpha_i.$$

An attractive feature of the harmonic frame is that it leads to a particularly simple form of the solution, viz.,

$$(41) \quad V_i = D_i = \frac{1}{2} P_i, \quad E_i = F_i = 0,$$

as seen easily from (19*), (20*), (22*), (27)—(30) and (40). On the other hand it gives $\gamma_i = 2\alpha_i$ instead of (33), and in view of the previous discussion it is

not very likely that an actual observer will accept the harmonic frame as a suitable coordinate system.

To represent outgoing waves only and to suit the given initial conditions for small r , we set $\beta_i = 0$, $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_1 = 2a_2 = 2M$; it gives

$$(42a) \quad g_{00} = 1 - 2\mu r^{-1} - 3\varepsilon_3 M r^{-3} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \theta\right) - \\ - 3\varepsilon M \cos^2 \theta \left[r^{-3} \cos 2(\omega(r-t) + \varphi) + 2\omega r^{-2} \sin 2(\omega(r-t) + \varphi)\right]$$

in the "visual" frame (33) and

$$(42b) \quad g_{00} = 1 - 2\mu r^{-1} - 3\varepsilon_3 M r^{-3} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \theta\right) + \\ + 3\varepsilon M \cos^2 \theta \left[\left(\frac{4}{3} \omega^2 r^{-1} - r^{-3}\right) \cos 2(\omega(r-t) + \varphi) - 2\omega r^{-2} \sin 2(\omega(r-t) + \varphi)\right]$$

in the harmonic frame (40). Both represent a potential wave spreading radially outwards with phase velocity 1, i. e. with the velocity of light.

In the wave zone (large r) the dominant periodic term of the potential in the two coordinate systems is

$$(43a) \quad U_0 = 3\varepsilon M r^{-2} \cos^2 \theta \sin 2(\omega(r-t) + \varphi)$$

and

$$(43b) \quad U_h = -2\varepsilon M \omega^2 r^{-1} \cos^2 \theta \cos 2(\omega(r-t) + \varphi)$$

respectively. Apart from a difference in phase lag as compared with the potential near the body, the amplitudes of the two potentials have quite different orders of magnitude,⁵ and we have a striking illustration of the fact, implicitly contained in the principle of equivalence, that one cannot make objective statements on gravitational forces without considering the physical (non-mechanical) features of the environment at large. A local gravitational criterion such as the harmonic condition can hardly influence in a decisive manner the selection of the physically most acceptable coordinate system.

§ 3. Non-uniform rotation

We shall drop now the assumption of constant ω and consider a non-uniform (accelerated) rotation of the ellipsoidal body. The purpose of the discussion of this more general situation is to find out about the propagation of gravitational signals (as distinct from the phase propagation of pure waves), independently of auxiliary conditions; in point of fact we can regard the variable angular velocity as an information to be transmitted to the observer through gravitational waves.

We assume that the Newtonian potential outside and not very far from the rotating body is given by (3) and (5) where ω is now a function of t . To find

⁵ Both decrease much slower than the Newtonian amplitude which is of order r^{-3} .

out the general form of a good line element corresponding to this assumption we shall make use of the results obtained in the previous section.

We first note that the solution (25)–(30) for the line element (11) with constant ω can be written in the form

$$(44a) \quad g_{00} = 1 - 2\mu r^{-1} - \Sigma_{\lambda} v_{\lambda} r^{\lambda-3} \varepsilon_p (H_p^2)^{(\lambda)}.$$

$$(44b) \quad g_{0n} = \Sigma_{\lambda} b_{\lambda} r^{\lambda-3} \varepsilon_p (H_p A_{pn})^{(\lambda)} + \Sigma_{\lambda} c_{\lambda} r^{\lambda-3} (H_p^2)^{(\lambda)} \xi_n,$$

$$(44c) \quad \begin{aligned} & -g_{mn} = \delta_{mn} + 2\mu r^{-1} \xi_m \xi_n + \Sigma_{\lambda} d_{\lambda} r^{\lambda-3} \varepsilon_p (H_p^2)^{(\lambda)} \delta_{mn} + \\ & + \Sigma_{\lambda} e_{\lambda} r^{\lambda-3} \varepsilon_p (H_p^2)^{(\lambda)} \xi_m \xi_n + \\ & + \Sigma_{\lambda} f_{\lambda} r^{\lambda-3} \varepsilon_p [(H_p A_{pm})^{(\lambda)} \xi_n + (H_p A_{pn})^{(\lambda)} \xi_m] + \\ & + \Sigma_{\lambda} g_{\lambda} r^{\lambda-3} \varepsilon_p (A_{pm} A_{pn})^{(\lambda)} \end{aligned}$$

where the coefficients $b_{\lambda}, \dots, v_{\lambda}$ are constants ($=0$ for $\lambda > 2$) and A_{pk} is given by

$$(45) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= (\cos(\omega t - \omega r), \sin(\omega t - \omega r), 0) \\ \mathbf{A}_2 &= (-\sin(\omega t - \omega r), \cos(\omega t - \omega r), 0) \\ \mathbf{A}_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

instead of (5). Thus A_{pk}, H_p are regarded as functions of $t-r$ (and of x_k) and the symbols $()^{(\lambda)}$ stand for derivatives with respect to $t-r$.

In this form the line element is suitable for immediate generalization to the case when ω is variable. As we expect a retarded dependence on t , we assume that ω is a function of $t-\beta r$ where β^{-1} is the velocity of propagation to be determined. Substitution in the Einstein equations gives a number of recursive relations for the coefficients $b_{\lambda}, \dots, v_{\lambda}$, which however turn out to be incompatible with the boundary conditions $b_{\lambda} = 0, \dots, v_{\lambda} = 0$ for $\lambda > 2$, except when $\beta = 1$. In that case the equations can be satisfied with the following system of coefficients (all others are zero)

$$(46a) \quad e_0 = 5(v_0 - d_0), \quad f_0 = -4v_0 + 2d_0 + 3b_1 - 2c_1,$$

$$g_0 = 2v_0 - \frac{2}{3}d_0 - 2b_1 + \frac{4}{3}c_1,$$

$$v_1 = v_0, \quad d_1 = \frac{2}{3}v_0 + \frac{1}{3}d_0 - \frac{2}{3}c_1 + 2c_2,$$

$$(46b) \quad e_1 = \frac{7}{3}(v_0 - d_0) + \frac{8}{3}(c_1 - 3c_2), \quad g_1 = \frac{4}{3}v_0 - 2b_2,$$

$$f_1 = -\frac{8}{3}v_0 + \frac{2}{3}d_0 + b_1 - \frac{4}{3}c_1 + 2b_2 + 2c_2,$$

$$(46c) \quad v_2 = \frac{1}{3}d_0 - \frac{2}{3}c_1, \quad d_2 = \frac{1}{3}v_0, \quad e_2 = \frac{1}{3}(v_0 - d_0) + \frac{2}{3}(c_1 - 3c_2),$$

$$f_2 = -\frac{2}{3}v_0 + b_2, \quad g_2 = \frac{2}{3}v_0$$

where

$$(47) \quad v_0 = 3M$$

and d_0, b_1, c_1, b_2, c_2 are arbitrary constants. The fact that such a solution exists at all can be taken as sufficiently strong indication that we have found an appropriate coordinate system. Since the solution definitely requires $\beta = 1$, we conclude that variations of ω are transmitted to the observer with the velocity of light.

We can satisfy condition (31) by setting $d_0 = b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = 0$; it gives

$$(48a) \quad g_{00} = 1 - 2\mu r^{-1} - 3Mr^{-3}\varepsilon_p H_p^2 - 3Mr^{-2}\varepsilon_p (H_p^2)',$$

$$(48b) \quad g_{0i} = 0,$$

and the expression (44c) for g_{mn} with

$$(49) \quad \begin{aligned} d_1 &= 2M, \quad d_2 = M, \\ e_0 &= 15M, \quad e_i = 7M, \quad e_2 = M, \\ f_0 &= -12M, \quad f_1 = -8M, \quad f_2 = -2M, \\ g_0 &= 6M, \quad g_1 = 4M, \quad g_2 = 2M. \end{aligned}$$

Again we find an r^{-2} law of decrease of the time-variable part of the gravitational potential, and in fact (48a) goes into (42a) when ω is constant.

In comparison, the harmonic condition (34) yields the values $d_0 = v_0$, $b_1 = b_2 = \frac{2}{3}v_0$, $c_1 = c_2 = 0$ in (46), hence

$$(50a) \quad g_{00} = 1 - 2\mu r^{-1} - 3Mr^{-3}\varepsilon_p H_p^2 - 3Mr^{-2}\varepsilon_p (H_p^2)' - Mr^{-1}\varepsilon_p (H_p^2)'',$$

$$(50b) \quad g_{0m} = 2Mr^{-2}\varepsilon_p (H_p A_{pm})' + 2Mr^{-1}\varepsilon_p (H_p A_{pm})'',$$

$$(50c) \quad \begin{aligned} &-g_{mn} = \delta_{mn} + 2\mu r^{-1}\xi_m \xi_n + \\ &+ [3Mr^{-3}\varepsilon_p H_p^2 + 3Mr^{-2}\varepsilon_p (H_p^2)' + Mr^{-1}\varepsilon_p (H_p^2)'']\delta_{mn} + \\ &+ 2Mr^{-1}\varepsilon_p (A_{pm} A_{pn})''. \end{aligned}$$

If ω is constant, the solution goes into the system (41) and leads to the determination (38) of B_i and C_i .

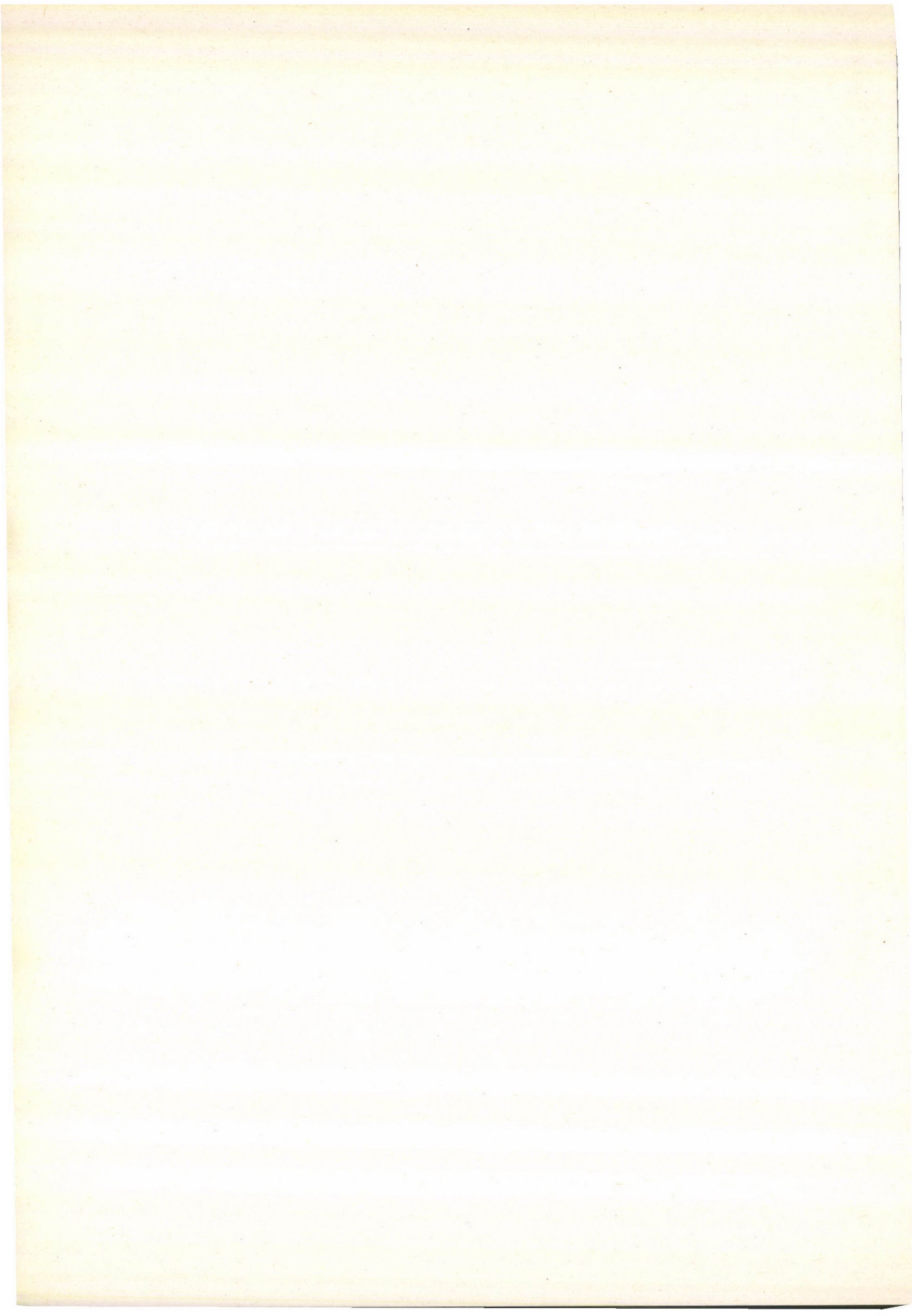
(Received November 1, 1959.)

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

G. SZEKERES

Резюме

Автор в настоящей работе исследует распространение гравитационных волн, порожденных вращающимся с постоянной угловой скоростью телом эллипсоидной формы в четырехмерном римановом пространстве общей теории относительности. Исследования он производит в системе координат, определенной свойствами симметрии проблемы, и в гармонических координатах, введенных Фоком. Полученные в результате волны приближенно являются сферическими, распространяющимися со скоростью света. Однако в двух системах координат вид волн и скорость уменьшения амплитуды оказываются различными. Наконец, автор производит исследование и в случае вращающегося с переменной угловой скоростью тела эллипсоидной формы.



ON THE EVOLUTION OF RANDOM GRAPHS

by

P. ERDŐS and A. RÉNYI

*Dedicated to Professor P. Turán at
his 50th birthday.*

Introduction

Our aim is to study the probable structure of a random graph $\Gamma_{n,N}$ which has n given labelled vertices P_1, P_2, \dots, P_n and N edges; we suppose that these N edges are chosen at random among the $\binom{n}{2}$ possible edges,

so that all $\binom{n}{2} = C_{n,N}$ possible choices are supposed to be equiprobable. Thus if $G_{n,N}$ denotes any one of the $C_{n,N}$ graphs formed from n given labelled points and having N edges, the probability that the random graph $\Gamma_{n,N}$ is identical with $G_{n,N}$ is $\frac{1}{C_{n,N}}$. If A is a property which a graph may or may not possess, we denote by $\mathbf{P}_{n,N}(A)$ the probability that the random graph $\Gamma_{n,N}$ possesses the property A , i. e. we put $\mathbf{P}_{n,N}(A) = \frac{A_{n,N}}{C_{n,N}}$ where $A_{n,N}$ denotes the number of those $G_{n,N}$ which have the property A .

An other equivalent formulation is the following: Let us suppose that n labelled vertices P_1, P_2, \dots, P_n are given. Let us choose at random an edge among the $\binom{n}{2}$ possible edges, so that all these edges are equiprobable. After this let us choose an other edge among the remaining $\binom{n}{2} - 1$ edges, and continue this process so that if already k edges are fixed, any of the remaining $\binom{n}{2} - k$ edges have equal probabilities to be chosen as the next one. We shall study the "evolution" of such a random graph if N is increased. In this investigation we endeavour to find what is the "typical" structure at a given stage of evolution (i. e. if N is equal, or asymptotically equal, to a given function $N(n)$ of n). By a "typical" structure we mean such a structure the probability of which tends to 1 if $n \rightarrow +\infty$ when $N = N(n)$. If A is such a property that $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(A) = 1$, we shall say that „almost all” graphs $G_{n,N(n)}$ possess this property.

The study of the evolution of graphs leads to rather surprising results. For a number of fundamental structural properties A there exists a function $A(n)$ tending monotonically to $+\infty$ for $n \rightarrow +\infty$ such that

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n, N(n)}(A) = \begin{cases} 0 & \text{if } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n)}{A(n)} = 0 \\ 1 & \text{if } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n)}{A(n)} = +\infty. \end{cases}$$

If such a function $A(n)$ exists we shall call it a "threshold function" of the property A .

In many cases besides (1) it is also true that there exists a probability distribution function $F(x)$ so that if $0 < x < +\infty$ and x is a point of continuity of $F(x)$ then

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n, N(n)}(A) = F(x) \quad \text{if} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n)}{A(n)} = x.$$

If (2) holds we shall say that $A(n)$ is a "regular threshold function" for the property A and call the function $F(x)$ the *threshold distribution function* of the property A .

For certain properties A there exist two functions $A_1(n)$ and $A_2(n)$ both tending monotonically to $+\infty$ for $n \rightarrow +\infty$, and satisfying $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_2(n)}{A_1(n)} = 0$, such that

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n, N(n)}(A) = \begin{cases} 0 & \text{if } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n) - A_1(n)}{A_2(n)} = -\infty \\ 1 & \text{if } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n) - A_1(n)}{A_2(n)} = +\infty. \end{cases}$$

Clearly (3) implies that

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n, N(n)}(A) = \begin{cases} 0 & \text{if } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n)}{A_1(n)} < 1 \\ 1 & \text{if } \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n)}{A_1(n)} > 1. \end{cases}$$

If (3) holds we call the pair $(A_1(n), A_2(n))$ a pair of "sharp threshold"-functions of the property A . It follows from (4) that if $(A_1(n), A_2(n))$ is a pair of sharp threshold functions for the property A then $A_1(n)$ is an (ordinary) threshold function for the property A and the threshold distribution function figuring in (2) is the degenerated distribution function

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 1 \\ 1 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

and convergence in (2) takes place for every $x \neq 1$. In some cases besides (3) it is also true that there exists a probability distribution function $G(y)$ defined for $-\infty < y < +\infty$ such that if y is a point of continuity of $G(y)$ then

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n, N(n)}(A) = G(y) \quad \text{if} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n) - A_1(n)}{A_2(n)} = y.$$

If (5) holds we shall say that we have a *regular sharp threshold* and shall call $G(y)$ the *sharp-threshold distribution function of the property A*.

One of our chief aims will be to determine the threshold respectively sharp threshold functions, and the corresponding distribution functions for the most obvious structural properties, e. g. the presence in $\Gamma_{n, N}$ of subgraphs of a given type (trees, cycles of given order, complete subgraphs etc.) further for certain global properties of the graph (connectedness, total number of connected components, etc.).

In a previous paper [7] we have considered a special problem of this type; we have shown that denoting by C the property that the graph is connected, the pair $C_1(n) = \frac{1}{2} n \log n$, $C_2(n) = n$ is a pair of strong threshold functions for the property C , and the corresponding sharp-threshold distribution function is $e^{-e^{-2y}}$; thus we have proved¹ that putting

$N(n) = \frac{1}{2} n \log n + y n + o(n)$ we have

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n, N(n)}(C) = e^{-e^{-2y}} \quad (-\infty < y < +\infty).$$

In the present paper we consider the evolution of a random graph in a more systematic manner and try to describe the gradual development and step-by-step unravelling of the complex structure of the graph $\Gamma_{n, N}$ when N increases while n is a given large number.

We succeeded in revealing the emergence of certain structural properties of $\Gamma_{n, N}$. However a great deal remains to be done in this field. We shall call in § 10. the attention of the reader to certain unsolved problems. It seems to us further that it would be worth while to consider besides graphs also more complex structures from the same point of view, i. e. to investigate the laws governing their evolution in a similar spirit. This may be interesting not only from a purely mathematical point of view. In fact, the evolution of graphs may be considered as a rather simplified model of the evolution of certain communication nets (railway, road or electric network systems, etc.) of a country or some other unit. (Of course, if one aims at describing such a real situation, one should replace the hypothesis of equiprobability of all connections by some more realistic hypothesis.) It seems plausible that by considering the random growth of more complicated structures (e. g. structures consisting of different sorts of "points" and connections of different types) one could obtain fairly reasonable models of more complex real growth processes (e. g.

¹ Partial result on this problem has been obtained already in 1939 by P. ERDŐS and H. WHITNEY but their results have not been published.

the growth of a complex communication net consisting of different types of connections, and even of organic structures of living matter, etc.).

§§ 1—3. contain the discussion of the presence of certain components in a random graph, while §§ 4—9. investigate certain global properties of a random graph. Most of our investigations deal with the case when $N(n) \sim cn$ with $c > 0$. In fact our results give a clear picture of the evolution of $\Gamma_{n,N(n)}$ when $c = \frac{N(n)}{n}$ (which plays in a certain sense the role of time) increases.

In § 10. we make some further remarks and mention some unsolved problems.

Our investigation belongs to the combinatorial theory of graphs, which has a fairly large literature. The first who enumerated the number of possible graphs with a given structure was A. CAYLEY [1]. Next the important paper [2] of G. PÓLYA has to be mentioned, the starting point of which were some chemical problems. Among more recent results we mention the papers of G. E. UHLENBECK and G. W. FORD [5] and E. N. GILBERT [6]. A fairly complete bibliography will be given in a paper of F. HARARY [8]. In these papers the probabilistic point of view was not explicitly emphasized. This has been done in the paper [9] of one of the authors, but the aim of the probabilistic treatment was there different: the existence of certain types of graphs has been shown by proving that their probability is positive. Random trees have been considered in [14].

In a recent paper [10] T. L. AUSTIN, R. E. FAGEN, W. F. PENNEY and J. RIORDAN deal with random graphs from a point of view similar to ours. The difference between the definition of a random graph in [10] and in the present paper consists in that in [10] it is admitted that two points should be connected by more than one edge ("parallel" edges). Thus in [10] it is supposed that after a certain number of edges have already been selected,

the next edge to be selected may be any of the possible $\binom{n}{2}$ edges between the n given points (including the edges already selected). Let us denote such a random graph by $\Gamma_{n,N}^*$. The difference between the probable properties of $\Gamma_{n,N}$ resp. $\Gamma_{n,N}^*$ are in most (but not in all) cases negligible. The corresponding probabilities are in general (if the number N of edges is not too large) asymptotically equal. There is a third possible point of view which is in most cases almost equivalent with these two; we may suppose that for each pair of n given points it is determined by a chance process whether the edge connecting the two points should be selected or not, the probability for selecting any given edge being equal to the same number $p > 0$, and the decisions concerning the different edges being completely independent. In this case of course the number of edges is a random variable, having the expectation $\binom{n}{2}p$; thus if we want to obtain by this method a random graph having in

the mean N edges we have to choose the value of p equal to $\frac{N}{\binom{n}{2}}$. We shall

denote such a random graph by $\Gamma_{n,N}^{**}$. In many (though not all) of the problems treated in the present paper it does not cause any essential difference if we consider instead of $\Gamma_{n,N}$ the random graph $\Gamma_{n,N}^{**}$.

Comparing the method of the present paper with that of [10] it should be pointed out that our aim is to obtain threshold functions resp. distributions, and thus we are interested in asymptotic formulae for the probabilities considered. Exact formulae are of interest to us only so far as they help in determining the asymptotic behaviour of the probabilities considered (which is rarely the case in this field, as the exact formulae are in most cases too complicated). On the other hand in [10] the emphasis is on exact formulae resp. on generating functions. The only exception is the average number of connected components, for the asymptotic evaluation of which a way is indicated in § 5. of [10]; this question is however more fully discussed in the present paper and our results go beyond that of [10]. Moreover, we consider not only the number but also the character of the components. Thus for instance we point out the remarkable change occurring at $N \sim \frac{n}{2}$. If $N \sim nc$ with $c < 1/2$

then with probability tending to 1 for $n \rightarrow +\infty$ all points except a bounded number of points of $\Gamma_{n,N}$ belong to components which are trees, while for $N \sim nc$ with $c > \frac{1}{2}$ this is no longer the case. Further for a fixed value of n the average number of components of $\Gamma_{n,N}$ decreases asymptotically in a linear manner with N , when $N \leq \frac{n}{2}$, while for $N > \frac{n}{2}$ the formula giving the average number of components is not linear in N .

In what follows we shall make use of the symbols O and o . As usually $a(n) = o(b(n))$ (where $b(n) > 0$ for $n = 1, 2, \dots$) means that $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a(n)|}{b(n)} = 0$,

while $a(n) = O(b(n))$ means that $\frac{|a(n)|}{b(n)}$ is bounded. The parameters on

which the bound of $\frac{|a(n)|}{b(n)}$ may depend will be indicated if it is necessary;

sometimes we will indicate it by an index. Thus $a(n) = O_\epsilon(b(n))$ means that $\frac{|a(n)|}{b(n)} \leq K(\epsilon)$ where $K(\epsilon)$ is a positive constant depending on ϵ . We write

$a(n) \sim b(n)$ to denote that $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 1$.

We shall use the following definitions from the theory of graphs. (For the general theory see [3] and [4].)

A finite non-empty set V of labelled points P_1, P_2, \dots, P_n and a set E of different unordered pairs (P_i, P_j) with $P_i \in V, P_j \in V, i \neq j$ is called a *graph*; we denote it sometimes by $G = \{V, E\}$; the number n is called the *order* (or *size*) of the graph; the points P_1, P_2, \dots, P_n are called the *vertices* and the pairs (P_i, P_j) the *edges* of the graph. Thus we consider *non-oriented finite graphs without parallel edges and without slings*. The set E may be empty, thus a collection of points (especially a single point) is also a graph.

A graph $G_2 = \{V_2, E_2\}$ is called a *subgraph* of a graph $G_1 = \{V_1, E_1\}$ if the set of vertices V_2 of G_2 is a subset of the set of vertices V_1 of G_1 and the set E_2 of edges of G_2 is a subset of the set E_1 of edges of G_1 .

A sequence of k edges of a graph such that every two consecutive edges and only these have a vertex in common is called a *path* of order k .

A cyclic sequence of k edges of a graph such that every two consecutive edges and only these have a common vertex is called a *cycle* of order k .

A graph G is called *connected* if any two of its points belong to a path which is a subgraph of G .

A graph is called a *tree* of order (or size) k if it has k vertices, is connected and if none of its subgraphs is a cycle. A tree of order k has evidently $k - 1$ edges.

A graph is called a *complete graph* of order $\binom{k}{2}$ if it has k vertices and $\binom{k}{2}$ edges. Thus in a complete graph of order k any two points are connected by an edge.

A subgraph G' of a graph G will be called an *isolated subgraph* if all edges of G one or both endpoints of which belong to G' , belong to G' . A connected isolated subgraph G' of a graph G is called a *component* of G . The number of points belonging to a component G' of a graph G will be called the *size* of G' .

Two graphs shall be called *isomorphic*, if there exists a one-to-one mapping of the vertices carrying over these graphs into another.

The graph \bar{G} shall be called *complementary graph* of G if \bar{G} consists of the same vertices P_1, P_2, \dots, P_n as G and of those and only those edges (P_i, P_j) which do not occur in G .

The number of edges starting from the point P of a graph G will be called the *degree* of P in G .

A graph G is called a *saturated even graph of type* (a, b) if it consists of $a + b$ points and its points can be split in two subsets V_1 and V_2 consisting of a resp. b points, such that G contains any edge (P, Q) with $P \in V_1$ and $Q \in V_2$ and no other edge.

A graph is called *planar*, if it can be drawn on the plane so that no two of its edges intersect.

We introduce further the following definitions: If a graph G has n vertices and N edges, we call the number $\frac{2N}{n}$ the "*degree*" of the graph.

(As a matter of fact $\frac{2N}{n}$ is the average degree of the vertices of G .) If a graph G has the property that G has no subgraph having a larger degree than G itself, we call G a *balanced graph*.

We denote by $\mathbf{P}(\dots)$ the probability of the event in the brackets, by $\mathbf{M}(\xi)$ resp. $\mathbf{D}^2(\xi)$ the mean value resp. variance of the random variable ξ . In cases when it is not clear from the context in which probability space the probabilities or respectively the mean values and variances are to be understood, this will be explicitly indicated. Especially $\mathbf{M}_{n,N}$ resp. $\mathbf{D}_{n,N}^2$ will denote the mean value resp. variance calculated with respect to the probabilities $\mathbf{P}_{n,N}$.

We shall often use the following elementary asymptotic formula:

$$(7) \quad \binom{n}{k} \sim \frac{n^k e^{-\frac{k^2}{2n} - \frac{k^3}{6n^2}}}{k!} \quad \text{valid for } k = o(n^{2/3}).$$

Our thanks are due to T. GALLAI for his valuable remarks.

§ 1. Thresholds for subgraphs of given type

If N is very small compared with n , namely if $N = o(\sqrt{n})$ then it is very probable that $\Gamma_{n,N}$ is a collection of isolated points and isolated edges, i. e. that no two edges of $\Gamma_{n,N}$ have a point in common. As a matter of fact the probability that at least two edges of $\Gamma_{n,N}$ shall have a point in common is by (7) clearly

$$1 - \frac{\binom{n}{2N} (2N)!}{2^N N! \binom{\binom{n}{2}}{N}} = O\left(\frac{N^2}{n}\right).$$

If however $N \sim c \sqrt{n}$ where $c > 0$ is a constant not depending on n , then the appearance of trees of order 3 will have a probability which tends to a positive limit for $n \rightarrow +\infty$, but the appearance of a connected component consisting of more than 3 points will be still very improbable. If N is increased while n is fixed, the situation will change only if N reaches the order of magnitude of $n^{2/3}$. Then trees of order 4 (but not of higher order) will appear with a probability not tending to 0. In general, the threshold function for the presence of trees of order k is $n^{\frac{k-2}{k-1}}$ ($k = 3, 4, \dots$). This result is contained in the following

Theorem 1. Let $k \geq 2$ and $l \left(k-1 \leq l \leq \binom{k}{2} \right)$ be positive integers. Let $\mathcal{G}_{k,l}$ denote an arbitrary not empty class of connected balanced graphs consisting of k points and l edges. The threshold function for the property that the random graph considered should contain at least one subgraph isomorphic with some element of $\mathcal{G}_{k,l}$ is $n^{2-\frac{k}{l}}$.

The following special cases are worth mentioning

Corollary 1. The threshold function for the property that the random graph contains a subgraph which is a tree of order k is $n^{\frac{k-2}{k-1}}$ ($k = 3, 4, \dots$).

Corollary 2. The threshold function for the property that a graph contains a connected subgraph consisting of $k \geq 3$ points and k edges (i. e. containing exactly one cycle) is n , for each value of k .

Corollary 3. The threshold function for the property that a graph contains a cycle of order k is n , for each value of $k \geq 3$.

Corollary 4. *The threshold function for the property that a graph contains a complete subgraph of order $k \geq 3$ is $n^{2(1-\frac{1}{k-1})}$.*

Corollary 5. *The threshold function for the property that a graph contains a saturated even subgraph of type (a, b) (i. e. a subgraph consisting of $a + b$ points $P_1, \dots, P_a, Q_1, \dots, Q_b$ and of the ab edges (P_i, Q_j)) is $n^{2-\frac{a+b}{ab}}$.*

To deduce these Corollaries one has only to verify that all 5 types of graphs figuring in Corollaries 1—5. are balanced, which is easily seen.

Proof of Theorem 1. Let $B_{k,l} \geq 1$ denote the number of graphs belonging to the class $\mathcal{B}_{k,l}$ which can be formed from k given labelled points. Clearly if $P_{n,N}(\mathcal{B}_{k,l})$ denotes the probability that the random graph $\Gamma_{n,N}$ contains at least one subgraph isomorphic with some element of the class $\mathcal{B}_{k,l}$, then

$$(1.1) \quad P_{n,N}(\mathcal{B}_{k,l}) \leq \binom{n}{k} B_{k,l} \frac{\binom{n}{2} - l}{\binom{n}{2}} = O\left(\frac{N^l}{n^{2l-k}}\right).$$

As a matter of fact if we select k points (which can be done in $\binom{n}{k}$ different ways) and form from them a graph isomorphic with some element of the class $\mathcal{B}_{k,l}$ (which can be done in $B_{k,l}$ different ways) then the number of graphs $G_{n,N}$ which contain the selected graph as a subgraph is equal to the number of ways the remaining $N - l$ edges can be selected from the $\binom{n}{2} - l$ other possible edges. (Of course those graphs, which contain more subgraphs isomorphic with some element of $\mathcal{B}_{k,l}$ are counted more than once.)

Now clearly if $N = o(n^{2-\frac{k}{l}})$ then by

$$P_{n,N}(\mathcal{B}_{k,l}) = o(1)$$

which proves the first part of the assertion of Theorem 1. To prove the second part of the theorem let $\mathcal{B}_{k,l}^{(n)}$ denote the set of all subgraphs of the complete graph consisting of n points, isomorphic with some element of $\mathcal{B}_{k,l}$. To any $S \in \mathcal{B}_{k,l}^{(n)}$ let us associate a random variable $\varepsilon(S)$ such that $\varepsilon(S) = 1$ or $\varepsilon(S) = 0$ according to whether S is a subgraph of $\Gamma_{n,N}$ or not. Then clearly (we write in what follows for the sake of brevity \mathbf{M} instead of $\mathbf{M}_{n,N}$)

$$(1.2) \quad \mathbf{M}\left(\sum_{S \in \mathcal{B}_{k,l}^{(n)}} \varepsilon(S)\right) = \sum_{S \in \mathcal{B}_{k,l}^{(n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S)) = \binom{n}{k} B_{k,l} \frac{\binom{n}{2} - l}{\binom{n}{2}} \sim \frac{B_{k,l}}{k!} \frac{(2N)^l}{n^{2l-k}}.$$

On the other hand if S_1 and S_2 are two elements of $\mathcal{S}_{k,l}^{(n)}$ and if S_1 and S_2 do not contain a common edge then

$$\mathbf{M}(\varepsilon(S_1) \varepsilon(S_2)) = \frac{\binom{\binom{n}{2} - 2l}{N - 2l}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}}.$$

If S_1 and S_2 contain exactly s common points and r common edges ($1 \leq r \leq l-1$) we have

$$\mathbf{M}(\varepsilon(S_1) \varepsilon(S_2)) = \frac{\binom{\binom{n}{2} - 2l + r}{N - 2l + r}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} = O\left(\frac{N^{2l-r}}{n^{4l-2r}}\right).$$

On the other hand the intersection of S_1 and S_2 being a subgraph of S_1 (and S_2) by our supposition that each S is balanced, we obtain $\frac{r}{s} \leq \frac{l}{k}$ i. e. $s \geq \frac{rk}{l}$ and thus the number of such pairs of subgraphs S_1 and S_2 does not exceed

$$B_{k,l}^2 \sum_{j \geq \frac{rk}{l}} \binom{n}{k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{k-j} = O\left(n^{2k - \frac{rk}{l}}\right).$$

Thus we obtain

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\left(\left(\sum_{S \in \mathcal{S}_{k,l}^{(n)}} \varepsilon(S)\right)^2\right) = \\ (1.3) \quad & = \sum_{S \in \mathcal{S}_{k,l}^{(n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S)) + \frac{n! B_{k,l}^2}{k!^2 (n-2k)!} \frac{\binom{\binom{n}{2} - 2l}{N - 2l}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} + O\left(\left(\frac{N^l}{n^{2l-k}}\right)^2 \sum_{r=1}^l \left(\frac{n^{2-\frac{k}{l}}}{N}\right)^r\right). \end{aligned}$$

Now clearly

$$\frac{n!}{k!^2 (n-2k)!} \frac{\binom{\binom{n}{2} - 2l}{N - 2l}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} \leq \left(\frac{n}{k}\right)^2 \frac{\left(\binom{\binom{n}{2} - l}{N - l}\right)^2}{\left(\binom{\binom{n}{2}}{N}\right)^2}.$$

If we suppose that

$$\frac{N}{n^{\frac{2-k}{2-l}}} = \omega \rightarrow +\infty,$$

it follows that we have

$$(1.4) \quad \mathbf{D}^2\left(\sum_{S \in \mathcal{B}_{k,l}^{(n)}} \varepsilon(S)\right) = O\left(\frac{\left(\sum_{S \in \mathcal{B}_{k,l}^{(n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))^2\right)}{\omega}\right).$$

It follows by the inequality of *Chebysheff* that

$$\mathbf{P}_{n,N}\left(\left|\sum_{S \in \mathcal{B}_{k,l}^{(n)}} \varepsilon(S) - \sum_{S \in \mathcal{B}_{k,l}^{(n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))\right| > \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{B}_{k,l}^{(n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))\right) = O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

and thus

$$(1.5) \quad \mathbf{P}_{n,N}\left(\sum_{S \in \mathcal{B}_{k,l}^{(n)}} \varepsilon(S) \leq \frac{1}{2} \sum_{S \in \mathcal{B}_{k,l}^{(n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))\right) = O\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

As clearly by (1.2) if $\omega \rightarrow +\infty$ then $\sum_{S \in \mathcal{B}_{k,l}^{(n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S)) \rightarrow +\infty$ it follows not only that the probability that $\Gamma_{n,N}$ contains at least one subgraph isomorphic with an element of $\mathcal{B}_{k,l}$ tends to 1, but also that with probability tending to 1 the number of subgraphs of $\Gamma_{n,N}$ isomorphic to some element of $\mathcal{B}_{k,l}$ will tend to $+\infty$ with the same order of magnitude as ω^l .

Thus Theorem 1 is proved.

It is interesting to compare the thresholds for the appearance of a subgraph of a certain type in the above sense with probability near to 1, with the number of edges which is needed in order that the graph should have *necessarily* a subgraph of the given type. Such "compulsory" thresholds have been considered by P. TURÁN [11] (see also [12]) and later by P. ERDŐS and A. H. STONE [17]). For instance for a tree of order k clearly the compulsory threshold is $\left\lceil \frac{n(k-2)}{2} \right\rceil + 1$; for the presence of at least one cycle the compulsory threshold is n while according to a theorem of P. TURÁN [11] for complete subgraphs of order k the compulsory threshold is $\frac{(k-2)}{2(k-1)}(n^2 - r^2) + \binom{r}{2}$ where $r = n - (k-1)\left\lfloor \frac{n}{k-1} \right\rfloor$. In the paper [13] of T. KŐVÁRI, V. T. SÓS and P. TURÁN it has been shown that the compulsory threshold for the presence of a saturated even subgraph of type (a, a) is of order of magnitude not greater than $n^{2-\frac{1}{a}}$. In all cases the "compulsory" thresholds in TURÁN's sense are of greater order of magnitude as our "probable" thresholds.

§ 2. Trees

Now let us turn to the determination of threshold distribution functions for trees of a given order. We shall prove somewhat more, namely that if

$N \sim \varrho n^{\frac{k-2}{k-1}}$ where $\varrho > 0$, then the number of trees of order k contained in $\Gamma_{n,N}$ has in the limit for $n \rightarrow +\infty$ a Poisson distribution with mean value $\lambda = \frac{(2\varrho)^{k-1} k^{k-2}}{k!}$. This implies that the threshold distribution function for trees of order k is $1 - e^{-\lambda}$.

In proving this we shall count only *isolated trees* of order k in $\Gamma_{n,N}$, i. e. trees of order k which are isolated subgraphs of $\Gamma_{n,N}$. According to Theorem 1. this makes no essential difference, because if there would be a tree of order k which is a subgraph but not an isolated subgraph of $\Gamma_{n,N}$, then $\Gamma_{n,N}$ would have a connected subgraph consisting of $k+1$ points and the probability of this is tending to 0 if $N = o\left(n^{\frac{k-1}{k}}\right)$ which condition is fulfilled in our case as we suppose $N \sim \varrho n^{\frac{k-2}{k-1}}$.

Thus we prove

Theorem 2a. If $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n)}{n^{\frac{k-2}{k-1}}} = \varrho > 0$ and τ_k denotes the number of isolated trees of order k in $\Gamma_{n,N(n)}$ then

$$(2.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(\tau_k = j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}$$

or $j = 0, 1, \dots$, where

$$(2.2) \quad \lambda = \frac{(2\varrho)^{k-1} k^{k-2}}{k!}.$$

For the proof we need the following

Lemma 1. Let $\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, \dots, \varepsilon_{nl_n}$ be sets of random variables on some probability space; suppose that $\varepsilon_{ni} (1 \leq i \leq l_n)$ takes on only the values 1 and 0. If

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq l_n} \mathbf{M}(\varepsilon_{ni_1} \varepsilon_{ni_2} \dots \varepsilon_{ni_r}) = \frac{\lambda^r}{r!}$$

uniformly in r for $r = 1, 2, \dots$, where $\lambda > 0$ and the summation is extended over all combinations (i_1, i_2, \dots, i_r) of order r of the integers $1, 2, \dots, l_n$, then

$$(2.4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{l_n} \varepsilon_{ni} = j\right) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \quad (j = 0, 1, \dots)$$

i. e. the distribution of the sum $\sum_{i=1}^{l_n} \varepsilon_{ni}$ tends for $n \rightarrow +\infty$ to the Poisson-distribution with mean value λ .

Proof of Lemma 1. Let us put

$$(2.5) \quad P_n(j) = \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^{l_n} \varepsilon_{ni} = j \right).$$

Clearly

$$(2.6) \quad \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq l_n} \mathbf{M}(\varepsilon_{ni_1} \varepsilon_{ni_2} \dots \varepsilon_{ni_r}) = \sum_{j=r}^{+\infty} \binom{j}{r} P_n(j)$$

thus it follows from (2.3) that

$$(2.7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=r}^{+\infty} P_n(j) \binom{j}{r} = \frac{\lambda^r}{r!} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

uniformly in r .

It follows that for any z with $|z| < 1$

$$(2.8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{j=r}^{+\infty} P_n(j) \binom{j}{r} \right) z^r = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\lambda z)^r}{r!} = e^{\lambda z} - 1.$$

But

$$(2.9) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{j=r}^{+\infty} P_n(j) \binom{j}{r} \right) z^r = \sum_{j=0}^{+\infty} P_n(j) (1+z)^j - 1.$$

Thus choosing $z = x - 1$ with $0 < x \leq 1$ it follows that

$$(2.10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} P_n(j) x^j = e^{\lambda(x-1)} \quad \text{for } 0 < x \leq 1.$$

It follows easily that (2.10) holds for $x = 0$ too. As a matter of fact putting $G_n(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} P_n(j) x^j$, we have for $0 < x \leq 1$

$$|P_n(0) - e^{-\lambda}| \leq |G_n(x) - e^{\lambda(x-1)}| + |G_n(x) - P_n(0)| + |e^{\lambda(x-1)} - e^{-\lambda}|.$$

As however

$$|G_n(x) - P_n(0)| \leq x \sum_{j=1}^{+\infty} P_n(j) \leq x$$

and similarly

$$|e^{\lambda(x-1)} - e^{-\lambda}| \leq x$$

it follows that

$$|P_n(0) - e^{-\lambda}| \leq |G_n(x) - e^{\lambda(x-1)}| + 2x.$$

Thus we have

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |P_n(0) - e^{-\lambda}| \leq 2x;$$

as however $x > 0$ may be chosen arbitrarily small it follows that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(0) = e^{-\lambda}$$

i. e. that (2.10) holds for $x = 0$ too. It follows by a well-known argument that

$$(2.11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \quad (j = 0, 1, \dots).$$

As a matter of fact, as (2.10) is valid for $x = 0$, (2.11) holds for $j = 0$. If (2.11) is already proved for $j \leq s-1$ then it follows from (2.10) that

$$(2.12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=s}^{+\infty} P_n(j) x^{j-s} = \sum_{j=s}^{+\infty} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} x^{j-s} \quad \text{for } 0 < x \leq 1.$$

By the same argument as used in connection with (2.10) we obtain that (2.12) holds for $x = 0$ too. Substituting $x = 0$ into (2.12) we obtain that (2.11) holds for $j = s$ too. Thus (2.11) is proved by induction and the assertion of Lemma 1 follows.

Proof of Theorem 2a. Let $T_k^{(n)}$ denote the set of all trees of order k which are subgraphs of the complete graph having the vertices P_1, P_2, \dots, P_n . If $S \in T_k^{(n)}$ let the random variable $\varepsilon(S)$ be equal to 1 if S is an *isolated* subgraph of $\Gamma_{n,N}$; otherwise $\varepsilon(S)$ shall be equal to 0. We shall show that the conditions of Lemma 1 are satisfied for the sum $\sum_{S \in T_k^{(n)}} \varepsilon(S)$ provided that $N = N(n) \sim$

$\sim \rho n^{k-1}$ and λ is defined by (2.2). As a matter of fact we have for any $S \in T_k^{(n)}$

$$(2.13) \quad \mathbf{M}(\varepsilon(S)) = \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} = \left(\frac{2N}{n^2} \right)^{k-1} e^{-\frac{2Nk}{n}} \left(1 + O\left(\frac{N}{n^2} \right) \right).$$

More generally if S_1, S_2, \dots, S_r ($S_j \in T_k^{(n)}$) have pairwise no point in common then clearly we have for each fixed $k \geq 1$ and $r \geq 1$ provided that $n \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$

$$(2.14) \quad \mathbf{M}(\varepsilon(S_1) \varepsilon(S_2) \dots \varepsilon(S_r)) = \frac{\binom{n-rk}{2}}{\binom{n}{2}} = \left(\frac{2N}{n^2} \right)^{(k-1)r} e^{-\frac{2Nr k}{n}} \left(1 + O\left(\frac{r^2 N}{n^2} \right) \right)$$

where the bound of the O term depends only on k . If however the S_j ($j = 1, 2, \dots, r$) are not pairwise disjoint, we have

$$(2.15) \quad \mathbf{M}(\varepsilon(S_1) \varepsilon(S_2) \dots \varepsilon(S_r)) = 0.$$

Taking into account that according to a classical formula of CAYLEY [1] the number of different trees which can be formed from k labelled points is equal to k^{k-2} , it follows that

$$(2.16) \quad \sum \mathbf{M}(\varepsilon(S_1) \varepsilon(S_2) \dots \varepsilon(S_r)) = \left(\frac{k^{k-2}}{k!} \right)^r \frac{n^{kr}}{r!} \left(\frac{2N}{n^2} \right)^{rk-1} e^{-\frac{2Nrk}{n}} \left(1 + O\left(\frac{r^2 N}{n^2} \right) \right)$$

where the summation on the left hand side is extended over all r -tuples of trees belonging to the set $T_k^{(n)}$ and the bound of the O -term depends only on k . Note that (2.16) is valid independently of how N is tending to $+\infty$. This will be needed in the proof of Theorem 3.

Thus we have, uniformly in r

$$(2.17) \quad \lim_{\substack{N(n) \\ \frac{k-2}{n^{k-1}} \rightarrow 0}} \sum \mathbf{M}(\varepsilon(S_1) \varepsilon(S_2) \dots \varepsilon(S_r)) = \frac{\lambda^r}{r!} \quad \text{for } r = 1, 2, \dots$$

where λ is defined by (2.2).

Thus our Lemma 1 can be applied; as $\tau_k = \sum_{S \in T_k^{(n)}} \varepsilon(S)$ Theorem 2 is proved.

We add some remarks on the formula, resulting from (2.16) for $r = 1$

$$(2.18) \quad \mathbf{M}(\tau_k) = \frac{n^2}{2N} \frac{\left(\frac{2N}{n} e^{-\frac{2N}{n}} \right)^k k^{k-2}}{k!} \left(1 + O\left(\frac{N}{n^2} \right) \right).$$

Let us investigate the functions $m_k(t) = \frac{k^{k-2} t^{k-1} e^{-kt}}{k!}$ ($k = 1, 2, \dots$). According to (2.18) $nm_k\left(\frac{2N}{n}\right)$ is asymptotically equal to the average number of trees of order k in $\Gamma_{n,N}$. For a fixed value of k , considered as a function of t , the value of $m_k(t)$ increases for $t < \frac{k-1}{k}$ and decreases for $t > \frac{k-1}{k}$; thus for a fixed value of n the average number of trees of order k reaches its maximum for $N \sim \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{k} \right)$; the value of this maximum is

$$M_k^* \sim n \frac{\left(1 - \frac{1}{k} \right)^{k-1} e^{-(k-1)} k^{k-2}}{k!}.$$

For large values of k we have evidently

$$M_k^* \sim \frac{n}{\sqrt{2\pi} k^{5/2}}.$$

It is easy to see that for any $t > 0$ we have

$$m_k(t) \geq m_{k+1}(t) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

The functions $y = m_k(t)$ are shown on Fig. 1.

It is natural to ask what will happen with the number τ_k of isolated trees of order k contained in $\Gamma_{n,N}$ if $\frac{N(n)}{n^{k-1}} \rightarrow +\infty$. As the Poisson distribution

$\left\{ \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \right\}$ is approaching the normal distribution if $\lambda \rightarrow +\infty$, one can guess that τ_k will be approximately normally distributed. This is in fact true, and is expressed by

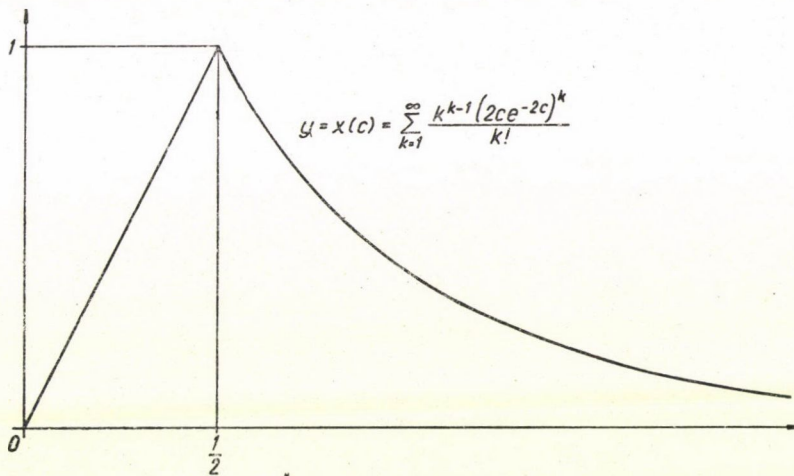


Figure 1a.

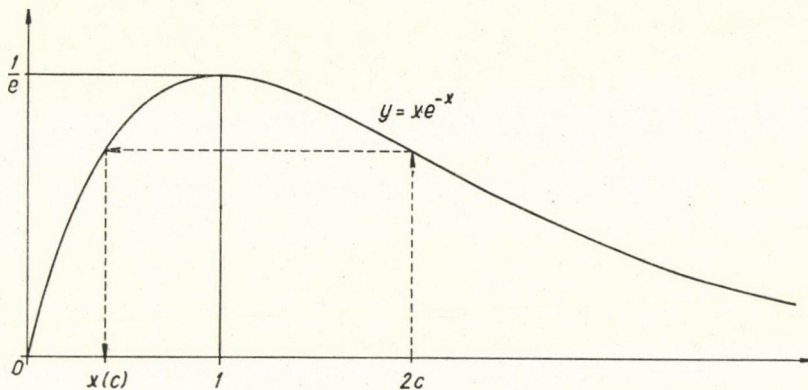


Figure 1b.

Theorem 2b. *If*

$$(2.19) \quad \frac{N(n)}{n^{\frac{k-2}{k-1}}} \rightarrow +\infty$$

but at the same time

$$(2.20) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n) - \frac{1}{2k} n \log n - \frac{k-1}{2k} n \log \log n}{n} = -\infty,$$

then denoting by τ_k the number of disjoint trees of order k contained as subgraphs in $\Gamma_{n,N(n)}$ ($k = 1, 2, \dots$), we have for $-\infty < x < +\infty$

$$(2.21) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)} \left(\frac{\tau_k - M_{n,N(n)}}{\sqrt{M_{n,N(n)}}} < x \right) = \Phi(x)$$

where

$$(2.22) \quad M_{n,N} = n \frac{k^{k-2}}{k!} \left(\frac{2N}{n} \right)^{k-1} e^{-\frac{2kN}{n}}$$

and

$$(2.23) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Proof of Theorem 2b. Note first that the two conditions (2.19) and (2.20) are equivalent to the single condition $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{n,N(n)} = +\infty$, and as $\mathbf{M}(\tau_k) \sim M_{n,N}$ this means that the assertion of Theorem 2b can be expressed by saying that the number of isolated trees of order k is asymptotically normally distributed always if n and N tend to $+\infty$ so, that the average number of such trees is also tending to $+\infty$. Let us consider

$$\mathbf{M}(\tau_k^r) = \mathbf{M} \left(\left(\sum_{S \in T_k^{(n)}} \varepsilon(S) \right)^r \right).$$

Now we have evidently, using (2.16)

$$\mathbf{M}(\tau_k^r) = \left(1 + O \left(\frac{r^2 N}{n^2} \right) \right) \sum_{j=1}^r \left(\sum_{\substack{j \\ \sum_{i=1}^j h_i = r, h_i \geq 1}} \frac{r!}{h_1! h_2! \dots h_j!} \right) \frac{M_{n,N}^j}{j!}$$

where $M_{n,N}$ is defined by (2.22). Now as well known (see [16], p. 176)

$$(2.24) \quad \frac{1}{j!} \sum_{\substack{j \\ \sum_{i=1}^j h_i = r, h_i \geq 1}} \frac{r!}{h_1! h_2! \dots h_j!} = \sigma_r^{(j)}$$

where $\sigma_r^{(j)}$ are the Stirling numbers of the second kind (see e. g. [16], p. 168) defined by

$$(2.25) \quad x^r = \sum_{j=1}^r \sigma_r^{(j)} x(x-1) \dots (x-j+1).$$

Thus we obtain

$$(2.26) \quad \mathbf{M}(\tau_k) = \left(1 + O\left(\frac{r^2 N}{n^2}\right)\right) \cdot \sum_{j=1}^r \sigma_r^{(j)} M_{n,N}^j.$$

Now as well known (see e. g. [16], p. 202)

$$(2.27) \quad e^{\lambda(e^x-1)} - 1 = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{r=j}^{+\infty} \sigma_r^{(j)} \frac{x^r \lambda^j}{r!} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \left(\sum_{j=1}^r \sigma_r^{(j)} \lambda^j \right).$$

Thus it follows that

$$(2.28) \quad \sum_{j=1}^r \sigma_r^{(j)} \lambda^j = \left[\frac{d^r}{dx^r} e^{\lambda(e^x-1)} \right]_{x=0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} k^r.$$

We obtain therefrom

$$(2.29) \quad \mathbf{M} \left(\left(\frac{\tau_k - M_{n,N}}{\sqrt{M_{n,N}}} \right)^r \right) = \left(\frac{1}{M_{n,N}^{1/2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_{n,N}^k}{k!} e^{-M_{n,N}} (k - M_{n,N})^r \right) \left(1 + O\left(\frac{r^2 N}{n^2}\right) \right).$$

Now evidently $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k - \lambda)^r$ is the r -th central moment of the Poisson distribution with mean value λ . It can be however easily verified that the moments of the Poisson distribution appropriately normalized tend to the corresponding moments of the normal distribution, i. e. we have for $r = 1, 2, \dots$

$$(2.30) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^{r/2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (k - \lambda)^r \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

In view of (2.29) this implies the assertion of Theorem 2b.

In the case $N(n) = \frac{1}{2k} n \log n + \frac{k-1}{2k} n \log \log n + yn + o(n)$ when the average number of isolated trees of order k in $\Gamma_{n,N(n)}$ is again finite, the following theorem is valid.

Theorem 2c. Let τ_k denote the number of isolated trees of order k in $\Gamma_{n,N}$ ($k = 1, 2, \dots$). Then if

$$(2.31) \quad N(n) = \frac{1}{2k} n \log n + \frac{k-1}{2k} n \log \log n + yn + o(n)$$

where $-\infty < y < +\infty$, we have

$$(2.32) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(\tau_k = j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \quad (j = 0, 1, \dots)$$

where

$$(2.33) \quad \lambda = \frac{e^{-2ky}}{k \cdot k!}.$$

Proof of Theorem 2c. It is easily seen that under the conditions of Theorem 2c

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{M}_{n, N(n)}(\tau_k) = \lambda.$$

Similarly from (2.16) it follows that for $r = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{S_j \in T_k^{(n)}} \mathbf{M}_{n, N(n)}(\varepsilon(S_1) \varepsilon(S_2) \dots \varepsilon(S_r)) = \frac{\lambda^r}{r!}$$

and the proof of Theorem 2c is completed by the use of our Lemma 1 exactly as in the proof of Theorem 2a.

Note that Theorem 2c generalizes the results of the paper [7], where only the case $k = 1$ is considered.

§ 3. Cycles

Let us consider now the threshold function of cycles of a given order. The situation is described by the following

Theorem 3a. *Suppose that*

$$(3.1) \quad N(n) \sim c n \text{ where } c > 0.$$

Let γ_k denote the number of cycles of order k contained in $\Gamma_{n, N}$ ($k = 3, 4, \dots$). Then we have

$$(3.2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n, N(n)}(\gamma_k = j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \quad (j = 0, 1, \dots)$$

where

$$(3.3) \quad \lambda = \frac{(2c)^k}{2k}.$$

Thus the threshold distribution corresponding to the threshold function $A(n) = n$ for the property that the graph contains a cycle of order k is $1 - e^{-\frac{1}{2k}(2c)^k}$.

It is interesting to compare Theorem 3a with the following two theorems:

Theorem 3b. *Suppose again that (3.1) holds. Let γ_k^* denote the number of isolated cycles of order k contained in $\Gamma_{n, N}$ ($k = 3, 4, \dots$). Then we have*

$$(3.4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n, N(n)}(\gamma_k^* = j) = \frac{\mu^j e^{-\mu}}{j!} \quad (j = 0, 1, \dots)$$

where

$$(3.5) \quad \mu = \frac{(2ce^{-2c})^k}{2k}.$$

Remark. Note that according to Theorem 3b for isolated cycles there does not exist a threshold in the ordinary sense, as $1 - e^{-\mu}$ reaches its maximum $1 - e^{-\frac{1}{2ke^k}}$ for $c = \frac{1}{2}$ (i. e. for $N(n) \sim \frac{n}{2}$) and then again decreases;

thus the probability that $\Gamma_{n,N}$ contains an *isolated* cycle of order k never approaches 1.

Theorem 3c. Let δ_k denote the number of components of $\Gamma_{n,N}$ consisting of $k \geq 3$ points and k edges. If (3.1) holds then we have

$$(3.6) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(\delta_k = j) = \frac{\omega^j e^{-\omega}}{j!} \quad (j = 0, 1, \dots)$$

where

$$(3.7) \quad \omega = \frac{(2c e^{-2c})^k}{2k} \left(1 + k + \frac{k^2}{2!} + \dots + \frac{k^{k-3}}{(k-3)!} \right).$$

Proof of Theorems 3a., 3b. and 3c. As from k given points one can form $\frac{1}{2}(k-1)!$ cycles of order k we have evidently for fixed k and for $N = O(n)$

$$(3.8) \quad \mathbf{M}(\gamma_k) = \frac{1}{2} \binom{n}{k} (k-1)! \frac{\binom{\binom{n}{2} - k}{N-k}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} \sim \frac{\left(\frac{2N}{n}\right)^k}{2k}$$

while

$$(3.9) \quad \mathbf{M}(\gamma_k^*) = \frac{1}{2} \binom{n}{k} (k-1)! \frac{\binom{\binom{n-k}{2}}{N-k}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} \sim \frac{\left(\frac{2N}{n} e^{-\frac{2N}{n}}\right)^k}{2k}.$$

As regards Theorem 3c it is known (see [10] and [15]) that the number of connected graphs $G_{k,k}$ (i. e. the number of connected graphs consisting of k labelled vertices and k edges) is exactly

$$(3.10) \quad \Theta_k = \frac{1}{2} (k-1)! \left(1 + k + \frac{k^2}{2} + \dots + \frac{k^{k-3}}{(k-3)!} \right).$$

Now we have clearly

$$(3.11) \quad \mathbf{M}(\delta_k) = \binom{n}{k} \Theta_k \frac{\binom{\binom{n-k}{2}}{N-k}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} \sim \frac{\left(\frac{2N}{n} e^{-\frac{2N}{n}}\right)^k}{2k} \left(1 + k + \frac{k^2}{2!} + \dots + \frac{k^{k-3}}{(k-3)!} \right).$$

For large values of k we have (see [15])

$$(3.12) \quad \Theta_k \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} k^{k-1/2}$$

and thus

$$(3.13) \quad \mathbf{M}(\delta_k) \sim \frac{\left(\frac{2N}{n} e^{1-\frac{2N}{n}}\right)^k}{4k}.$$

For $N \sim \frac{n}{2}$ we obtain by some elementary computation using (7) that for large values of k (such that $k = o(n^{3/4})$).

$$(3.14) \quad \mathbf{M}(\delta_k) \sim \frac{e^{-\frac{k^3}{n^2}}}{4k}.$$

Using (3.8), (3.9) and (3.11) the proofs of Theorems 3a, 3b and 3c follow the same lines as that of Theorem 2a, using Lemma 1. The details may be left to the reader.

Similar results can be proved for other types of subgraphs, e. g. complete subgraphs of a given order. As however these results and their proofs have the same pattern as those given above we do not dwell on the subject any longer and pass to investigate *global properties of the random graph* $\Gamma_{n,N}$.

§ 4. The total number of points belonging to trees

We begin by proving

Theorem 4a. *If $N = o(n)$ the graph $\Gamma_{n,N}$ is, with probability tending to 1 for $n \rightarrow +\infty$, the union of disjoint trees.*

Proof of Theorem 4a. A graph consists of disjoint trees if and only if there are no cycles in the graph. The number of graphs $G_{n,N}$ which contain at least one cycle can be enumerated as was shown in § 1 for each value k of the length of this cycle. In this way, denoting by T the property that the graph is a union of disjoint trees, and by \bar{T} the opposite of this property, i. e. that the graph contains at least one cycle, we have

$$(4.1) \quad \mathbf{P}_{n,N}(\bar{T}) \leq \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} (k-1)! \frac{\binom{\binom{n}{2} - k}{N-k}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} = O\left(\frac{N}{n}\right).$$

It follows that if $N = o(n)$ we have $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n,N}(T) = 1$ which proves Theorem 4a.

If N is of the same order of magnitude as n i. e. $N \sim cn$ with $c > 0$, then the assertion of Theorem 4a is no longer true. Nevertheless if $c < 1/2$,

still almost all points (in fact $n - O(1)$ points) of $\Gamma_{n,N}$ belong to isolated trees. There is however a surprisingly abrupt change in the structure of $\Gamma_{n,N}$ with $N \sim cn$ when c surpasses the value $\frac{1}{2}$. If $c > 1/2$ in the average only a positive fraction of all points of $\Gamma_{n,N}$ belong to isolated trees, and the value of this fraction tends to 0 for $c \rightarrow +\infty$.

Thus we shall prove

Theorem 4b. *Let $V_{n,N}$ denote the number of those points of $\Gamma_{n,N}$ which belong to an isolated tree contained in $\Gamma_{n,N}$. Let us suppose that*

$$(4.2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n)}{n} = c > 0.$$

Then we have

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{M}(V_{n,N(n)})}{n} = \begin{cases} 1 & \text{for } c \leq 1/2 \\ \frac{x(c)}{2c} & \text{for } c > \frac{1}{2} \end{cases}$$

where $x = x(c)$ is the only root satisfying $0 < x < 1$ of the equation

$$(4.4) \quad x e^{-x} = 2c e^{-2c},$$

which can also be obtained as the sum of a series as follows:

$$(4.5) \quad x(c) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} (2c e^{-2c})^k.$$

Proof of Theorem 4b. We shall need the well known fact that the inverse function of the function

$$(4.6) \quad y = x e^{-x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

has the power series expansion, convergent for $0 \leq y \leq \frac{1}{e}$

$$(4.7) \quad x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1} y^k}{k!}.$$

Let τ_k denote the number of isolated trees of order k contained in $\Gamma_{n,N}$. Then clearly

$$(4.8) \quad V_{n,N} = \sum_{k=1}^n k \tau_k$$

and thus

$$(4.9) \quad \mathbf{M}(V_{n,N}) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{M}(\tau_k).$$

By (2.18), if (4.2) holds, we have

$$(4.10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbf{M}(\tau_k) = \frac{1}{2c} \frac{k^{k-2}}{k!} (2c e^{-2c})^k.$$

Thus we obtain from (4.10) that for $c \leq 1/2$

$$(4.11) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{M}(V_{n,N(n)})}{n} \geq \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^s \frac{k^{k-1} (2c e^{-2c})^k}{k!} \text{ for any } s \geq 1.$$

As (4.11) holds for any $s \geq 1$ we obtain

$$(4.12) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{M}(V_{n,N(n)})}{n} \geq \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1} (2c e^{-2c})^k}{k!}.$$

But according to (4.7) for $c \leq 1/2$ we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1} (2c e^{-2c})^k}{k!} = 2c.$$

Thus it follows from (4.12) that for $c \leq 1/2$

$$(4.13) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{M}(V_{n,N(n)})}{n} \geq 1.$$

As however $V_{n,N(n)} \leq n$ and thus $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{M(V_{n,N(n)})}{n} \leq 1$ it follows that if (4.2) holds and $c \leq 1/2$ we have

$$(4.14) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{M}(V_{n,N(n)})}{n} = 1.$$

Now let us consider the case $c > \frac{1}{2}$. It follows from (2.18) that if (4.2) holds with $c > 1/2$ we obtain

$$(4.15) \quad \mathbf{M}(V_{n,N(n)}) = \frac{n^2}{2N} \sum_{k=1}^n \frac{k^{k-1}}{k!} \left(\frac{2N(n)}{n} e^{-\frac{2N(n)}{n}} \right)^k + O(1)$$

where the bound of the term $O(1)$ depends only on c . As however for $N(n) \sim nc$ with $c > 1/2$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} \left(\frac{2N(n)}{n} e^{-\frac{2N(n)}{n}} \right)^k = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

it follows that

$$(4.16) \quad \mathbf{M}(V_{n,N(n)}) = \frac{n^2}{2N(n)} x \left(\frac{N(n)}{n} \right) + O(1)$$

where $x = x\left(\frac{N(n)}{n}\right)$ is the only solution with $0 < x < 1$ of the equation $xe^{-x} = \frac{2N(n)}{n} e^{-\frac{2N(n)}{n}}$. Thus it follows that if (4.2) holds with $c > 1/2$ we have

$$(4.17) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{M}(V_{n,N(n)})}{n} = \frac{x(c)}{2c}$$

where $x(c)$ is defined by (4.5).

The graph of the function $x(c)$ is shown on Fig. 1a; its meaning is shown by Fig. 1b. The function

$$y = \begin{cases} 1 & \text{for } c \leq 1/2 \\ \frac{x(c)}{2c} & \text{for } c > 1/2 \end{cases}$$

is shown on Fig. 2a.

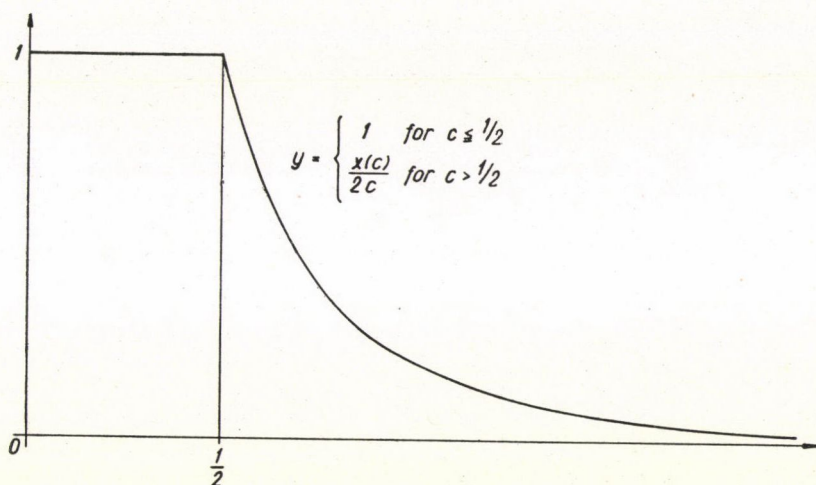


Figure 2a.

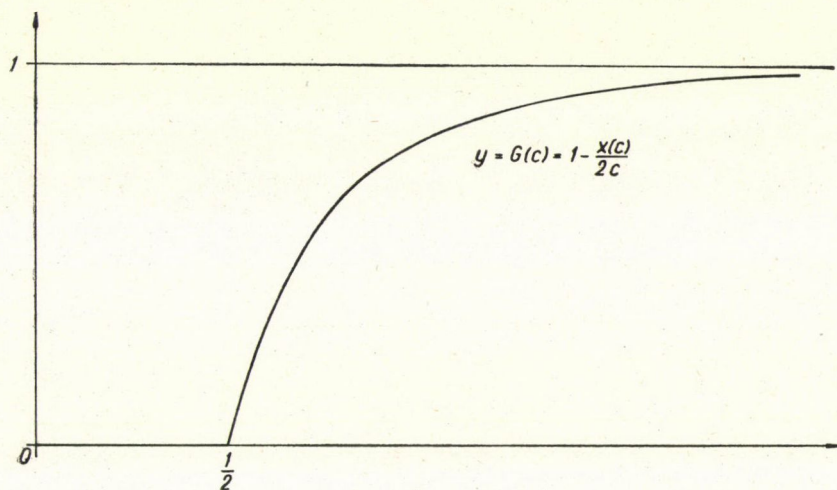


Figure 2b.

Thus the proof of Theorem 4b is complete. Let us remark that in the same way as we obtained (4.16) we get that if (4.2) holds with $c < 1/2$ we have

$$(4.18) \quad \mathbf{M}(V_{n,N(n)}) = n - O(1)$$

where the bound of the $O(1)$ term depends only on c . (However (4.18) is not true for $c = \frac{1}{2}$ as will be shown below.)

It follows by the well known inequality of Markov

$$(4.19) \quad \mathbf{P}(\xi > a) \leq \frac{1}{a} \mathbf{M}(\xi)$$

valid for any nonnegative random variable ξ and any $a > \mathbf{M}(\xi)$, that the following theorem holds:

Theorem 4c. *Let $V_{n,N}$ denote the number of those points of $\Gamma_{n,N}$ which belong to isolated trees contained in $\Gamma_{n,N}$. Then if ω_n tends arbitrarily slowly to $+\infty$ for $n \rightarrow +\infty$ and if (4.2) holds with $c < 1/2$ we have*

$$(4.20) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(V_{n,N(n)} \geq n - \omega_n) = 1.$$

The case $c > 1/2$ is somewhat more involved. We prove

Theorem 4d. *Let $V_{n,N}$ denote the number of those points of $\Gamma_{n,N}$ which belong to an isolated tree contained in $\Gamma_{n,N}$. Let us suppose that (4.2) holds with $c > 1/2$. It follows that if ω_n tends arbitrarily slowly to $+\infty$, we have*

$$(4.21) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| V_{n,N(n)} - \frac{n^2}{2N(n)} x \left(\frac{N(n)}{n} \right) \right| > \sqrt{n} \omega_n \right) = 0$$

where $x = x \left(\frac{N(n)}{n} \right)$ is the only solution with $0 < x < 1$ of the equation

$$xe^{-x} = \frac{2N(n)}{n} e^{-\frac{2N(n)}{n}}.$$

Proof. We have clearly, as the series $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} (2ce^{-2c})^k$ is convergent,

$\mathbf{D}^2(V_{n,N(n)}) = O(n)$. Thus (4.21) follows by the inequality of Chebyshev.

Remark. It follows from (4.21) that we have for any $c > 1/2$ and any $\varepsilon > 0$

$$(4.22) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{V_{n,N(n)}}{n} - \frac{x(c)}{2c} \right| < \varepsilon \right) = 1$$

where $x(c)$ is defined by (4.5).

As regards the case $c = 1/2$ we formulate the theorem which will be needed latter.

Theorem 4e. Let $V_{n,N}(r)$ denote the number of those points of $\Gamma_{n,N}$ which belong to isolated trees of order $\geq r$ and $\tau_{n,N}(r)$ the number of isolated trees of order $\geq r$ contained in $\Gamma_{n,N}$. If $N(n) \sim \frac{n}{2}$ we have for any $\delta > 0$

$$(4.23) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{V_{n,N(n)}(r)}{n} - \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} e^{-k} \right| < \delta \right) = 1$$

and

$$(4.24) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{\tau_{n,N(n)}(r)}{n} - \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{k^{k-2}}{k!} e^{-k} \right| < \delta \right) = 1.$$

The proof follows the same lines as those of the preceding theorems.

§ 5. The total number of points belonging to cycles

Let us determine first the average number of all cycles in $\Gamma_{n,N}$. We prove that this number remains bounded if $N(n) \sim cn$ and $c < 1/2$ but not if $c = 1/2$.

Theorem 5a. Let $H_{n,N}$ denote the number of all cycles contained in $\Gamma_{n,N}$. Then we have if $N(n) \sim cn$ holds with $c < \frac{1}{2}$

$$(5.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{M}(H_{n,N(n)}) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-2c} - c - c^2$$

while we have for $c = \frac{1}{2}$

$$(5.2) \quad \mathbf{M}(H_{n,N(n)}) \sim \frac{1}{4} \log n.$$

Proof. Clearly if γ_k is the number of all cycles of order k contained in $\Gamma_{n,N}$ we have

$$H_{n,N} = \sum_{k=1}^n \gamma_k.$$

Now (5.1) follows easily, taking into account that (see (3.8))

$$(5.3) \quad \mathbf{M}(\gamma_k) = \frac{1}{2} \binom{n}{k} (k-1)! \frac{\binom{\binom{n}{2} - k}{N-k}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} = \frac{\left(\frac{2N}{n}\right)^k}{2k} \left(1 + O\left(\frac{k^2}{n}\right)\right).$$

If $c = 1/2$ we have by (3.8)

$$(5.4) \quad \mathbf{M}(\gamma_k) \sim \frac{1}{2k} e^{-\frac{3k^2}{2n}}.$$

As $\sum_{k=3}^n \frac{1}{2k} e^{-\frac{3k^2}{2n}} \sim \frac{1}{4} \log n$, it follows that (5.2) holds. Thus Theorem 5a is proved.

Let us remark that it follows from (5.2) that (4.18) is not true for $c = 1/2$.

Similarly as before we can prove corresponding results concerning the random variable $H_{n,N}$ itself.

We have for instance in the case $c = 1/2$ for any $\varepsilon > 0$

$$(5.5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{H_{n,N(n)}}{\log n} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

This can be proved by the same method as used above: estimating the variance and using the inequality of Chebyshev.

An other related result, throwing more light on the appearance of cycles in $\Gamma_{n,N}$ runs as follows.

Theorem 5b. *Let K denote the property that a graph contains at least one cycle. Then we have if $N(n) \sim nc$ holds with $c \leq 1/2$*

$$(5.6) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(K) = 1 - \sqrt{1 - 2c} e^{c+c^2}.$$

Thus for $c = \frac{1}{2}$ it is „almost sure” that $\Gamma_{n,N(n)}$ contains at least one cycle, while

for $c < \frac{1}{2}$ the limit for $n \rightarrow +\infty$ of the probability of this is less than 1.

Proof. Let us suppose first $c < \frac{1}{2}$. By an obvious sieve (taking into

account that according to Theorem 1 the probability that there will be in $\Gamma_{n,N(n)}$ with $N(n) \sim nc$ ($c < 1/2$) two circles having a point in common is negligibly small) we obtain

$$(5.7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(\overline{K}) = e^{-\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{M}(H_{n,N(n)})} = \sqrt{1 - 2c} e^{c+c^2}.$$

Thus (5.6) follows for $c < 1/2$. As for $c \rightarrow 1/2$ the function on the right of (5.6) tends to 1, it follows that (5.6) holds for $c = 1/2$ too. The function $y = 1 - \sqrt{1 - 2c} e^{c+c^2}$ is shown on Fig. 3.

We prove now the following

Theorem 5c. *Let $H_{n,N}^*$ denote the total number of points of $\Gamma_{n,N}$ which belong to some cycle. Then we have for $N = N(n) \sim cn$ with $0 < c < 1/2$*

$$(5.8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{M}(H_{n,N(n)}^*) = \frac{4c^3}{1 - 2c}.$$

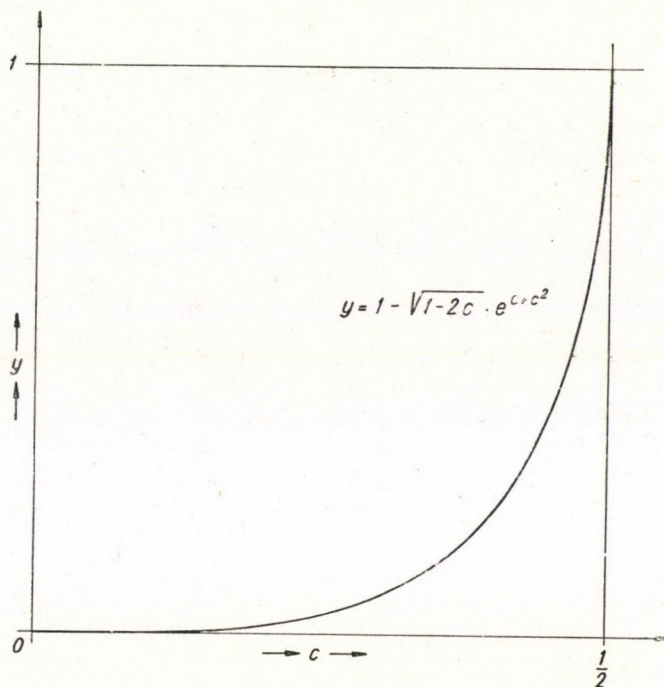


Figure 3.

Proof of Theorem 5c. As according to Theorem 1 the probability that two cycles should have a point in common is negligibly small, we have by (5.3)

$$\mathbf{M}(H_{n,N(n)}^*) \sim \sum_{k=1}^n k \gamma_k \sim \frac{(2c)^3}{2(1-2c)} = \frac{4c^3}{1-2c}.$$

The size of that part of $\Gamma_{n,N}$ which does not consist of trees is still more clearly shown by the following

Theorem 5d. Let $\vartheta_{n,N}$ denote the number of those points of $\Gamma_{n,N}$ which belong to components containing exactly one cycle. Then we have for $N = N(n) \sim cn$ in case $c \neq 1/2$

$$(5.9) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{M}(\vartheta_{n,N(n)}) = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{+\infty} (2ce^{-2c})^k \left(1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \dots + \frac{k^{k-3}}{(k-3)!} \right)$$

while for $c = 1/2$ we have

$$(5.10) \quad \mathbf{M}(\vartheta_{n,N(n)}) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{12} n^{2/3}$$

where $\Gamma(x)$ denotes the gamma-function $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ for $x > 0$.

Proof of Theorem 5d. (5.9) follows immediately from (3.11); for $c = 1/2$ we have by (3.14)

$$\mathbf{M}(\vartheta_{n,N(n)}) \sim \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n e^{-\frac{k^2}{n^2}} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{12} n^{2/3}.$$

Remark. Note that for $c \rightarrow 1/2$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} (2ce^{-2c})^k \left(1 + \frac{k}{1!} + \dots + \frac{k^{k-3}}{(k-3)!}\right) \sim \frac{1}{4(1-2c)^2}.$$

Thus the average number of points belonging to components containing exactly one cycle tends to $+\infty$ as $\frac{1}{4(1-2c)^2}$ for $c \rightarrow 1/2$.

We now prove

Theorem 5e. For $N(n) \sim cn$ with $0 < c < 1/2$ all components of $\Gamma_{n,N(n)}$ are with probability tending to 1 for $n \rightarrow +\infty$, either trees or components containing exactly one cycle.

Proof. Let $\psi_{n,N}$ denote the number of points of $\Gamma_{n,N}$ belonging to components which contain more edges than vertices and the number of vertices of which is less than $\sqrt{\log n}$. We have clearly for $N(n) \sim cn$ with $c < 1/2$

$$\mathbf{M}(\psi_{n,N(n)}) \leq \sum_{k=4}^{\lfloor \sqrt{\log n} \rfloor} k \binom{n}{k} 2^{\binom{k}{2}} \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} = O\left(n^{\frac{\log 2}{2} - 1}\right).$$

Thus

$$\mathbf{P}(\psi_{n,N(n)} \geq 1) = O\left(\frac{1}{n^{1 - \frac{\log 2}{2}}}\right).$$

On the other hand by Theorem 4c the probability that a component consisting of more than $\sqrt{\log n}$ points should not be a tree tends to 0. Thus the assertion of Theorem 5e follows.

§ 6. The number of components

Let us turn now to the investigation of the average number of components of $\Gamma_{n,N}$. It will be seen that the above discussion contains a fairly complete solution of this question. We prove the following

Theorem 6. If $\zeta_{n,N}$ denotes the number of components of $\Gamma_{n,N}$ then we have if $N(n) \sim cn$ holds with $0 < c < \frac{1}{2}$

$$(6.1) \quad \mathbf{M}(\zeta_{n,N(n)}) = n - N(n) + O(1)$$

where the bound of the O -term depends only on c . If $N(n) \sim \frac{n}{2}$ we have

$$(6.2) \quad \mathbf{M}(\zeta_{n,N(n)}) = n - N(n) + O(\log n).$$

If $N(n) \sim cn$ holds with $c > \frac{1}{2}$ we have

$$(6.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{M}(\zeta_{n,N(n)})}{n} = \frac{1}{2c} \left(x(c) - \frac{x^2(c)}{2} \right)$$

where $x = x(c)$ is the only solution satisfying $0 < x < 1$ of the equation $xe^{-x} = 2ce^{-2c}$, i. e.

$$(6.4) \quad x(c) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} (2ce^{-2c})^k.$$

Proof of Theorem 6. Let us consider first the case $c < \frac{1}{2}$. Clearly if we

add a new edge to a graph, then either this edge connects two points belonging to different components, in which case the number of components is decreased by 1, or it connects two points belonging to the same component in which case the number of components does not change but at least one new cycle is created. Thus²

$$(6.5) \quad \zeta_{n,N} - (n - N) \leq H_{n,N}$$

where $H_{n,N}$ is the total number of cycles in $\Gamma_{n,N}$. Thus by Theorem 5a it follows that (6.1) holds.

Similarly (6.2) follows also from Theorem 5a. Now we consider the case $c > \frac{1}{2}$.

It is easy to see that for $0 \leq y \leq \frac{1}{e}$ we have (see e. g. [14])

$$(6.6) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-2} y^k}{k!} = x - \frac{x^2}{2}$$

where

$$(6.7) \quad x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1} y^k}{k!}$$

² In fact according to a well known theorem of the theory of graphs (see [4], p. 29) being a generalization of Euler's theorem on polyhedra we have $N - n + \zeta_{n,N} = \kappa_{n,N}^*$, where $\kappa_{n,N}^*$ — the „cyclomatic number“ of the graph $\Gamma_{n,N}$ — is equal to the maximal number of independent cycles, in $\Gamma_{n,N}$ (For a definition of independent cycles see [4] p. 28).

x can be characterized also as the only solution satisfying $0 < x \leq 1$ of the equation $xe^{-x} = y$.

It follows that if $N(n) \sim nc$ holds with $c < 1/2$ we have

$$(6.8) \quad \mathbf{M}(\zeta_{n,N(n)}) = \frac{n^2}{2N(n)} \left(\frac{2N(n)}{n} - \frac{4N^2(n)}{2n^2} \right) + O(1) = n - N(n) + O(1)$$

which leads to a second proof of the first part of Theorem 6.

To prove the second part, let us remark first that the number of components of order greater than A is clearly $\leq \frac{n}{A}$. Thus if $\zeta_{n,N}(A)$ denotes the number of components of order $\leq A$ of $\Gamma_{n,N}$ we have clearly

$$(6.9) \quad \mathbf{M}(\zeta_{n,N}) = \mathbf{M}(\zeta_{n,N}(A)) + O\left(\frac{n}{A}\right).$$

The average number of components of fixed order k which contain at least k edges will be clearly according to Theorem 1 of order $\left(\frac{N}{n}\right)^k$, i. e. bounded for each fixed value of k . As A can be chosen arbitrarily large we obtain from (6.9) that

$$(6.10) \quad \mathbf{M}(\zeta_{n,N}) \sim \sum_{k=1}^n \mathbf{M}(\tau_k).$$

According to (2.18) it follows that

$$(6.11) \quad \mathbf{M}(\zeta_{n,N}) \sim \frac{n^2}{2N} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k-2}}{k!} \left(\frac{2N}{n} e^{-\frac{2N}{n}} \right)^k$$

and thus, according to (6.6) if $N(n) \sim cn$ holds with $c > 1/2$ we have

$$(6.12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{M}(\zeta_{n,N(n)})}{n} = \frac{1}{2c} \left(x(c) - \frac{x^2(c)}{2} \right)$$

where $x(c)$ is defined by (6.4). Thus Theorem 6 is completely proved.

Let us add some remarks. Theorem 6 illustrates also the fundamental change in the structure of $\Gamma_{n,N}$ which takes place if N passes $\frac{n}{2}$. While the average number of components of $\Gamma_{n,N}$ (as a function of N with n fixed) decreases linearly if $N \leq \frac{n}{2}$ this is no longer true for $N > \frac{n}{2}$; the average number of components decreases from this point onward more and more slowly. The graph of

$$(6.13) \quad z(c) = \lim_{\frac{N(n)}{n} \rightarrow c} \frac{\mathbf{M}(\zeta_{n,N(n)})}{n} = \begin{cases} 1 - c & \text{for } 0 \leq c \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2c} \left(x(c) - \frac{x^2(c)}{2} \right) & \text{for } c > 1/2 \end{cases}$$

as a function of c is shown by Fig. 4.

From Theorem 6 one can deduce easily that in case $N(n) \sim cn$ with $c < 1/2$ we have for any sequence ω_n tending arbitrarily slowly to infinity

$$(6.14) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|\zeta_{n,N(n)} - n + N(n)| < \omega_n) = 1$$

(6.14) follows easily by remarking that clearly $\zeta_{n,N} \geq n - N$.

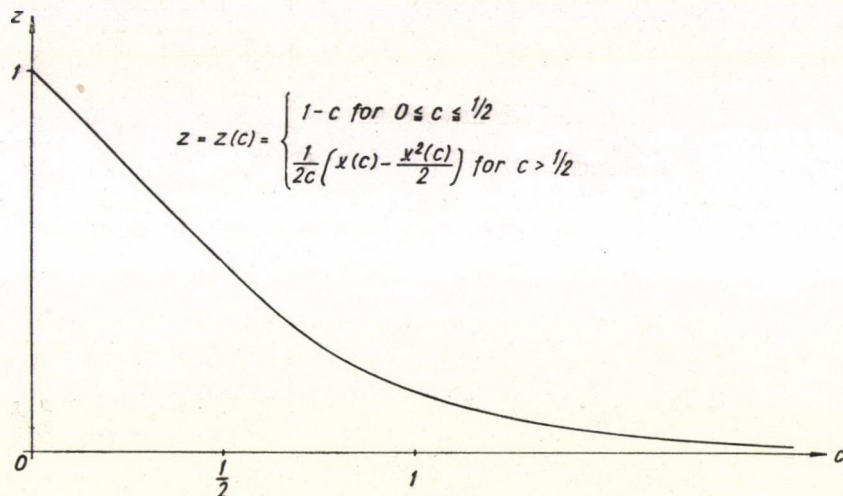


Figure 4.

For the case $N(n) \sim cn$ with $c \geq 1/2$ one obtains by estimating the variance of $\zeta_{n,N(n)}$ and using the inequality of Chebyshev that for any $\varepsilon > 0$

$$(6.15) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\zeta_{n,N(n)}}{n} - \frac{1}{2c}\left(x(c) - \frac{x^2(c)}{2}\right)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

The proof is similar to that of (4.21) and therefore we do not go into details.

§ 7. The size of the greatest tree

If $N \sim cn$ with $c < 1/2$ then as we have seen in § 6 all but a finite number of points of $\Gamma_{n,N}$ belong to components which are trees. Thus in this case the problem of determining the size of the largest component of $\Gamma_{n,N}$ reduces to the easier question of determining the greatest tree in $\Gamma_{n,N}$. This question is answered by the following.

Theorem 7a. Let $\Delta_{n,N}$ denote the number of points of the greatest tree which is a component of $\Gamma_{n,N}$. Suppose $N = N(n) \sim cn$ with $c \neq 1/2$. Let ω_n be a sequence

tending arbitrarily slowly to $+\infty$. Then we have

$$(7.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\Delta_{n, N(n)} \geq \frac{1}{\alpha} \left(\log n - \frac{5}{2} \log \log n \right) + \omega_n \right) = 0$$

and

$$(7.2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\Delta_{n, N(n)} \geq \frac{1}{\alpha} \left(\log n - \frac{5}{2} \log \log n \right) - \omega_n \right) = 1$$

where

$$(7.3) \quad e^{-\alpha} = 2ce^{1-2c} \quad (\text{i. e. } \alpha = 2c - 1 - \log 2c)$$

and thus $\alpha > 0$.)

Proof of Theorem 7a. We have clearly

$$(7.4) \quad \mathbf{P}(\Delta_{n, N(n)} \geq z) = \mathbf{P} \left(\sum_{k \geq z} \tau_k \geq 1 \right) \leq \sum_{k \geq z} \mathbf{M}(\tau_k)$$

and thus by (2.18)

$$(7.5) \quad \mathbf{P}(\Delta_{n, N(n)} \geq z) = O \left(\frac{ne^{-\alpha z}}{z^{5/2}} \right).$$

It follows that if $z_1 = \frac{1}{\alpha} \left(\log n - \frac{5}{2} \log \log n \right) + \omega_n$

we have

$$(7.6) \quad \mathbf{P}(\Delta_{n, N(n)} \geq z_1) = O(e^{-\alpha \omega_n}).$$

This proves (7.1). To prove (7.2) we have to estimate the mean and variance of τ_{z_2} where $z_2 = \frac{1}{\alpha} \left(\log n - \frac{5}{2} \log \log n \right) - \omega_n$. We have by (2.18)

$$(7.7) \quad \mathbf{M}(\tau_{z_2}) \sim \frac{\alpha^{5/2}}{2c\sqrt{2\pi}} e^{\alpha \omega_n}$$

and

$$(7.8) \quad \mathbf{D}^2(\tau_{z_2}) = O(\mathbf{M}(\tau_{z_2})).$$

Clearly

$$\mathbf{P}(\Delta_{n, N(n)} \geq z_2) \geq \mathbf{P}(\tau_{z_2} \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(\tau_{z_2} = 0)$$

and it follows from (7.7) and (7.8) by the inequality of Chebyshev that

$$(7.9) \quad \mathbf{P}(\tau_{z_2} = 0) = O(e^{-\alpha \omega_n}).$$

Thus we obtain

$$(7.10) \quad \mathbf{P}(\Delta_{n, N(n)} \geq z_2) \geq 1 - O(e^{-\alpha \omega_n}).$$

Thus (7.2) is also proved.

Remark. If $c < \frac{1}{2}$ the greatest tree which is a component of $\Gamma_{n, N}$ with $N \sim cn$ is — as mentioned above — at the same time the greatest component

of $\Gamma_{n,N}$, as $\Gamma_{n,N}$ contains with probability tending to 1 besides trees only components containing a single circle and being of moderate size. This follows evidently from Theorem 4c. As will be seen in what follows (see § 9) for $c > \frac{1}{2}$ the situation is completely different, as in this case $\Gamma_{n,N}$ contains a very large component (in fact of size $G(c)n$ with $G(c) > 0$) which is not a tree. Note that if we put $c = \frac{1}{2k} \log n$ we have $\alpha = \frac{1}{k} \log n$ and $\frac{1}{\alpha} \log n \sim k$ in conformity with Theorem 2c.

We can prove also the following

Theorem 7b. *If $N \sim cn$, where $c \neq \frac{1}{2}$ and $e^{-\alpha} = 2ce^{1-2c}$ then the number of isolated trees of order $h = \frac{1}{\alpha} \left(\log n - \frac{5}{2} \log \log n \right) + l$ resp. of order $\geq h$ (where l is an arbitrary real number such that h is a positive integer) contained in $\Gamma_{n,N}$ has for large n approximately a Poisson distribution with the mean value $\lambda = \frac{\alpha^{5/2} e^{-\alpha l}}{2c \sqrt{2\pi}}$ resp. $\mu = \frac{\alpha^{5/2} e^{-\alpha l}}{2c \sqrt{2\pi} (1 - e^{-\alpha})}$.*

Corollary. The probability that $\Gamma_{n,N(n)}$ with $N(n) \sim nc$ where $c \neq \frac{1}{2}$ does not contain a tree of order $\geq \frac{1}{\alpha} \left(\log n - \frac{5}{2} \log \log n \right) + l$ tends to $\exp \left(- \frac{\alpha^{5/2} e^{-\alpha l}}{2c \sqrt{2\pi} (1 - e^{-\alpha})} \right)$ for $n \rightarrow +\infty$, where $\alpha = 2c - 1 - \log 2c$.

The size of the greatest tree which is a component of $\Gamma_{n,N}$ is fairly large if $N \sim \frac{n}{2}$. This could be guessed from the fact that the constant factor in the expression $\frac{1}{\alpha} \left(\log n - \frac{5}{2} \log \log n \right)$ of the „probable size” of the greatest component of $\Gamma_{n,N}$ figuring in Theorem 7a becomes infinitely large if $c = \frac{1}{2}$.

For the size of the greatest tree in $\Gamma_{n,N}$ with $N \sim \frac{n}{2}$ the following result is valid:

Theorem 7c. *If $N \sim \frac{n}{2}$ and $\Delta_{n,N}$ denotes again the number of points of the greatest tree contained in $\Gamma_{n,N}$, we have for any sequence ω_n tending to $+\infty$ for $n \rightarrow +\infty$*

$$(7.11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\Delta_{n,N} \geq n^{2/3} \omega_n) = 0$$

and

$$(7.12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\Delta_{n,N} \geq \frac{n^{2/3}}{\omega_n} \right) = 1.$$

Proof of Theorem 7c. We have by some simple computation using (7)

$$(7.13) \quad \mathbf{M}(\tau_k) = \frac{\binom{n}{k} k^{k-2} \binom{n-k}{2}}{\binom{n}{N-k+1}} \sim \frac{n k^{k-2} e^{-k}}{k!} e^{-\frac{k^3}{6n^2}}.$$

Thus it follows that

$$(7.14) \quad \mathbf{P}(\Delta_{n,N} \geq n^{2/3} \omega_n) \leq \sum_{k \geq n^{2/3} \omega_n} \mathbf{M}(\tau_k) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_n}}\right)$$

which proves (7.11).

On the other hand, considering the mean and variance of $\tau^* = \sum_{k \geq \frac{n^{2/3}}{\omega_n}} \tau_k$,

it follows that

$$\mathbf{M}(\tau^*) \geq A \omega_n^{3/2} \text{ where } A > 0 \text{ and } \mathbf{D}^2(\tau^*) = O(\omega_n^{3/2})$$

and (7.12) follows by using again the inequality of Chebyshev. Thus Theorem 7c is proved.

The following theorem can be proved by developing further the above argument and using Lemma 1.

Theorem 7d. Let $\tau(\mu)$ denote the number of trees of order $\geq \mu n^{2/3}$ contained in $\Gamma_{n,N(n)}$ where $0 < \mu < +\infty$ and $N(n) \sim \frac{n}{2}$. Then we have

$$(7.15) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(\tau(\mu) = j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \quad (j = 0, 1, \dots)$$

where

$$(7.16) \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{12} \pi} \int_{\frac{1}{6} \mu^3}^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x^{3/2}}.$$

§ 8. When is $\Gamma_{n,N}$ a planar graph?

We have seen that the threshold for a subgraph containing k points and $k+d$ edges is $n^{2-\frac{k}{k+d}}$; thus if $N \sim cn$ the probability of the presence of a subgraph having k points and $k+d$ edges in $\Gamma_{n,N}$ tends to 0 for $n \rightarrow +\infty$, for each particular pair of numbers $k \geq 4$, $d \geq 1$. This however does not imply that the probability of the presence of a graph of arbitrary order having more edges than vertices in $\Gamma_{n,N}$ with $N \sim nc$ tends also to 0 for $n \rightarrow +\infty$. In fact this is not true for $c \geq 1/2$ as is shown by the following

Theorem 8a. Let $\chi_{n,N}(d)$ denote the number of cycles of $G_{n,N}$ of arbitrary order which are such that exactly d diagonals of the cycle belong also to $\Gamma_{n,N}$. Then if $N(n) = \frac{n + \lambda\sqrt{n}}{2} + o(\sqrt{n})$ where $-\infty < \lambda < +\infty$, we have

$$(8.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\chi_{n,N(n)}(d) = j) = \frac{\varrho^j e^{-\varrho}}{j!} \quad (j = 0, 1, \dots)$$

where

$$(8.2) \quad \varrho = \frac{1}{2 \cdot 6^d \cdot d!} \int_0^{+\infty} y^{2d-1} e^{\frac{\lambda y}{\sqrt{3}}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Proof of Theorem 8a. We have clearly as the number of diagonals of a k -gon is equal to $\frac{k(k-3)}{2}$

$$(8.3) \quad \mathbf{M}(\chi_{n,N}(d)) = \sum_{k=4}^n \frac{1}{2} \binom{n}{k} (k-1)! \binom{\frac{k(k-3)}{2}}{d} \frac{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}{\binom{n}{N-k-d}} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{N}}$$

and thus if $N(n) = \frac{n + \lambda\sqrt{n}}{2} + o(\sqrt{n})$

$$(8.4) \quad \mathbf{M}(\chi_{n,N(n)}(d)) \sim \frac{1}{2^{d+1} \cdot d!} \sum_{k=4}^n k^{2d-1} \left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)^k e^{-\frac{3k^2}{2n}}.$$

It follows from (8.4) that

$$(8.5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{M}(\chi_{n,N(n)}(d)) = \frac{1}{2 \cdot 6^d d!} \int_0^{\infty} y^{2d-1} e^{\frac{\lambda y}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

The proof can be finished by the same method as used in proving Theorem 2a.

Remark. Note that Theorem 8a implies that if $N(n) = \frac{n}{2} + \omega_n \sqrt{n}$ with $\omega_n \rightarrow +\infty$ then the probability that $\Gamma_{n,N(n)}$ contains cycles with any prescribed number of diagonals tends to 1, while if $N(n) = \frac{n}{2} - \omega_n \sqrt{n}$ the same probability tends to 0. This shows again the fundamental difference in the structure of $\Gamma_{n,N}$ between the cases $N < \frac{n}{2}$ and $N > \frac{n}{2}$. This difference can be expressed also in the form of the following

Theorem 8b. Let us suppose that $N(n) \sim nc$. If $c < \frac{1}{2}$ the probability

that the graph $\Gamma_{n,N(n)}$ is planar is tending to 1 while for $c > \frac{1}{2}$ this probability tends to 0.

Proof of Theorem 8b. As well known trees and connected graphs containing exactly one cycle are planar. Thus the first part of Theorem 8b follows from Theorem 5e. On the other hand if a graph contains a cycle with 3 diagonals such that if these diagonals connect the pairs of points (P_i, P'_i) ($i = 1, 2, 3$) the cyclic order of these points in the cycle is such that each pair (P_i, P'_i) dissects the cycle into two paths which both contain two of the other points then the graph is not planar. Now it is easy to see that among the $\binom{k(k-3)}{2}$ triples of 3 diameters of a given cycle of order k there are at least $\binom{k}{6}$ triples which have the mentioned property and thus for large values of k approximately one out of 15 choices of the 3 diagonals will have the mentioned property. It follows that if $N(n) = \frac{n}{2} + \omega_n \sqrt{n}$ with $\omega_n \rightarrow +\infty$, the probability that $\Gamma_{n,N(n)}$ is not planar tends to 1 for $n \rightarrow +\infty$. This proves Theorem 8b. We can show that for $N(n) = \frac{n}{2} + \lambda \sqrt{n}$ with any real λ the probability of $\Gamma_{n,N(n)}$ not being planar has a positive lower limit, but we cannot calculate its value. It may even be 1, though this seems unlikely.

§ 9. On the growth of the greatest component

We prove in this § (see Theorem 9b) that the size of the greatest component of $\Gamma_{n,N(n)}$ is for $N(n) \sim cn$ with $c > 1/2$ with probability tending to 1 approximately $G(c)n$ where

$$(9.1) \quad G(c) = 1 - \frac{x(c)}{2c}$$

and $x(c)$ is defined by (6.4). (The curve $y = G(c)$ is shown on Fig. 2b).

Thus by Theorem 6 for $N(n) \sim cn$ with $c > 1/2$ almost all points of $\Gamma_{n,N(n)}$ (i. e. all but $o(n)$ points) belong either to some small component which is a tree (of size at most $1/\alpha (\log n - \frac{5}{2} \log \log n) + O(1)$ where $\alpha = 2c - 1 - \log 2c$ by Theorem 7a) or to the single "giant" component of the size $\sim G(c)n$.

Thus the situation can be summarized as follows: the largest component of $\Gamma_{n,N(n)}$ is of order $\log n$ for $\frac{N(n)}{n} \sim c < 1/2$, of order $n^{2/3}$ for $\frac{N(n)}{n} \sim \frac{1}{2}$ and of order n for $\frac{N(n)}{n} \sim c > 1/2$. This double "jump" of the size of the largest component when $\frac{N(n)}{n}$ passes the value $1/2$ is one of the most striking facts concerning random graphs. We prove first the following

Theorem 9a. Let $\mathcal{H}_{n,N}(A)$ denote the set of those points of $\Gamma_{n,N}$ which belong to components of size $> A$, and let $H_{n,N}(A)$ denote the number of elements of the set $\mathcal{H}_{n,N}(A)$. If $N_1(n) \sim (c - \varepsilon)n$ where $\varepsilon > 0$, $c - \varepsilon \geq 1/2$ and $N_2(n) \sim cn$ then with probability tending to 1 for $n \rightarrow +\infty$ from the $H_{n,N_1(n)}(A)$ points belonging to $\mathcal{H}_{n,N_1(n)}(A)$ more than $(1 - \delta)H_{n,N_1(n)}(A)$ points will be contained in the same component of $\Gamma_{n,N_2(n)}$ for any δ with $0 < \delta < 1$ provided that

$$(9.2) \quad A \geq \frac{50}{\varepsilon^2 \delta^2}.$$

Proof of Theorem 9a. According to Theorem 2b the number of points belonging to trees of order $\leq A$ is with probability tending to 1 for $n \rightarrow +\infty$ equal to

$$n \left(\sum_{k=1}^A \frac{k^{k-1}}{k!} [2(c - \varepsilon)]^{k-1} e^{-2(c-\varepsilon)} \right) + o(n).$$

On the other hand, the number of points of $\Gamma_{n,N_1(n)}$ belonging to components of size $\leq A$ and containing exactly one cycle is according to Theorem 3c $o(n)$ for $c - \varepsilon \geq 1/2$ (with probability tending to 1), while it is easy to see, that the number of points of $\Gamma_{n,N_1(n)}$ belonging to components of size $\leq A$ and containing more than one cycle is also bounded with probability tending to 1.)

Our last statement follows by using the inequality (4.19) from the fact that the average number of components of the mentioned type is, as a simple calculation similar to those carried out in previous §§, shows, of order $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Let $E_n^{(1)}$ denote the event that

$$(9.3) \quad |H_{n,N_1(n)}(A) - nf(A, c - \varepsilon)| < \tau nf(A, c - \varepsilon)$$

where $\tau > 0$ is an arbitrary small positive number which will be chosen later and

$$(9.4) \quad f(A, c) = 1 - \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^A \frac{k^{k-1}}{k!} (2ce^{-2c}) > 0$$

and let $\bar{E}_n^{(1)}$ denote the contrary event. It follows from what has been said that

$$(9.5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\bar{E}_n^{(1)}) = 0.$$

We consider only such $\Gamma_{n,N_1(n)}$ for which (9.3) holds.

Now clearly $\Gamma_{n,N_2(n)}$ is obtained from $\Gamma_{n,N_1(n)}$ by adding $N_2(n) - N_1(n) \sim n\varepsilon$ new edges at random to $\Gamma_{n,N_1(n)}$. The probability that such a new edge should

connect two points belonging to $\mathcal{H}_{n,N_1(n)}(A)$, is at least
$$\frac{\binom{H_{n,N_1(n)}(A)}{2} - N_2(n)}{\binom{n}{2}},$$

and thus by (9.3) is not less than $(1 - 2\tau)f^2(A, c - \varepsilon)$, if n is sufficiently large and τ sufficiently small.

As these edges are chosen independently from each other, it follows by the law of large numbers that denoting by v_n the number of those of the $N_2(n) - N_1(n)$ new edges which connect two points of $\mathcal{H}_{n,N_1(n)}$ and by $E_n^{(2)}$ the event that

$$(9.6) \quad v_n \geq \varepsilon(1 - 3\tau) f^2(A, c - \varepsilon) n$$

and by $\overline{E}_n^{(2)}$ the contrary event, we have

$$(9.7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\overline{E}_n^{(2)}) = 0.$$

We consider now only such $\Gamma_{n,N_2(n)}$ for which $E_n^{(2)}$ takes place. Now let us consider the subgraph $\Gamma_{n,N_2(n)}^*$ of $\Gamma_{n,N_2(n)}$ formed by the points of the set $\mathcal{H}_{n,N_1(n)}(A)$ and only of those edges of $\Gamma_{n,N_2(n)}$ which connect two such points.

We shall need now the following elementary

Lemma 2. Let a_1, a_2, \dots, a_r be positive numbers, $\sum_{j=1}^r a_j = 1$. If $\max_{1 \leq j \leq r} a_j \leq \alpha$ then there can be found a value k ($1 \leq k \leq r - 1$) such that

$$(9.8) \quad \frac{1 - \alpha}{2} \leq \sum_{j=1}^k a_j \leq \frac{1 + \alpha}{2}$$

and

$$\frac{1 - \alpha}{2} \leq \sum_{j=k+1}^r a_j \leq \frac{1 + \alpha}{2}.$$

Proof of Lemma 2. Put $S_j = \sum_{i=1}^j a_i$ ($j = 1, 2, \dots, r$). Let j_0 denote the least integer, for which $S_j > 1/2$. In case $S_{j_0} - 1/2 > 1/2 - S_{j_0-1}$ choose $k = j_0 - 1$, while in case $S_{j_0} - 1/2 \leq 1/2 - S_{j_0-1}$ choose $k = j_0$. In both cases we have $|S_k - 1/2| \leq \frac{a_{j_0}}{2} \leq \frac{\alpha}{2}$ which proves our Lemma.

Let the sizes of the components of $\Gamma_{n,N_2(n)}^*$ be denoted by b_1, b_2, \dots, b_r . Let $E_n^{(3)}$ denote the event

$$(9.9) \quad \max b_j > H_{n,N_1(n)}(A) (1 - \delta)$$

and $\overline{E}_n^{(3)}$ the contrary event. Applying our Lemma with $\alpha = 1 - \delta$ to the numbers $a_j = \frac{b_j}{H_{n,N_1(n)}(A)}$ it follows that if the event $\overline{E}_n^{(3)}$ takes place, the set $\mathcal{H}_{n,N_1(n)}(A)$ can be split in two subsets \mathcal{H}'_n and \mathcal{H}''_n containing H'_n and H''_n points such that $H'_n + H''_n = H_{n,N_1(n)}(A)$ and

$$(9.10) \quad H_{n,N_1(n)}(A) \frac{\delta}{2} \leq \min(H'_n, H''_n) \leq \max(H'_n, H''_n) \leq H_{n,N_1(n)}(A) \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$$

further no point of \mathcal{H}'_n is connected with a point of \mathcal{H}''_n in $\Gamma_{n,N_2(n)}^*$.

It follows that if a point P of the set $\mathcal{H}_{n,N_1(n)}(A)$ belongs to \mathcal{H}'_n (resp. \mathcal{H}''_n) then all other points of the component of $\Gamma_{n,N_1(n)}^*$ to which P belongs are

also contained in \mathcal{H}'_n (resp. \mathcal{H}''_n). As the number of components of size $> A$ of $\Gamma_{n, N_1(n)}$ is clearly $< \frac{H_{n, N_1(n)}(A)}{A}$ the number of such divisions of the set $\mathcal{H}_{n, N_1(n)}(A)$ does not exceed $2^{\frac{1}{A} H_{n, N_1(n)}(A)}$.

If further $\bar{E}_n^{(3)}$ takes place then every one of the v_n new edges connecting points of $\mathcal{H}_{n, N_1(n)}(A)$ connects either two points of \mathcal{H}'_n or two points of \mathcal{H}''_n . The possible number of such choices of these edges is clearly

$$\binom{\binom{H'_n}{2} + \binom{H''_n}{2}}{v_n}.$$

As by (9.10)

$$(9.11) \quad \frac{\binom{H'_n}{2} + \binom{H''_n}{2}}{\binom{H_n}{2}} \leq \frac{\delta^2}{4} + \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 = 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2} \leq 1 - \frac{\delta}{2}$$

it follows that

$$(9.12) \quad \mathbf{P}(\bar{E}_n^{(3)}) \leq 2^{\frac{1}{A} H_{n, N_1(n)}(A)} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^{\varepsilon(1-3\tau)f^2(A, c-\varepsilon)n}$$

and thus by (9.3) and (9.6)

$$(9.13) \quad \mathbf{P}(\bar{E}_n^{(3)}) \leq \exp \left[n f(A, c - \varepsilon) \left(\frac{(1 + \tau) \log 2}{A} - \frac{\varepsilon(1 - 3\tau) f(A, c - \varepsilon) \delta}{2} \right) \right].$$

Thus if

$$(9.14) \quad A \varepsilon \delta (1 - 3\tau) f(A, c - \varepsilon) > (1 + \tau) \log 4$$

then

$$(9.15) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\bar{E}_n^{(3)}) = 0.$$

As however in case $c - \varepsilon > 1/2$ we have $f(A, c - \varepsilon) \geq G(c - \varepsilon) > 0$ for any A , while in case $c - \varepsilon = 1/2$

$$(9.15a) \quad f\left(A, \frac{1}{2}\right) = 1 - \sum_{k=1}^A \frac{k^{k-1}}{k! e^k} = \sum_{k=A+1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k! e^k} \geq \frac{1}{2\sqrt{A}} \quad \text{if } A \geq A_0$$

the inequality (9.13) will be satisfied provided that $\tau < \frac{1}{10}$ and $A > \frac{50}{\varepsilon^2 \delta^2}$.

Thus Theorem 9a is proved.

Clearly the "giant" component of $\Gamma_{n, N_2(n)}$ the existence of which (with probability tending to 1) has been now proved, contains more than

$$(1 - \tau)(1 - \delta) n f(A, c - \varepsilon)$$

points. By choosing ε, τ and δ sufficiently small and A sufficiently large, $(1 - \tau)(1 - \delta)f(A, c - \varepsilon)$ can be brought as near to $G(c)$ as we want. Thus we have incidentally proved also the following

Theorem 9b. Let $\varrho_{n,N}$ denote the size of the greatest component of $\Gamma_{n,N}$. If $N(n) \sim cn$ where $c > 1/2$ we have for any $\eta > 0$

$$(9.16) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{\varrho_{n,N(n)}}{n} - G(c) \right| < \eta \right) = 1$$

where $G(c) = 1 - \frac{x(c)}{2c}$ and $x(c) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} (2c e^{-2c})^k$ is the solution satisfying $0 < x(c) < 1$ of the equation $x(c) e^{-x(c)} = 2c e^{-2c}$.

Remark. As $G(c) \rightarrow 1$ for $c \rightarrow +\infty$ it follows as a corollary from Theorem 9b that the size of the largest component will exceed $(1 - \alpha)n$ if c is sufficiently large where $\alpha > 0$ is arbitrarily small. This of course could be proved directly. As a matter of fact, if the greatest component of $\Gamma_{n,N(n)}$ with $N(n) \sim nc$ would not exceed $(1 - \alpha)n$ (we denote this event by $B_n(\alpha, c)$) one could by Lemma 2 divide the set V of the n points P_1, \dots, P_n in two subsets V' resp. V'' consisting of n' resp. n'' points so that no two points belonging to different subsets are connected and

$$(9.17) \quad \frac{\alpha n}{2} \leq \min(n', n'') \leq \max(n', n'') \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)n.$$

But the number of such divisions does not exceed 2^n , and if the n points are divided in this way, the number of ways N edges can be chosen so that only points belonging to the same subset V' resp. V'' are connected, is

$$\binom{n'}{2} + \binom{n''}{2}.$$

$$\text{As } \binom{n'}{2} + \binom{n''}{2} \leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \text{ it follows}$$

$$(9.18) \quad \mathbf{P}(B_n(\alpha, c)) \leq 2^n \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{N(n)} \leq 2^n e^{-\frac{N(n)\alpha}{2}}.$$

Thus if $\alpha c > \log 4$, then

$$(9.19) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n(\alpha, c)) = 0$$

which implies that for $c > \frac{\log 4}{\alpha}$ and $N(n) \sim cn$ we have

$$(9.20) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\varrho_{n,N(n)} \geq (1 - \alpha)n) = 1.$$

We have seen that for $N(n) \sim cn$ with $c > 1/2$ the random graph $\Gamma_{n, N(n)}$ consists with probability tending to 1, neglecting $o(n)$ points, only of isolated trees (there being approximately $\frac{n}{2c} \frac{k^{k-2}}{k!} (2c e^{-2c})^k$ trees of order k) and of a single giant component of size $\sim G(c)n$.

Clearly the isolated trees melt one after another into the giant component, the "danger" of being absorbed by the "giant" being greater for larger components. As shown by Theorem 2c for $N(n) \sim \frac{1}{2} n \log n$ only isolated

trees of order $\leq k$ survive, while for $\frac{N(n) - 1/2 n \log n}{n} \rightarrow +\infty$ the whole graph will with probability tending to 1 be connected.

An interesting question is: what is the "life-time" distribution of an isolated tree of order k which is present for $N(n) \sim cn$? This question is answered by the following

Theorem 9c. *The probability that an isolated tree of order k which is present in $\Gamma_{n, N_1(n)}$ where $N_1(n) \sim cn$ and $c > 1/2$ should still remain an isolated tree in $\Gamma_{n, N_2(n)}$ where $N_2(n) \sim (c+t)n$ ($t > 0$) is approximately e^{-2kt} ; thus the "life-time" of a tree of order k has approximately an exponential distribution with mean value $\frac{n}{2k}$ and is independent of the "age" of the tree.*

Proof. The probability that no point of the tree in question will be connected with any other point is

$$\prod_{j=N_1(n)+1}^{N_2(n)} \left(\frac{\binom{n-k}{2} - j + k}{\binom{n}{2} - j} \right) \sim e^{-2kt}.$$

This proves Theorem 9c.

§ 10. Remarks and some unsolved problems

We studied in detail the evolution of $\Gamma_{n, N}$ only till N reaches the order of magnitude $n \log n$. (Only Theorem 1 embraces some problems concerning the range $N(n) \sim n^\alpha$ with $1 < \alpha < 2$.) We want to deal with the structure of $\Gamma_{n, N(n)}$ for $N(n) \sim cn^\alpha$ with $\alpha > 1$ in greater detail in a forthcoming paper; here we make in this direction only a few remarks.

First it is easy to see that $\Gamma_{n, \binom{n}{2} - N(n)}$ is really nothing else, than the complementary graph of $\Gamma_{n, N(n)}$. Thus each of our results can be reformulated to give a result on the probable structure of $\Gamma_{n, N}$ with N being not much less than $\binom{n}{2}$. For instance, the structure of $\Gamma_{n, N}$ will have a second abrupt

change when N passes the value $\binom{n}{2} - \frac{n}{2}$; if $N < \binom{n}{2} - cn$ with $c > 1/2$ then the complementary graph of $\Gamma_{n, N}$ will contain a connected graph of order $f(c)n$, while for $c < 1/2$ this (missing) "giant" will disappear.

To show a less obvious example of this principle of getting result for N near to $\binom{n}{2}$, let us consider the maximal number of pairwise independent points in $\Gamma_{n,N}$. (The vertices P and Q of the graph Γ are called *independent* if they are not connected by an edge).

Evidently if a set of k points is independent in $\Gamma_{n,N(n)}$ then the same points form a complete subgraph in the complementary graph $\bar{\Gamma}_{n,N(n)}$. As however $\bar{\Gamma}_{n,N(n)}$ has the same structure as $\Gamma_{n,\binom{n}{2}-N(n)}$ it follows by Theorem

1, that there will be in $\Gamma_{n,N(n)}$ almost surely no k independent points if $\binom{n}{2} - N(n) = o\left(n^{2\left(1-\frac{1}{k-1}\right)}\right)$ i. e. if $N(n) = \binom{n}{2} - o\left(n^{2\left(1-\frac{1}{k-1}\right)}\right)$ but there will be in $\Gamma_{n,N(n)}$ almost surely k independent points if $N(n) = \binom{n}{2} - \omega_n n^{2\left(1-\frac{1}{k-1}\right)}$ where ω_n tends arbitrarily slowly to $+\infty$. An other interesting question is: what can be said about the degrees of the vertices of $\Gamma_{n,N}$. We prove in this direction the following

Theorem 10. Let $D_{n,N(n)}(P_k)$ denote the degree of the point P_k in $\Gamma_{n,N(n)}$ (i. e. the number of points of $\Gamma_{n,N(n)}$ which are connected with P_k by an edge). Put

$$\underline{D}_n = \min_{1 \leq k \leq n} D_{n,N(n)}(P_k) \quad \text{and} \quad \bar{D}_n = \max_{1 \leq k \leq n} D_{n,N(n)}(P_k).$$

Suppose that

$$(10.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(n)}{n \log n} = +\infty.$$

Then we have for any $\varepsilon > 0$

$$(10.2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{\bar{D}_n}{\underline{D}_n} - 1 \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

We have further for $N(n) \sim cn$ for any k

$$(10.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(D_{n,N(n)}(P_k) = j) = \frac{(2c)^j e^{-2c}}{j!} \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Proof. The probability that a given vertex P_k shall be connected by exactly r others in $\Gamma_{n,N}$ is

$$\frac{\binom{n-1}{r} \binom{n-1}{N-r}}{\binom{n}{N}} \sim \frac{\left(\frac{2N}{n}\right)^r e^{-\frac{2N}{n}}}{r!}$$

thus if $N(n) \sim cn$ the degree of a given point has approximately a Poisson distribution with mean value $2c$. The number of points having the degree r is thus in this case approximately

$$n \frac{(2c)^r e^{-2c}}{r!} \quad (r = 0, 1, \dots).$$

If $N(n) = (n \log n) \omega_n$ with $\omega_n \rightarrow +\infty$ then the probability that the degree of a point will be outside the interval $\frac{2N(n)}{n}(1 - \varepsilon)$ and $\frac{2N(n)}{n}(1 + \varepsilon)$ is approximately

$$\sum_{|k - 2 \log n \cdot \omega_n| > \varepsilon \cdot 2 \log n \cdot \omega_n} \frac{(2 \omega_n \cdot \log n)^k e^{-2 \omega_n \log n}}{k!} = O\left(\frac{1}{n^{\varepsilon^2 \omega_n}}\right)$$

and thus this probability is $o\left(\frac{1}{n}\right)$, for any $\varepsilon > 0$.

Thus the probability that the degrees of not all n points will be between the limit $(1 \pm \varepsilon) 2 \omega_n \log n$ will be tending to 0. Thus the assertion of Theorem 10 follows.

An interesting question is: what will be the chromatic number of $\Gamma_{n,N}$? (The *chromatic number* $Ch(\Gamma)$ of a graph Γ is the least positive integer h such that the vertices of the graph can be coloured by h colours so that no two vertices which are connected by an edge should have the same colour.)

Clearly every tree can be coloured by 2 colours, and thus by Theorem 4a almost surely $Ch(\Gamma_{n,N}) = 2$ if $N = o(n)$. As however the chromatic number of a graph having an equal number of vertices and edges is equal to 2 or 3 according to whether the only cycle contained in such a graph is of even or odd order, it follows from Theorem 5e that almost surely $Ch(\Gamma_{n,N}) \leq 3$ for $N(n) \sim nc$ with $c < 1/2$.

For $N(n) \sim \frac{n}{2}$ we have almost surely $Ch(\Gamma_{n,N(n)}) \geq 3$.

As a matter of fact, in the same way, as we proved Theorem 5b, one can prove that $\Gamma_{n,N(n)}$ contains for $N(n) \sim \frac{n}{2}$ almost surely a cycle of odd order. It is an open problem how large $Ch(\Gamma_{n,N(n)})$ is for $N(n) \sim cn$ with $c > 1/2$?

A further result on the chromatic number can be deduced from our above remark on independent vertices. If a graph Γ has the chromatic number h , then its points can be divided into h classes, so that no two points of the same class are connected by an edge; as the largest class has at least $\frac{n}{h}$ points,

it follows that if f is the maximal number of independent vertices of Γ we have

$f \geq \frac{n}{h}$. Now we have seen that for $N(n) = \binom{n}{2} - o\left(n^{2\left(1-\frac{1}{k}\right)}\right)$ almost surely

$f \leq k$; it follows that for $N(n) = \binom{n}{2} - o\left(n^{2\left(1-\frac{1}{k}\right)}\right)$ almost surely $Ch(\Gamma_{n,N(n)}) >$

$$> \frac{n}{k}.$$

Other open problems are the following: for what order of magnitude of $N(n)$ has $\Gamma_{n,N(n)}$ with probability tending to 1 a *Hamilton-line* (i.e. a path which passes through all vertices) resp. in case n is even a *factor of degree 1* (i.e. a set of disjoint edges which contain all vertices).

An other interesting question is: what is the threshold for the appearance of a "topological complete graph of order k " i.e. of k points such that any two of them can be connected by a path and these paths do not intersect. For $k > 4$ we do not know the solution of this question. For $k = 4$ it follows from Theorem 8a that the threshold is $\frac{n}{2}$. It is interesting to

compare this with an (unpublished) result of G. DIRAC according to which if $N \geq 2n - 2$ then $G_{n,N}$ contains certainly a topological complete graph of order 4.

We hope to return to the above mentioned unsolved questions in an other paper.

Remark added on May 16, 1960. It should be mentioned that N. V. SMIRNOV (see e. g. *Математический Сборник* 6(1939) p. 6) has proved a lemma which is similar to our Lemma 1.

(Received December 28, 1959.)

REFERENCES

- [1] CAYLEY, A.: *Collected Mathematical Papers*. Cambridge, 1889—1897.
- [2] PÓLYA, G.: "Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen". *Acta Mathematica* 68 (1937) 145—254.
- [3] KÖNIG, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, 1936.
- [4] BERGE, C.: *Théorie des graphes et ses applications*. Paris, Dunod, 1958.
- [5] FORD, G. W.—UHLENBECK, G. E.: "Combinatorial problems in the theory of graphs, I." *Proc. Nat. Acad. Sci.* 42 (1956) USA 122—128.
- [6] GILBERT, E. N.: "Enumeration of labelled graphs". *Canadian Journal of Math.* 8 (1957) 405—411.
- [7] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "On random graphs, I". *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 6 (1959) 290—297.
- [8] HARARY, F.: "Unsolved problems in the enumeration of graphs" In this issue, p. 63.
- [9] ERDŐS, P.: „Graph theory and probability." *Canadian Journal of Math.* 11 (1959) 34—38.
- [10] AUSTIN, T. L.—FAGEN, R. E.—PENNEY, W. F.—RIORDAN, J.: "The number of components in random linear graphs". *Annals of Math. Statistics* 30 (1959) 747—754.
- [11] TURÁN P.: "Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról". *Matematikai és Fizikai Lapok* 48 (1941) 436—452.
- [12] TURÁN, P.: "On the theory of graphs", *Colloquium Mathematicum* 3 (1954) 19—30.
- [13] KÖVÁRY, T.—SÓS, V. T.—TURÁN, P.: "On a problem of K. Zaremkiewicz". *Colloquium Mathematicum* 3 (1954) 50—57.
- [14] RÉNYI, A.: "Some remarks on the theory of trees". *Publications of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci.* 4 (1959) 73—85.
- [15] RÉNYI, A.: "On connected graphs, I". *Publications of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci.* 4 (1959) 385—387.
- [16] JORDAN, CH.: *Calculus of finite differences*. Budapest, 1939.
- [17] ERDŐS, P.—STONE, A. H.: "On the structure of linear graphs". *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946) 1087—1091.

О РАЗВЕРТЫВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

P. ERDŐS и A. RÉNYI

Резюме

Пусть даны n точки P_1, P_2, \dots, P_n , и выбираем случайно друг за другом N из возможных $\binom{n}{2}$ ребер (P_i, P_j) так что после того что выбраны k ребра каждый из других $\binom{n}{2} - k$ ребер имеет одинаковую вероятность быть выбранным как следующие. Работа занимается вероятной структурой так получаемого случайного графа $\Gamma_{n,N}$ при условии, что $N = N(n)$ известная функция от n и n очень большое число. Особенно исследуется изменение этой структуры если N нарастает при данном очень большом n . Случайно развёртывающий граф может быть рассмотрен как упрощенный модель роста реальных сетей (например сетей связи).

UNSOLVED PROBLEMS IN THE ENUMERATION OF GRAPHS¹

by

FRANK HARARY²

§ 1. Introduction

Our object is to present several unsolved problems in the enumeration of graphs in the hope that it will serve to stimulate active interest among mathematicians. It is not likely that all of these problems will be settled in the near future, for included among their solutions there would be enough information to settle the four color conjecture either in the affirmative or the negative.

We first illustrate what is meant by a graph enumeration problem using graphs and directed graphs. We then develop the preliminary concepts concerning graphs in order to be able to state the unsolved problems concisely. Statements (without proofs) of several methods which have been used in the enumeration of graphs are given. The most important method in this area is provided by the elegant and powerful enumeration method of PÓLYA [45]. For Pólya's method or a variation thereof has been utilized in most known solutions to such problems. We compare problems involving the number of trees of various kinds with analogous problems for graphs. Lists of 27 solved problems and 27 unsolved problems are presented. The importance of the unsolved problems and the nature of their essential difficulties are indicated. The calculation of asymptotic numbers of graphs of various kinds is also mentioned. We conclude with a comprehensive bibliography of articles which either implicitly or explicitly involve the enumeration of graphs.

§ 2. Graphical Preliminaries

In this section, we develop the definitions of several basic graphical concepts. A *graph* (see KÖNIG [39] as a general reference on graph theory) consists of a finite set of *points* a, b, c, \dots together with a prescribed set of unordered pairs of distinct points. Each such pair of points a and b is a *line* $\alpha = ab$ of the graph G . We then say that points a and b are *adjacent* and that the point a and the line α are *incident* to each other. Note that by definition a graph has no lines joining a point with itself nor does it have

¹ This article is based on a talk given in March 1959 at the Combinatorial Problems Seminar of the Logistics Project at Princeton University while the author was on leave from the University of Michigan. The final draft was completed at the Los Alamos Scientific Laboratory during the summer of 1959.

² Ann Arbor, USA.

two distinct lines joining the same pair of points. If the definition of a graph is generalized to permit more than one line joining the same pair of points, the result is called a *multigraph*, following the terminology in BERGE [1]. Two or more lines joining the same pair of distinct points are called *multiple lines*. If we further allow the presence of *loops*, i.e., lines joining a point with itself, as well as multiple lines, then we have a *general graph*.

Two graphs are *isomorphic* if there exists a one-to-one correspondence between their sets of points which preserves adjacency. In Figure 1 we show all the graphs (up to isomorphism) of four points.

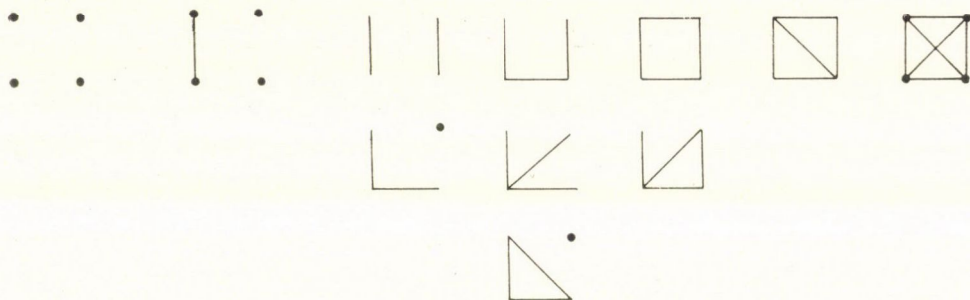


Figure 1. The graphs of four points.

Let g_{pq} be the number of graphs with p points and q lines. Let

$$g_p(x) = g_{p0} + g_{p1}x + g_{p2}x^2 + \dots$$

be the counting series for the graphs of p points; thus the highest power of x is $p(p-1)/2$.

A *directed graph* (or more briefly a *digraph*) consists of a finite set of points together with a prescribed collection of *ordered pairs* of distinct points. Each such ordered pair (a, b) of points is called a *directed line* (or more briefly a *line* where the meaning is clear by context), and is denoted by \vec{ab} . The definition of isomorphism for digraphs is analogous to that for graphs. In Figure 2, we show all the digraphs of three points.

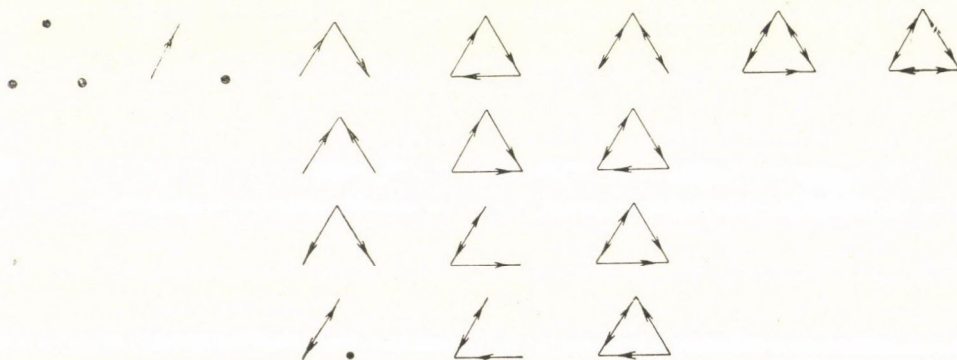


Figure 2. The digraphs of three points.

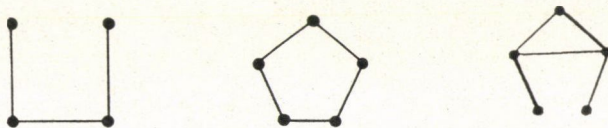
Let \bar{g}_{pq} be the number of digraphs with p points and q (directed) lines. To enumerate the digraphs of p points means to find the expression for the counting series

$$\bar{g}_p(x) = \bar{g}_{p0} + \bar{g}_{p1}x + \bar{g}_{p2}x^2 + \dots$$

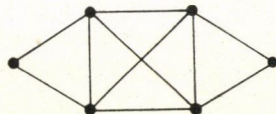
in which the highest power of x is $p(p-1)$. From Figures 1 and 2 we see that the counting series for the graphs of four points and the digraphs of three points are respectively:

$$g_4(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6,$$

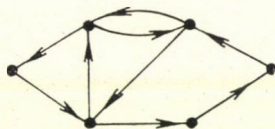
$$\bar{g}_3(x) = 1 + x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 + x^5 + x^6.$$



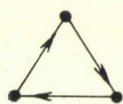
a. Three self-complementary graphs.



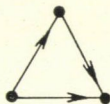
b. An Euler graph, with lower girth 3 and upper girth 6.



c. An Euler digraph.



strong



unilateral

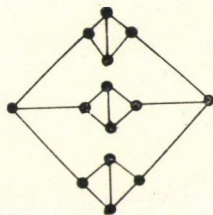


weak



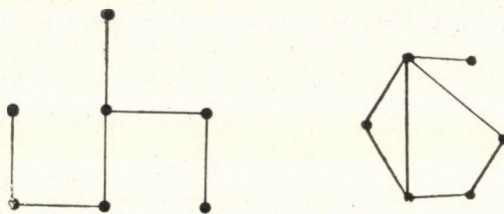
disconnected

d. Four digraphs with various kinds of connectedness.

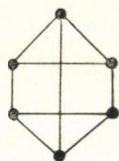


e. A cubic planar graph, with connectivity 2.

Figure 3.



f. Identity graphs.



point symmetric

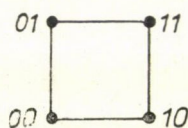


line symmetric

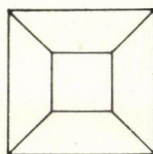


symmetric

g. Symmetric graphs.



a 2-cube



a 3-cube

h. Two cubes.

Figure 3.

Let G be a graph with p points and q lines. The *complement* G' of G contains the same set of points as G and two points are adjacent in G' if and only if they are not adjacent in G . A graph is *self-complementary* if it is isomorphic to its complement. (See Figure 3a.)

Two lines of a graph are *adjacent* if they contain a common point. A *path* is a collection of successively adjacent lines of the form $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{n-1}a_n$ and the n distinct points a_i . The *length* of a path is the number of lines in it. A graph is *connected* if there is a path between any two points. The *diameter* of a connected graph is the maximum distance between any two points, where their *distance* is the length of a shortest path between them.

A *trajectory* is a sequence of successively adjacent distinct lines in which the points need not be distinct. A *line sequence* is a sequence of successively adjacent lines in which neither the points nor the lines need be distinct. A trajectory, or line sequence is *open* if its first and last points are distinct; otherwise it is *closed*. An *Euler line* of a connected graph G is a closed trajectory which contains all the lines of G . An *Euler graph* is one which contains an Euler line. (See Figure 3b.)

A *directed path* from a_1 to a_n in a digraph is similarly given by a sequence of lines $\overrightarrow{a_1a_2}, \dots, \overrightarrow{a_{n-1}a_n}$ on n distinct points. Then, as before, an *Euler digraph* D is one which contains a closed directed trajectory containing all the lines of D . (See Figure 3c.)

If digraph D has a path from a to b , we say that b is *accessible* from a . A *point basis* of a digraph is a minimal collection of points from which all other points are accessible. A *singleton point basis* consists of exactly one point. A digraph D is *strongly connected* or *strong* if each point is accessible from every other point. D is *unilaterally connected* or *unilateral* if for any two points, at least one is accessible from the other. D is *weakly connected* or *weak* if for any partition of its set of points into two nonempty subsets, there exists a line between a point of one subset and a point of the other. Finally, D is *disconnected* if it is not even weak. (See Figure 3d.)

A *cut point* of a connected graph is one whose removal results in a disconnected graph. A *block* of a graph is a maximal-connected subgraph containing no cut points of itself.

The *degree* of a point of a graph is the number of lines to which it is incident. A *regular graph* is one in which every point has the same degree; a *cubic graph* is a regular graph of degree 3. A graph is *homeomorphically irreducible* if it has no points of degree 2. (See Figure 3e.)

A *cycle* of a graph consists of a path $a_1a_2 \dots a_n$ together with the line a_1a_n . A *complete cycle* is one which passes through all the points of the graph; in the graphical literature a complete cycle is often called a *hamilton line*, and a graph is *hamiltonian* if it contains a complete cycle. The *length* of a cycle is the number of lines in it. The *lower girth* of graph G is the length of any smallest cycle; the *upper girth* is the length of a longest cycle. (See Figure 3b.) A *tree* is a connected graph with no cycles. (See the first graph of Figure 3f.)

The *index* of a connected graph is the smallest number of lines whose removal results in a tree. The *connectivity* of a graph is the smallest number of points whose removal results in a disconnected graph. (See Figure 3e.)

An *automorphism* of a graph is an isomorphism with itself. The *group of a graph* is the collection of all its automorphisms. An *identity graph* is one in which the only automorphism is the identity mapping on the set of points. (See Figure 3f.) Two points of a graph are *similar* if there is an automorphism which maps one into the other; similarity of two lines is analogous. A graph is *point-symmetric* if all its points are similar, it is *line-symmetric* if all its lines are similar, and it is *symmetric* if it is both point-symmetric and line-symmetric. (See Figure 3g.)

A graph is *k-colored* if each point is assigned one of k colors in such a way that no two points of the same color are adjacent, and all k colors are used. A graph is *k-chromatic* or has *chromatic number k* if it can be k -colored but not $(k - 1)$ -colored. A *labeled graph* is one in which each point is distinguished from every other point.

The *partition* of a graph of p points and q lines is the expression for $2q$ as the sum of the degrees of the points. The *partition* of a digraph is the vector sum of the ordered pair at each point which gives the number of directed lines to and from that point.

A *planar graph* is one which can be drawn in the plane in such a way that none of its lines intersect each other.

A *subgraph* of a graph G is a subset of its points and lines which forms a graph. A *spanning subgraph* of G has the same point set as G .

We conclude this section with the definitions of some miscellaneous concepts. An *n-cube* is a graph with 2^n points each of which is a binary number

with n digits, in which two points are adjacent whenever they differ in exactly one digit. (See Figure 3h.) A *boolean function* of two variables x and y is a finite combination of sums, products, and complements, of expressions in x and y . For each assignment of the values 0 and 1 to the variables x and y , a given boolean function has the value 0 or 1.

An (*abstract*) *simplicial complex* consists of a set P of *points* and a collection S of subsets of P called *simplexes*, which satisfy the following two conditions:

1. Every point is a simplex.
2. Every nonempty subset of a simplex is a simplex.

A *Latin square* of order n is a square matrix of order n in which every row and every column is a permutation of the integers 1, 2, ..., n .

A *finite automaton* or a *sequential machine* with two inputs 0, 1 and a finite number of states may be defined as follows. There is a directed graph whose points are called states in which one point is distinguished or *rooted* and called the *initial state*. Each point has exactly two lines from it, one line labeled 0 and the other labeled 1. These two labels on lines of the digraph are called *inputs* and serve to determine the next state of the machine when the given state and the input are known. We note that directed lines from a point to itself (loops) are permitted here as well as two directed lines both from one point to another. Also, it is stipulated that every state is accessible from the initial state. (See Figure 9 below.) An *automaton with outputs* 0 and 1 is defined by providing a table of outputs which associate one of the output symbols 0 or 1 given the present state and the input.

List I

UNSOLVED PROBLEMS IN THE ENUMERATION OF GRAPHS

- | | |
|------------------|---|
| I. Digraphs | <ol style="list-style-type: none"> 1. Strong 2. Unilateral 3. Singleton point basis |
| II. Partitions | <ol style="list-style-type: none"> 4. Graphs with given partition 5. Homeomorphically irreducible graphs 6. Regular graphs 7. Euler graphs |
| III. Planarity | <ol style="list-style-type: none"> 8. Planar graphs 9. k-chromatic and k-colored graphs 10. Planar graphs with additional properties |
| IV. Connectivity | <ol style="list-style-type: none"> 11. Graphs of given girth and diameter 12. Graphs of given index and connectivity 13. Blocks |

- | | |
|---------------------|---|
| V. Ising | 14. 2-dimensional Ising problem and non-nearest neighbors |
| | 15. 3-dimensional Ising problem |
| | 16. Paving problem |
| | 17. Cell-growth problem |
| VI. Switching | 18. Types of complete cycle in an n -cube |
| | 19. Finite automata |
| | 20. Indecomposable two-terminal networks |
| VII. Topological | 21. Self-complementary graphs |
| | 22. Simplicial complexes |
| VIII. Combinatorial | 23. Latin squares |
| | 24. Line graphs |
| IX. Groups | 25. Symmetric graphs |
| | 26. Identity graphs |
| | 27. Graphs with given group |

§ 3. Statements of the Unsolved Problems

We regard a solution of each of the unsolved problems of List I as a generating function in closed form for the number of graphs of each given kind with a given number p of points and a given number q of lines (or directed lines for digraphs). These problems are divided into nine categories which combine related problems.

I. Problems involving digraphs

1. Strong digraphs

We see from Figure 2 that the counting series for the strong digraphs of three points is

$$x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6.$$

2. Unilateral digraphs

Again, we see from Figure 2 that the counting series for unilateral digraphs of three points is

$$x^2 + 4x^3 + 4x^4 + x^5 + x^6.$$

3. Digraphs with a singleton point basis

Figure 2 shows that the counting series for these digraphs with three points is

$$2x^2 + 4x^3 + 4x^4 + x^5 + x^6.$$

It is easy to show that every unilateral digraph has a singleton point basis.

II. Problems involving partition

4. Graphs with a given partition

From Figure 1, we see that each graph of four points has a different partition. For example, the graph consisting of a single cycle of length 4 has partition $2 + 2 + 2 + 2$ and is the only graph with this partition. However, starting with graphs of five points, there exist partitions which belong to more than one graph. An example is given by the two graphs shown in Figure 4, each of which has the partition $1 + 1 + 2 + 2 + 2$.



Figure 4. Two graphs with the same partition.

5. Homeomorphically irreducible graphs

Inspection of Figure 1 shows that the counting series for homeomorphically irreducible graphs of four points is

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^6$$

while that for connected homeomorphically irreducible graphs of four points is $x^3 + x^6$.

6. Regular graphs

This is an interesting special case of graphs with a given partition.

Every regular graph of degree one has an even number $2n$ of points which are joined by n lines to form n connected components. Every regular graph of degree 2 has a cycle for each of its components. The first interesting case of regular graphs is given by cubic graphs. The only cubic graph of four points is the complete graph shown in Figure 1; hence the counting series for cubic graphs of four points is simply given by x^3 .

7. Euler graphs and Euler digraphs

Euler himself showed that a graph has a closed trajectory containing all the lines if and only if it is connected and every point is *even* (of even degree). Hence Euler graphs are subsumed in the category of graphs with a given partition. Namely, they are those graphs whose partitions have no odd parts.

III. Problems involving planarity and colorability

8. Planar graphs

KURATOWSKI has shown that a graph is planar if and only if it contains no subgraph homeomorphic to either of the two "skew graphs" K_5 or $K_{3,3}$ shown in Figure 5.

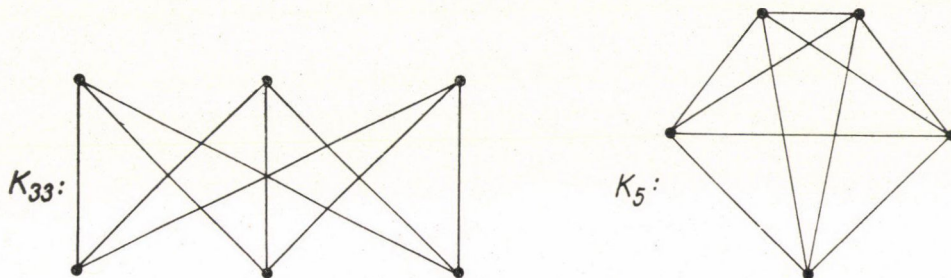


Figure 5. The two skew graphs.

Hence it follows that every graph of four points is planar and that the counting series for the planar graphs of five points is obtained from that of all graphs of five points by subtracting x^5 .

9. k -chromatic graphs and k -colored graphs

Only the number of bicolored graphs has been found in closed form, [23]. For example, the bicolored graphs with two points of each color are shown in Figure 6, in which the two points of each graph to the left are regarded as colored with the first color while the two points to the right are colored with the second color.

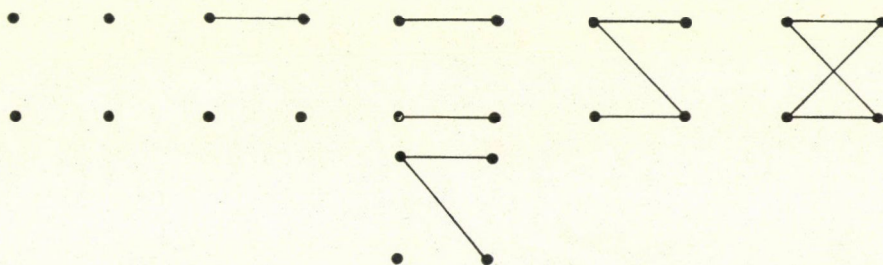


Figure 6. The bicolored graphs with two points of each color.

By a theorem of KÖNIG [39] a graph is bichromatic if and only if all its cycles are even (of even length). Thus we see from Figure 1 that the number of bichromatic graphs of four points is given by the series

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + x^4.$$

Further, it is clear that there is a one-to-one correspondence between connected bicolored graphs and connected bichromatic graphs. But there are more disconnected bicolored graphs than disconnected bichromatic graphs. Bicolored graphs are regarded as isomorphic even when their two colors are interchanged.

10. Planar graphs with additional properties

These problems include planar cubic graphs, planar Euler graphs, and planar k -chromatic graphs.

IV. Problems involving connectivity

11. Graphs with given girth and given diameter

From Figure 1, we see that there are exactly three connected graphs with lower girth 3 and the same number with upper girth 4, and that the counting series for the connected graphs of four points with diameter 2 is $x^3 + x^4 + x^5$.

12. Graphs of given index and given connectivity

Among the connected graphs of four points there are two graphs of index 1, one of index 2, and one of index 3.

A connected graph has connectivity 1 if and only if it has a cut point. Hence the counting series for connected graphs of four points of connectivity 1 is $2x^3 + x^4$. The sum of this solution and that of Problem 13 is the known number of connected graphs.

13. Blocks

In view of the definitions of a block and of the connectivity of a graph, it follows at once that blocks are connected graphs with connectivity greater than 1. The counting series for blocks of four points is (from Figure 1) $x^4 + x^5 + x^6$.

V. Ising model problems

14. The two-dimensional Ising problem

Consider a labeled graph which is an n -dimensional lattice. A subgraph of this lattice is called *admissible* if and only if every point is even. Let A_q be the number of different labeled admissible subgraphs with q lines. Find a generating function for the quantity A_q . This problem was solved for $n = 1$ by ISING himself [35], and for $n = 2$ by ONSAGER [43]. However, ONSAGER did not use combinatorial methods and his procedures have not generalized to higher dimensions. Hence even though the two-dimensional ISING problem has been solved, it is still an unsolved problem to derive a purely combinatorial solution.³

³ This problem has just been solved by S. SHERMAN in an article to appear in vol. I, May 1960, *Journal of Mathematical Physics*. Sherman's method may also solve the rest of Problem 14.

As a variation of this problem we have the case which is called in the physical literature "interaction between non-nearest neighbors". We show in Figure 7a the graph of a two-dimensional lattice and in Figure 7b the graph obtained from this lattice on joining those pairs of points which are nearest to each other without already being adjacent. We note that in physical applications, each of these graphs would usually be considered as being drawn on a torus, i.e., both pairs of opposite sides are identified.

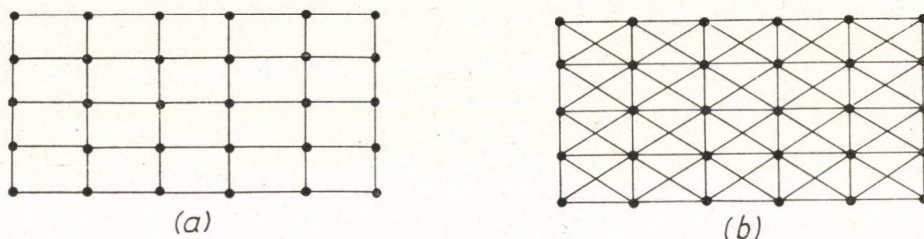


Figure 7. Graphs of a 2-dimensional lattice without and with diagonals.

15. The three-dimensional Ising problem

This problem is obtained from the preceding one on replacing the dimension $n = 2$ by $n = 3$. No real beginning has been made toward its solution. Of course the n dimensional Ising problems for $n > 3$ are also unsolved.

By the *area* of an admissible labeled subgraph of a two-dimensional lattice we mean the minimum area enclosed by disjoint cycles constituting this subgraph. Let $A_{q,r}$ be the number of admissible labeled subgraphs with q lines and area r . Find a generating function for the quantities $A_{q,r}$. In the physical literature, this is shown to be the "two-dimensional Ising problem with a magnetic field".

16. A paving problem

Let us start with a two-dimensional lattice with N squares. Consider n_1 squares and n_2 double squares (like dominoes) such that $n_1 + n_2 = N$. In how many ways can the labeled lattice be "paved" by these?

17. The cell growth problem

Consider a one-celled animal which has a square shape and can grow in the plane by adding a cell to any of its four sides. How many connected animals A_r with area r are there up to isomorphism? The animals are assumed to be simply connected in the sense that there are no "holes".

In Figure 8 we show all the animals with area 1, 2, 3, 4, and 5.

Thus we see that the counting series for the cell growth problem is of the form

$$A(x) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r x^r = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 12x^5 + \dots$$

It is also known that $A_6 = 35$ and $A_7 = 107$. In GOLOMB [14], these animals are studied under the name of *polyminoes* since they are regarded as a generalization of dominoes. See Addendum II.

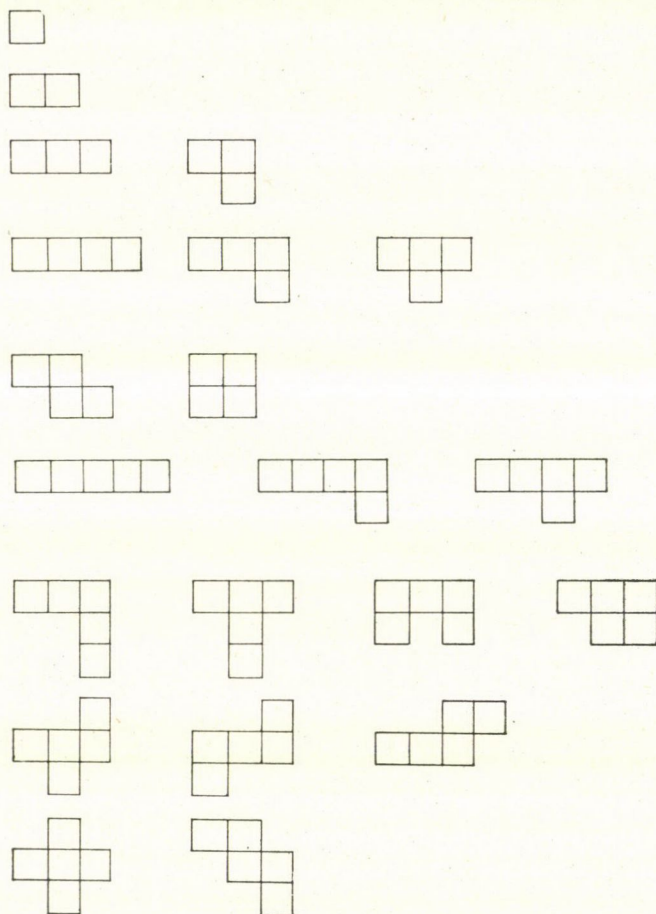


Figure 8. The cell growth problem.

VI. Switching Problems

18. The number of dissimilar complete cycles in an n -cube

In Figure 3, we see a 3-cube. It is very easy to convince oneself that there is exactly one similarity type of complete cycle in a 3-cube. It has been shown by GILBERT [13] that the counting series for this problem is of the form $x^2 + x^3 + 9x^4 + \dots$ where the coefficient of x^n is the number of dissimilar complete cycles in an n -cube. The coefficient is not known even for x^5 .

19. The number of finite automata

In Figure 9, we have the digraph representation of a finite automaton. Every point of this digraph is accessible from the point designated as the initial state.

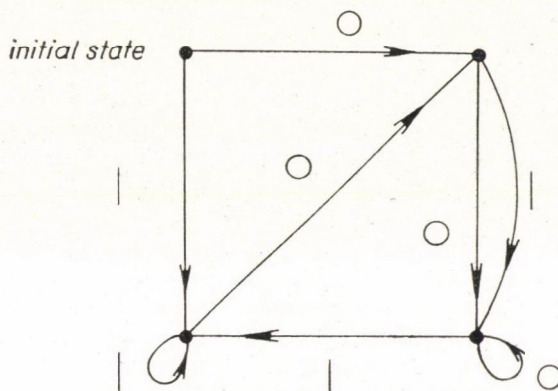


Figure 9. A finite automaton.

20. Indecomposable two-terminal networks

A *two-terminal network* is a connected multigraph in which two points are marked u and v and are called the first terminal and the second terminal. The *product* or *series connection* $N = N_1 N_2$ of two 2-terminal networks N_1 and N_2 is the network obtained on identifying the points v_1 and u_2 . The *sum* or *parallel connection* $N = N_1 + N_2$ is obtained on identifying u_1 with u_2 and also v_1 with v_2 . These two operations on networks are illustrated in Figure 10.

A two-terminal network is *series-parallel* if it may be constructed from a finite succession of series and parallel connections starting with the network having exactly two adjacent points u and v . It is well-known [50] that a two-terminal network is series-parallel if and only if it is *unidirectional*, i.e., no two paths from u to v contain any two points a and b in opposite orders.

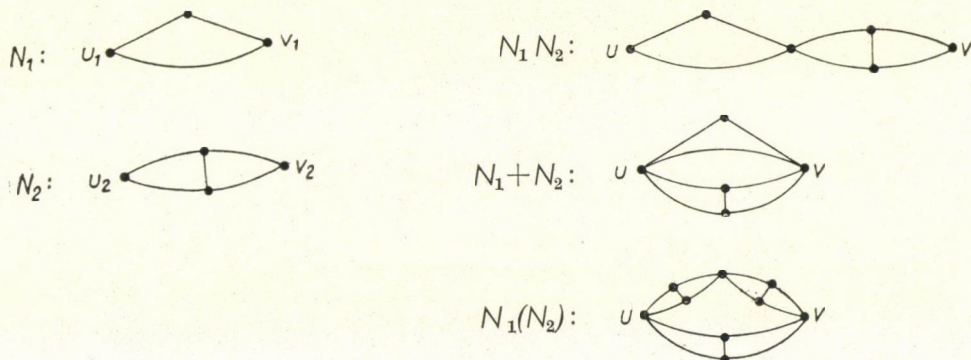


Figure 10. The product, sum, and composition of two-terminal networks.

The *composition* $N = N_1(N_2)$, where N_1 is series-parallel is obtained on replacing each line of N_1 , using unidirectionality, by the network N_2 . In Figure 10, the composition of two networks, the first of which is series-parallel, is also illustrated.

A network N is *indecomposable* if it is not possible to write it in the form $N = N_1(N_2)$. VETUCHNOVSKY [57] has obtained upper and lower bounds for the number of indecomposable two-terminal series-parallel networks with a given number of points. The exact number is not known, and constitutes the present problem.

VII. Topological Problems

21. Self-complementary graphs

It is easy to show that any self-complementary graph has its number of points of the form $p = 4n$ or $p = 4n + 1$. In Figure 3, we have the self-complementary graphs of four and five points. The next self-complementary graphs will therefore have eight and nine points. The counting series for self-complementary graphs is therefore of the form

$$x^4 + 2x^5 + s_8x^8 + s_9x^9 + s_{12}x^{12} + s_{13}x^{13} + \dots$$

R. READ finds that $s_8 = 10$ and that these graphs are all planar. Clearly every self-complementary graph on 13 or more points is nonplanar.

22. Simplicial complexes

How many isomorphism types of simplicial complexes are there with a given number of simplex of each dimension? We illustrate by applying Figure 1 to write down the counting series for the simplicial complexes with four points, and a given number of 1-simplexes (lines) and 2-simplexes. Letting x and y be the variables standing for the 1-simplexes and 2-simplexes respectively, we find that this series is of the form

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + x^3y + x^4 + x^4y + x^5 + x^5y + x^5y^2 + x^6 + x^6y^2 + x^6y^3 + x^6y^4.$$

VIII. Combinatorial Problems

23. Latin squares

Let L_n be the number of Latin squares in which the first the first row and the first column are in the standard order 1, 2, ..., n . Then the counting series for Latin squares is known to be (cf. RIORDAN [52])

$$x^2 + x^3 + 4x^4 + 56x^5 + 9408x^6 + 16942080x^7 + \dots$$

The result for $n > 7$ is not known.

Every Latin square may be regarded as a bicolored graph with the same number of points of each color in which the lines are also colored. Let K_{nn} be the graph whose points are

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$$

and whose lines are all n^2 lines of the form $a_i b_j$. The points of the first color correspond to the rows of a Latin square while the points of the second color designate its columns. Each of the lines of K_{nn} is colored with exactly one of n colors in such a way that at each point there is exactly one line of each color. The matrix interpretation of such a graph is that the color of the line joining points a_i and b_j is the element in the (i, j) place of the matrix.

24. Line graphs

The *line graph* of a given graph G is that graph $L(G)$ whose points correspond to the lines of G and in which two points are adjacent whenever the corresponding lines of G are adjacent. A criterion for a graph to be the line graph of some graph is known, KRAUSZ [40]. We call such a graph a *line graph*. The present problem is to find the number of line graphs with a given number of points and lines.

IX. Problems involving groups

25. Symmetric graphs

In Figure 3, we have diagrams of graphs which are point-symmetric but not line-symmetric, line-symmetric but not point-symmetric, and symmetric. The problem is to enumerate each of these three kinds of graphs with a given number of points and lines.

26. Identity graphs

The smallest identity graph which is a tree and the smallest one not a tree are shown in Figure 3.

27. Graphs with a given group

The group of a graph is by definition a permutation group acting on the set of points. It is known, FRUCHT [11], that every finite group is abstractly isomorphic to the group of some graph. But it is not known in general whether a given permutation group is a graph group. The general problem, which includes this question, is to find the number of (nonisomorphic) graphs with a given (permutation) group. The *line group* of a graph is the permutation group acting on the set of all lines of the graph consistent with the group of the graphs. As variations and extensions of the above problem, we may ask for the number of graphs with a given line group and also for the number of graphs whose group and line group are a given ordered pair of permutation groups.

§ 4. Various Graph Counting Methods

In this section we shall discuss six methods which have been used in the enumeration of various kinds of graphs. By far the most important of these has been PÓLYA's powerful and elegant enumeration theorem [45]. After a statement of PÓLYA's Theorem, we present a special case which has been derived independently by DAVIS [6] and SLEPIAN [55]. We then discuss a

recent interesting theorem of READ [49], which is based on the same kind of group theoretic approach as the theorem of PÓLYA. The dissimilarity characteristic theorems of OTTER [44] for trees and NORMAN [42] for graphs in terms of its blocks are then reviewed. After some comments on the enumeration of labeled graphs, we conclude this section with a discussion of the considerations involved in finding asymptotic numbers for graphs.

a. Pólya's Theorem

We shall state PÓLYA's Theorem in the form which is useful in deriving the counting polynomials for various kinds of graphs. The desired form is a specialization of PÓLYA's statement to one variable.

Let *figure* be an undefined term. To each figure there is assigned a non-negative integer called its *content*. Let a_k denote the number of different figures of content k . Then the *figure counting series* $a(x)$ is defined by

$$(1) \quad a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Let Y be a permutation group of degree s and order h . A *configuration* of length s is a sequence of s figures. The *content of a configuration* is the sum of the contents of its figures. Two configurations are *Y -equivalent* if there is a permutation of Y sending one into the other. Let F_k denote the number of Y -inequivalent configurations of content k . The configuration counting series $F(x)$ is defined by

$$(2) \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k.$$

We shall call Y the *configuration group*.

The object of PÓLYA's Theorem is to express $F(x)$ in terms of $a(x)$ and Y . This is accomplished using the cycle index of Y , defined as follows. Let $h(j)$ denote the number of elements of Y of type $(j) = (j_1, j_2, \dots, j_s)$, i.e., having j_k cycles of length k , for $k = 1, 2, \dots, s$, so that

$$(3) \quad j_1 + 2j_2 + \dots + sj_s = s.$$

Let y_1, y_2, \dots, y_s be s indeterminates. Then $Z(Y)$, the *cycle index* of Y , is defined as

$$(4) \quad Z(Y) = \frac{1}{h} \sum_{(j)} h(j) y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots y_s^{j_s},$$

where the sum is taken over all partitions (j) of s satisfying (3). For any function $f(x)$, let $Z(Y, f(x))$ denote the function obtained from $Z(Y)$ by replacing each indeterminate y_k by $f(x^k)$. Using these definitions, we are able to give a concise statement of:

Pólya's Theorem. *The configuration series is obtained by substituting the figure counting series into the cycle index of the configuration group. Symbolically,*

$$(5) \quad F(x) = Z(Y, a(x)).$$

This theorem reduces the problem of finding the configuration counting series to the determination of the figure counting series and the cycle index of the configuration group. See Addendum I.

We mention that the cycle index of the symmetric group S_n of degree n is

$$Z(S_n) = \frac{1}{n!} \sum_{(j)} \frac{n!}{1^{j_1} j_1! \dots n^{j_n} j_n!} y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n},$$

where the sum is taken over all partitions (j) of n satisfying (3) with $s = n$.

b. A special case of Pólya's Theorem

The following special case of PÓLYA's Theorem has been independently discovered by DAVIS and SLEPIAN. In addition, the result is also known to have been found independently by GLEASON (unpublished).

Very simply stated, this special case is obtained from PÓLYA's Theorem, equation (5), by substituting $x = 1$. Formally, this gives $F(1) = Z(Y, a(1))$. But from equation (2), $F(1) = \sum F_k$ and from (1), $a(1) = \sum a_k$. But $F(1)$ is the total number of (inequivalent) configurations without regard to content, and similarly $a(1)$ is the total number of figures without regard to content. Hence the substitution of $x = 1$ in (5) results in the following formula for the total number of configurations in terms of total number of figures and the configuration group. Using the notation of [18], let $B = F(1)$ and $b = a(1)$. Then (5) becomes

$$(6) \quad B = \frac{1}{h} \sum_{(j)} h(j) b^{\sum j_k}.$$

Thus B is obtained at once from the cycle index of the configuration group.

c. A generalization of Pólya's Theorem

In a recent article, DE BRUIJN [2] has developed an interesting generalization of PÓLYA's Theorem. He first restates the method of PÓLYA in more abstract and less geometric language as follows: Let D be the domain and R the range of a collection of functions f, f_1, f_2, \dots . The elements of the range correspond to figures while the range itself stands for the figure collection in PÓLYA's terminology. The elements of the domain correspond to the "places" at which the figures are to be located. Then each function mapping the domain into the range becomes a configuration. Let A be a permutation group which acts on D . Then in PÓLYA's method, two functions (configurations) f_1 and f_2 are *equivalent* if there is a permutation α in A such that for all $x \in D$,

$$f_1(x) = f_2(\alpha x).$$

DE BRUIJN considers the more general situation in which there is also a permutation group B acting on R . He then defines two functions as *equivalent* if there exist permutations $\alpha \in A$ and $\beta \in B$ such that for all $x \in D$,

$$f_1(x) = \beta f_2(\alpha x).$$

Rather than state the main formula of [2] in all its generality, we state the following special case, in which $R = D$ and $B = A$.

The number of classes of functions of a finite set D into itself, with respect to group A acting on D , is given by the formula

$$(7) \quad Z\left(A; \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots\right) [(1 - y_1)^{-1} (1 - 2y_2)^{-1} (1 - 3y_3)^{-1} \dots]$$

where these partial derivatives are evaluated at $y_1 = y_2 = \dots = 0$.

The most general result of the article [2] gives a formula for the number of inequivalent functions from D into R where A acts on D and B acts on R . It is easy to see that this kind of combination of the two permutation groups A and B is closely related to the operation which we [23, 27] have called "exponentiation" of permutation groups.

The exponentiation B^A of two permutation groups A and B which act respectively on sets D and R is as follows. Let A and B have degree d and r and order m and n . Then B^A acts on R^D , the set of all functions from D into R , so that the degree of B^A is r^d . The function $f \in R^D$ is mapped into the following function f' by the permutation $\gamma \in B^A$ determined by any permutation $\alpha \in A$ and any d permutations (repetitions permitted) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d \in B$, where $D = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$:

$$(8) \quad f'(x_i) = \beta_i f(\alpha x_i).$$

Thus the order of B^A is mn^d .

Hence we see that DE BRUIJN's generalization of PÓLYA's Theorem may be regarded as an application of PÓLYA's Theorem to a new kind of permutation group, the *diagonal of the exponentiation*, whose definition is obtained from (8) on taking all the β_i as the same permutation of B . This concept will be developed in detail elsewhere.

We note that the cycle index of S_n^S has been used in [23] to count bi-colored graphs with the same number of points of each color, and using different terminology the cycle index of S_2^n was found by SLEPIAN [55] to enumerate the types of boolean functions of n variables. A general formula for $Z(B^A)$ has not been found.

d. Read's Theorem

The results of READ have just appeared [49]. The main result is his "Superposition Theorem". By the superposition of two graphs on the same set of points is meant the graph obtained by forming the union of their sets of lines, including multiplicity. For example, we show in Figure 11 the graph obtained by the superposition of three graphs on the same collection of six points. It must be noted that the lines of G_i have color i and these colors are preserved in G . When these three graphs are placed differently on the same set of points, the resulting superposed graph need not be isomorphic with the graph G of Figure 11. The question is then: Given three graphs G_1, G_2, G_3 , how many distinct superposed graphs can be formed by them? It turns out that this number depends only on the automorphism groups Y_1, Y_2, Y_3 of the three graphs and is given by an expression which we may denote $N(Y_1, Y_2, Y_3)$. In order to state the superposition theorem, let h_i be the order

of the group Y_i and let $h_i(j)$ be the number of permutations in the group Y_i of type (j) as defined by equation (3). This gives enough notation to write the cycle index as in (4) of each of these three groups Y_i .

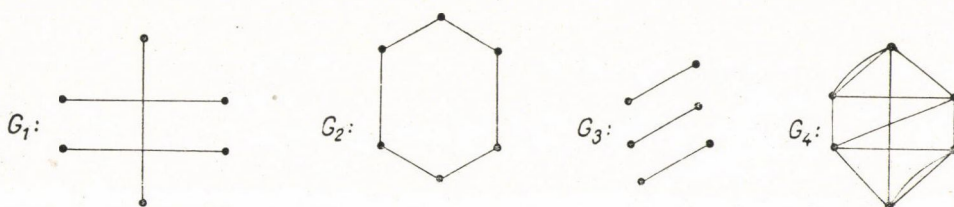


Figure 11. The superposed graph G of the graphs G_1, G_2, G_3 .

Superposition theorem.

$$(9) \quad N(Y_1, Y_2, Y_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{(j)} h_1(j) h_2(j) h_3(j) (1^{j_1} 2^{j_2} \dots s^{j_s} j_1! j_2! \dots j_s!)^2.$$

The theorem holds for the superpositions of any number n of graphs; the exponent 2 in the right-hand member of (9) being replaced by $n - 1$. This theorem is an important and interesting contribution by READ to the art of counting. See Addendum I.

e. Otter's Theorem and Norman's Theorem

OTTER's dissimilarity characteristic theorem (10) for trees [44] was used as an essential lemma in his elegant enumeration of trees in terms of rooted trees. A generalization (11) of this theorem by NORMAN [42] enabled him to solve the more general enumeration theorem of finding the number of graphs with given blocks. Derivations from equation (11) of (10) and other formulas are given in [30].

Let T be any tree, and p and q be the number of *dissimilar* points and lines of T . An *exceptional line* of T is one whose two points are similar; let q_e be the number of exceptional lines of T . Thus $q_e = 0$ or 1.

Dissimilarity-characteristic theorem for trees.

$$(10) \quad p - (q - q_e) = 1.$$

Let G be a connected graph with n blocks. Let p be the total number of dissimilar points in G and p_k the number of dissimilar points in the k 'th dissimilar block of G .

Dissimilarity characteristic theorem for graphs.

$$(11) \quad \sum_{k=1}^n (p_k - 1) = p - 1.$$

The application of both equations (10) and (11) to graph counting problems is made by summing each of these equations over the collection of all graphs to be enumerated. The term 1 when summed over all graphs obviously

gives the total number of graphs while the term p becomes the number of rooted graphs under consideration. Clever combinatorial devices then serve to yield formulas for the summation of the remaining terms in these formulas.

f. Labeled graphs

The enumeration of labeled graphs of any given kind is *always* easier than that of unlabeled graphs. We shall mention later some comparison between the enumeration of unlabeled and labeled graphs of various kinds. The essential difference is as follows. Regardless of what configuration group is required in the process of enumerating the ordinary graphs of a given kind, this group is replaced by the identity group of the same degree for the labeled case. Since the cycle index of the identity group of degree n is f_1^n , it follows from PÓLYA's Theorem that relatively straightforward combinatorial procedures serve for the enumeration of labeled graphs; see for example FORD and UHLENBECK [9, I] and GILBERT [12].

g. Asymptotic problems

The asymptotic number of trees was first studied by PÓLYA [45]. Further contributions were made by OTTER [44]. In a more recent study, FORD and UHLENBECK [9, IV] have made a systematic investigation of the number of asymptotic graphs with various properties. We have developed in an expository note [25] asymptotic formulas for certain kinds of binary relations based on the corresponding kinds of graph. READ has also studied asymptotic problems in connection with the results obtained by his superposition theorem.

§ 5. Tree counting problems

There have been two recent papers which combine the methods of PÓLYA and OTTER to enumerate various species of trees. RIORDAN [51] obtained formulas for the number of labeled colored and chromatic trees where these three adjectives are applied in all possible arrangements to the set of points and the set of lines of a tree. In essentially a sequel to RIORDAN's article, HARARY and PRINS [31] have enumerated the following kinds of trees:

1. Trees with a given partition.
2. Homeomorphically irreducible trees.
3. Trees with a given diameter.
4. Identity trees.
5. Weighted trees.
6. Oriented trees.
7. Directed trees.
8. Signed trees.
9. Trees of given strength.
10. Trees of given type.

A *signed tree* is one whose lines are designated as either positive or negative. An *oriented graph* is one in which each line is assigned a unique direction. A *directed tree* is obtained from a tree when each line is assigned either one direction or both directions. A graph of *strength* n is one in which

multiple lines are admitted, but not more than n lines join the same pair of points. A graph of *type* n has lines of n different colors and is obtained from a graph of strength n by assigning colors to its lines in such a way that any two distinct lines joining the same pair of points have different colors. (READ has just derived counting formulas for labeled trees of these various species.)

We now compare these known results for trees with corresponding unsolved problems mentioned above for graphs. The number of trees with a given partition has been found by the combination of PÓLYA's Theorem and OTTER's theorem as mentioned above. READ [49] has also found the number of general graphs with a given partition using his superposition theorem. But his method does not appear to be applicable to the case of graphs in which loops and multiple lines are not permitted. Thus there have been these two solutions of variations of problem 4, but the problem itself has not been solved. Homeomorphically irreducible graphs, being graphs with no points of degree 2, constitute a special case of graphs with a given partition. Hence READ's result serves to enumerate these also for general graphs. In addition, this counting result has been obtained for trees. The appropriate formulation for handling this problem by PÓLYA's Theorem has not been found. Such a formulation seems to be required for an attack on problem 5. Problem 6, the number of regular graphs of degree r , is also a special case of graphs with a given partition. Hence for general graphs only, READ's method serves to settle these problems. Read has also obtained an application of his superposition theorem to the case of regular graphs of degree r whose lines are colored with r colors in such a way that exactly one of each color is incident to each point. These *completely factored graphs* are multigraphs and have no loops.

Since EULER graphs may be characterized as connected graphs in which every point is even, problem 7 is also a special case of problem 4. Thus its solution for general graphs is derivable from READ's formula.

In order to state READ's formula for the number of general graphs with given partition, we require the concept of "Gruppenkranz" due to PÓLYA [45], which we call in [27] the *composition* $A[B]$ of permutation groups A and B . As above, let A and B have degrees d and r , orders m and n , and act on sets D and R . Then $A[B]$ acts on the cartesian product $D \times R$. Any permutation $\alpha \in A$ and any d permutations (repetitions permitted) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d \in B$ determine the following permutation γ of $A[B]$:

$$\gamma(x_i, y_j) = (\alpha x_i, \beta_i y_j), \quad \text{for all } x_i \in D, y_j \in R.$$

Hence the degree of the composition $A[B]$ is dr and the order is mn^d . It follows at once from their definitions that the exponentiation B^A and the composition $A[B]$ are abstractly isomorphic but not permutationally equivalent.

The *direct sum* $A + B$ acts on $D \cup R$ and for each $\alpha \in A$ and $\beta \in B$, a permutation $\gamma \in A + B$ is defined by:

$$\gamma(u) = \begin{cases} \alpha(u) & \text{if } u \in D \\ \beta(u) & \text{if } u \in R. \end{cases}$$

(This is called "direct product" by PÓLYA [45] and others.)

PÓLYA [45] has shown that the cycle index of the direct sum $A + B$ is the product of the cycle indices:

$$Z(A + B) = Z(A)Z(B),$$

and that the cycle index of the composition $A[B]$ is the functional composition of their cycle indices :

$$Z(A[B]) = Z(A, Z(B)).$$

where the right-hand member is obtained as in equation (5). For example,

$$Z(S_3) = \frac{1}{6} (y_1^3 + 3y_1 y_2 + 2y_3) \quad \text{and}$$

$$Z(S_2) = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2), \quad \text{so that}$$

$$Z(S_2[S_3]) = \frac{1}{2} \left((Z(S_3))^2 + \frac{1}{6} (y_2^3 + 3y_2 y_4 + 2y_6) \right).$$

With this notation, READ's formula for the number of general graphs with v_i points of degree i and $q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} i v_i$ lines is

$$(12) \quad N \left(\sum_{i=1} S_{v_i} [S_i], S_q [S_2] \right),$$

where \sum denotes direct sum, and this number is determined in accordance with equation (9).

Although the number of trees with a given diameter⁴ has been found [31] the method of solution appears to offer no clues to the corresponding problem for graphs. This is the second part of problem 11. The first part of problem 11 asks for the number of graphs with given lower girth and also for the number with given upper girth. The translation of this condition into an application of Pólya's Theorem is not straightforward. However, a special case of the number of graphs of given upper girth has been solved, namely, the number of Hamiltonian graphs. This problem is handled in the article [20] where the different graphs having a complete cycle of p points are regarded as super-graphs of a cycle of length p whose set of points consists of the points of the cycle.

The number of identity trees was found [31] by means of an application of another theorem of Pólya involving configurations in which all the figures are distinct, to the combined methods of Pólya and OTTER.

By an abuse of notation, let

$$Z(A - B) = Z(A) - Z(B),$$

where A and B are permutation groups of the same degree. Pólya [45] has derived the following very useful result. The counting series for the number of configurations of length n inequivalent with respect to S_n , in which all figures are distinct and the figure series is $f(x)$, is given by

$$(13) \quad Z(A_n - S_n, f(x)),$$

where A_n is the alternating group of degree n .

⁴See also RIORDAN, The number of trees by height and diameter, to appear in I. B. M. Journal of Research, 1960.

By another abuse of notation, let

$$Z(S_\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(S_n),$$

where $Z(S_0)$ is defined to be 1, and let

$$Z(A_\infty - S_\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(A_n - S_n).$$

There is a well-known combinatorial identity mentioned in [2, 16, 42, 45, 52]:

$$(14) \quad Z(S_\infty, f(x)) = \exp \sum_{r=1}^{\infty} f(x^r)/r.$$

This formula is useful in several counting problems, including the number of rooted trees and of connected graphs. For counting identity trees, a formula for $Z(A_\infty - S_\infty)$ is required. This is given in equation (15) below, recently communicated to us by J. RIORDAN.

It is readily verified that

$$Z(A_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = Z(S_n; y_1, y_2, \dots, y_n) + Z(S_n; y_1, -y_2, y_3, -y_4, \dots).$$

It follows at once from this and (14) that

$$(15) \quad Z(A_\infty - S_\infty, f(x)) = \exp \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} f(x^r)/r.$$

Again, the group theoretic formulation required to characterize configurations corresponding to identity graphs has not been found; such a discovery is required to handle problem 26. PRINS [48] has characterized all those permutation groups which are tree groups. A corresponding characterization for graph groups is still open. Such a criterion would give a partial answer to problem 27, that of finding the number of graphs with a given permutation group. In a previous article [24], we have proposed the more general problem of finding the number of graphs whose group and line group (defined in [19]) are a given ordered pair of permutation groups.

The number of trees of given strength was found by HARARY and PRINS [31] while the number of graphs with given strength is found in the article [16]. Similarly, both the number of trees and graphs of given type are found in the articles [31] and [16] respectively.

The kinds of graphs corresponding to oriented trees, directed trees, and signed trees have all been enumerated. The solutions appear in the articles [21], [16], and [15] respectively. We have here three cases where the enumeration of graphs corresponding to certain kinds of trees have been obtained. Their study does not suggest methods for proceeding from trees to the enumeration of the corresponding graphs which have not yet been counted.

§ 6. Comparison between solved and unsolved problems

We begin with a list of graph enumeration problems which have been solved, omitting the tree solutions already mentioned in the preceding section.

List II

SOLVED PROBLEMS IN THE ENUMERATION OF GRAPHS

- | | |
|-----------------|--|
| I. Graphs | 1. Graphs [16] |
| | 2. Rooted graphs [16] |
| | 3. Connected graphs [16] |
| | 4. Graphs of given strength [16] |
| | 5. Graphs of given type [16] |
| | 6. Signed graphs [15] |
| | 7. Subgraphs of a given graph [19] |
| | 8. Supergraphs of a given graph [20] |
| | 9. Bicolored graphs [23] |
| | 10. Graphs with given blocks [42, 9II] |
| II. Digraphs | 11. Directed graphs [16] |
| | 12. Weak digraphs [16] |
| | 13. Oriented graphs [21] |
| | 14. Tournaments [7] |
| | 15. Transitive digraphs [60] |
| | 16. Functional digraphs [26] |
| III. Partitions | 17. General graphs with given partition [49] |
| | 18. Multigraphs which are fully factored [49] |
| | 19. Digraphs with given double partition [37] |
| IV. Switching | 20. Two-terminal series-parallel networks [50, 52] |
| | 21. Types of Boolean function [46, 55] |
| | 22. Spanning trees of a given graph [38] |
| V. Labels | 23. Labeled graphs [12, 9I] |
| | 24. Labeled series-parallel networks [3] |
| | 25. Labeled graphs with a given partition [49] |
| | 26. Labeled graphs with given blocks [9III] |
| VI. Asymptotic | 27. The asymptotic number of graphs and labeled graphs [21, 9IV] |

The number of graphs was found by taking the pairs of distinct points from among p given points as the figures, and the content of a figure as 0 or 1 corresponding to nonadjacency or adjacency of these two points. Thus the figure series is $1 + x$. The configuration group which serves to count graphs is then obtained from the symmetric group of degree p by considering as the objects to be permuted the pairs of distinct objects. The cycle index of the resulting group is then readily found and PÓLYA's Theorem gives the counting polynomial for the number of graphs with p points and a given number of lines. This beautiful result, which served as a stimulus for all of our subsequent work on graph enumeration, was communicated to the author in a letter by PÓLYA; exactly the same formula was found independently in an unpublished work of SLEPIAN, who rediscovered POLYA's enumeration method in [55].

The counting of rooted graphs is then an easy modification which results when one takes any one of the objects permuted by the symmetric group as fixed before forming its "pair group". The number of digraphs is also readily obtained from the number of graphs when one constructs the "ordered pair group" analogously to the pair group.

Connected graphs are enumerated in terms of the total number of graphs by a combinatorial method which is exactly parallel to the enumeration of rooted trees in terms of themselves, as derived by PÓLYA [45]. This result turns out to be particularly important because of its wide applicability. In general, it serves to count the number of connected graphs (or other configurations) having a given property when the total number of graphs, both connected and disconnected, is known. If desired, the formula also serves to give the total number of graphs of a given kind in terms of the number of connected such graphs. For example, an immediate application of the method gives the enumeration of weak digraphs. Problems 1 and 2, which ask for the number of strong and unilateral digraphs have not been found amenable to this approach. Problem 3, which asks for the number of digraphs with a singleton point basis can be regarded as a generalization of problem 1. For every strong digraph has a singleton point basis consisting of any one of its points. Problem 19, the number of finite automata, involves a combination of the properties that a digraph have a singleton point basis, that its lines be of type 2, and a kind of regularity condition that every point have out-degree 2. VYSSOTSKY [57] solves a special labeled case of this problem, and also asks the problem of the number of strongly connected finite automata.

The number of oriented graphs is found analogously to the number of digraphs, but involves a modification of both the configuration group and the figure counting series in order to take account of the condition that each line of an oriented graph has exactly one of two possible directions. Again, a figure is a pair of distinct points which are either non-adjacent or are joined by a line in exactly one direction. Hence the figure counting series is $1 + 2x$, where the content of a figure is the number of lines it contains.

The enumeration of signed graphs offers no difficulty whatsoever and is obtained immediately from the formula for the number of graphs by a modification of the figure counting series to $1 + x + y$, where the terms 1, x , and y indicate respectively no line, a positive line, and a negative line joining two points.

Using the line group of a graph as the configuration group and $1 + x$ as the figure counting series, one immediately obtains the number of dissimilar spanning subgraphs of a given graph. Analogous formulas for the number of dissimilar supergraphs of a given graph and in general for the number of types of graph between a given graph-subgraph pair are readily formulated, [22].

Z. SCHUR has kindly pointed out an error in Example 2 of the article [20]. He observes that the correct configuration group for Example 2 is the dihedral group of degree 4 and writes: "We then have

$$F_{Q_3, Q_8}(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3 + x^4,$$

which amounts to deleting the middle row of graphs in Figure 2. The three graphs in this row are similar to the corresponding graphs in the upper row."

The problem of enumerating bicolored graphs has recently been handled by the construction of a new binary operation on permutation groups, called exponentiation (see § 4, part c. above). An elementary exposition of the algebraic interaction between this operation and other already known operations on permutation groups such as the direct sum and the cartesian product is given in the note, [27].

Similar although more complicated methods will probably serve to count the number of tricolored graphs; this has not been accomplished as yet. The number of k -colored graphs for $k > 3$ involves even further combinatorial complexities. This is part of problem 9. The other part of problem 9 asks for the enumeration of k -chromatic graphs. Let us consider the simplest case of such graphs, namely, bichromatic graphs. We have already mentioned that the number of connected bichromatic graphs and the number of connected bicolor graphs are equal. But this is not so for disconnected graphs. As a result of this observation, the entire content of Section 5 of [23] on the number of connected bicolor graphs is incorrect, and this section should be deleted.

Problem 8, the number of planar graphs, is entirely untouched. No one has been able to make even a successful beginning. An intuitive indication of the essential difficulty of this particular enumeration problem is that formulas for the number of both planar graphs and those planar graphs which are 4-chromatic would serve to settle the four-color conjecture one way or the other. If these two generating functions were obtained and shown to be equal, then the four-color conjecture would be proved true. On the other hand, if it turned out that there were more planar graphs than planar 4-chromatic graphs with a given number of points and lines, then the 4-color conjectures would thereby be disproved. The enumeration of planar graphs with additional properties is listed as problem 10.

By means of equation (9), NORMAN [42] has derived a formula for the number of connected graphs with given blocks. Nevertheless, although he and several others have tried very hard, no one has succeeded in deriving a formula for the number of blocks with a given number of points and lines, problem 13. The enumeration of graphs with given index and connectivity, problem 12, is conceptually similar. There is a rather complete set of theorems involving the index of a graph and its connectivity, but these have not proven helpful in finding the kind of permutation group characterizations of such graphs which would be useful in counting them.

As mentioned above, READ [49] has obtained a formula for the number of general graphs with given partition. But his method has not provided any procedure for eliminating graphs with loops and multiple lines. Thus for graphs, problem 4 remains unsolved, as well as problems 5, 6, and 7. However, READ has found a formula for the number of *labeled* graphs with a given partition and without loops or multiple lines. He has also applied his superposition theorem to obtain the number of multiple regular graphs (without loops) which are fully factored. But again, his method does not give the corresponding number of graphs without multiple lines, a special case of problem 6.

The number of digraphs with a given double partition was discussed in the article by KATZ and POWELL [37]. They reduced this question to a formulation by SUKHATME which gives recurrence relations for certain number theoretic functions. SUKHATME has constructed tables for these numbers which serve to give what KATZ and POWELL call the number of "locally restricted directed graphs" having up to 13 lines. However, a general group theoretic formula has never been found.

We now mention some recently found formulas for digraphs. LEO MOSER shown in [60] that the total number of transitive digraphs with p points

has (regardless of the number of lines) is equal to

$$\frac{1}{p+1} \binom{2p}{p}.$$

DAVIS [7] has found a formula for the number of tournaments, i.e., complete oriented graphs. This result is also readily obtained as a special case of the formula in [21] for the number of oriented graphs. Functional digraphs are defined as the graphical representation of a binary relation in which each first element has a unique second element. The number of functional digraphs has been found [26] by means of a characterization to the effect that every weak component of a finite functional digraph contains exactly one directed cycle together with rooted trees located at each point of the cycle.⁵ It follows that the configuration group for this problem is the cyclic group and that the figure counting series is the known generating function for rooted trees.

§ 7. Importance of enumeration problems for other fields

ISING [35] proposed the problem which now bears his name and solved it for the one-dimensional case only, leaving the two-dimensional case as an unsolved problem. The first solution to the two-dimensional Ising problem was obtained by ONSAGER [43]. Recently KAC and WARD [36] discovered a simpler procedure involving determinants which, however, is not logically complete.

Their purpose was to indicate the ideas involved in a purely combinatorial development of a proof of the two-dimensional Ising problem, and they provided heuristic arguments only. FEYNMAN's simplification (unpublished) of their treatment is even simpler and contains precisely the same logical gap; a combinatorial formulation of the statement whose proof would complete this development was given by M. COHEN in [28].

Among its many equivalent formulations, the ISING problem can be regarded as an enumeration problem for linear graphs. NEWELL and MONTROLL [41] give a very clear exposition of the problem. Consider as in Figure 7a a two-dimensional lattice with n points. For applications to statistical mechanics, only large values of n are interesting and usually the lattice is regarded as drawn on a torus.

Regarding Figure 7a as a labeled graph, the first part of problem 14 asks for a purely combinatorial method for counting the distinct admissible subgraphs, i.e., those in which every point is even. Such a combinatorial solution to the two-dimensional problem serve to fill in the logical gap in both the treatments of KAC and WARD, and that of FEYNMAN. It would also offer some hope for the eventual solution of problem 15, the three-dimensional ISING problem. (See the footnote of Problem 14.)

The second part of problem 14 asks for the number of admissible subgraphs in a two-dimensional lattice with diagonals, as shown in Figure 7b. This would also be of considerable interest in theoretical physics. The second part of problem 15 also asks for a variation of the two-dimensional problem,

⁵ READ has obtained an elegant simplification of this formula, to appear in Math. Annalen.

namely for the number of admissible subgraphs with a given number of lines and a given area. This is referred to in the physical literature as the two-dimensional ISING problem with magnetic effect.

The paving problem stated as problem 16 was proposed to the author by G. E. UHLENBECK. It has applications in the statistical mechanics of liquids. Problem 17, which asks for the number of square-celled animals as pictured in Figure 8, was proposed independently both by UHLENBECK, who was interested in the number of different shapes of paving blocks for eventual application to problem 16, by an anonymous biologist who was interested in the number of graphs of this kind as the number of different shapes of animals with a given number of cells, and by GOLOMB [14] under the name of polyminoos, or generalized dominoes; he asserts that this is a well-known unsolved combinatorial problem.

Much effort has already been expended in problem 18, the number of types of Hamilton cycle in an n -cube, by those interested in applications to synthesis problems in switching networks. While several kinds of partial results have been obtained, usually by exhaustive methods, the general problems has never been appropriately conceptualized. The number of finite automata, problem 19, would be of considerable interest in switching theory, as well as problem 20, the number of indecomposable two-terminal series-parallel networks described above.

The number of symmetric graphs, problem 25, has been studied for applications to electrical network theory by FOSTER [10]. While not solving this problem, FOSTER has provided a useful collection of diagrams of symmetric graphs, and a classification method.

Problem 21, the number of self-complementary graphs, would be of interest because of the set theoretic operation of complementation, while problem 22, which asks for the number of nonisomorphic abstract simplicial complexes, is of interest in combinatorial topology.

Combinatorial considerations play an important part in the statistical design of experiments. In these processes, Latin squares play an important role. A closed formula for the number of distinct Latin squares of arbitrary order n , problem 23, appears to be extremely difficult. The numbers have been found through $n = 7$ by exhaustive methods. In connection with "association schemes" of statistical block designs, CONNOR [5], HOFFMAN [33], and SHRIKHANDE [54] have made a study of the structural properties of the line graph of a complete graph. The number of line graphs with a given number of points and lines is stated as problem 24. Further enumeration problems are suggested by the recent work of BOSE, PARKER, and SHRIKHANDE in which they disproved EULER's conjecture concerning the existence of orthogonal Latin squares of order $4n + 2$.

KRAUSZ [40] has obtained the following elegant characterization:

G is a line graph if and only if there exists a partition of the set of lines of G into complete subgraphs such that no point of G lies in more than 2 of these subgraphs.

A group theoretic description of line graphs for the purposes of applying PÓLYA's method does not appear straightforward.

Obviously, the line graph L_n of the complete graph K_n satisfies the three conditions:

1. Each point has degree $2(n - 2)$.

2. Any two nonadjacent points are mutually adjacent to exactly 4 points.
3. Any two adjacent points are mutually adjacent to exactly $n - 2$ points.

Between them, CONNOR, HOFFMAN, and SHRIKHANDE have shown that these necessary conditions are also sufficient except for $n = 8$. This gives another indication of the difficulty of conveniently characterizing and hence of counting line graphs. Surprisingly, HOFFMAN has just disproved the sufficiency for $n = 8$.

We have already noted that counting problems for labeled graphs are always easier than the corresponding problems for unlabeled graphs. Nevertheless, they are also interesting in their own right. CARLITZ and RIORDAN [3] have found the number of labeled two-terminal series-parallel networks. FORD and UHLENBECK [9 I, III] have found the number of labeled graphs and also have counted labeled graphs with given blocks. In addition, they have made a study of the asymptotic number of graphs with given properties, extending the work of PÓLYA and OTTER in this area. GILBERT [12] has also enumerated labeled graphs and labeled digraphs. GILBERT [13] has done the most work on a number of types of complete cycles in an n -cube. In a recent note [21], we have gathered together for a readership of logicians some of the asymptotic results for graphs which have been found. HUSIMI [34] has obtained the number of labeled graphs in which every block is complete. CAYLEY [4] has shown that the number of labeled trees with p points is p^{p-2} . This result has been rediscovered many times and is also a special case of HUSIMI's formula.

PÓLYA [47] has written a beautiful and clear exposition of "picture-writing" which gives an aid to intuition in thinking about graphical enumeration problems.

SENIOR [53] appears to have made the first exhaustive studies on graphs with a given partition. However, he was very much restrained in his outlook to the study of those kinds of partitions which have immediate application to organic chemistry.

We conclude by stating some typical asymptotic formulas for certain kinds of graphs. As above, t_n and T_n are the number of trees and rooted trees with n points while $t(x)$ and $T(x)$ are the corresponding generating functions. PÓLYA [45] has shown that $t(x)$ and $T(x)$ have the same radius of convergence $r = 0.3383219$. This number r occurs in asymptotic formulas for t_n and T_n , as does the number $b = 7.924780$ which is a constant associated with the power series $t(x)$ and its derivatives. With these preliminaries, OTTER [44] derives the asymptotic formulas:

$$T_n \sim \frac{br^{-n+3/2}}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$$

$$t_n \sim \frac{b^3 r^{-n+9/2}}{4\sqrt{\pi} n^{5/2}}.$$

Using similar methods, FORD and UHLENBECK [9 III] obtain asymptotic values of h_n and H_n , the number of cacti (previously called "Husimi trees", which are connected graphs in which no line lies on more than one cycle)

with n points. In these formulas the common radius of convergence $s = 0.22215$ of $h(x)$ and $H(x)$ occur, as do the numbers $C = 4.395$ and $d = 11.46$:

$$H_n \sim \frac{Cs^{-n+1/2}}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$$

$$h_n \sim \frac{3ds^{-n+3/2}}{4\sqrt{\pi}n^{5/2}}.$$

PÓLYA has shown in [9 IV] and [25] that the number g_p of graphs with p points satisfies

$$g_p \sim \frac{1}{p!} 2^{p(p-1)/2}.$$

Furthermore, the number $g_{p,q}$ of graphs with p points and q lines is asymptotically given by

$$g_{p,q} \sim \frac{1}{p!} \binom{p(p-1)/2}{q/2},$$

where this formula is known to hold for large p and $0 \ll q \ll p(p-1)/2$, so that the majority of graphs is included.

The corresponding asymptotic formulas for labeled graphs of these various kinds are much more easily derived. We may multiply the number of unsolved problems proposed here by asking for the asymptotic number of graphs of each kind, and also for the number of labeled graphs of each kind and their asymptotic numbers.

ADDENDUM I

The following paper is extremely appropriate from a historical standpoint:

REDFIELD, J. H. „The theory of group-reduced distributions.” *American Journal of Mathematics* **49** (1927) 433—455.

The reference to this paper was found in the book:

LITTLEWOOD, D. E. *The theory of group characters*, Oxford, 1940.

This remarkable paper by REDFIELD apparently anticipated most of the major developments in enumeration techniques and results for the next thirty years. For it contains:

- (1) The exact formula of READ Superposition Theorem (9).
- (2) Apparently the first published definition of the cycle index of a permutation group under the name of the “group-reduction function”.
- (3) Formulas for the cycle index of the symmetric, alternating, cyclic and dihedral groups.
- (4) The cycle index of the group of symmetries of a 3-cube. He actually substitutes $1 + x$ into this cycle index, thereby giving the first known example of PÓLYA’s theorem. This also anticipates the enumeration of the symmetry types of boolean functions due to PÓLYA and SLEPIAN!

- (5) A substitution of $1/(1-x)$ into this cycle index. This is a device used in the formula of [16] for enumerating graphs in which any number of lines are permitted to join the same two points.
- (6) The number of graphs with p points and q lines for $p = 5$ and $q = 4$ as a solution of a problem involving the number of types of binary relations.

ADDENDUM II

The following remarks concern Problem 17, the cell growth problem. STEIN, WALDEN, and WILLIAMSON have programmed a computing machine to generate the isomorphism classes of animals. The results, which have been carefully checked, show that the number of animals with 7 cells is 107 rather than the number 109 which is stated by GOLOMB. Further, A_8 , the number of 8 celled animals, is 363. In addition to these, there is exactly one animal with 7 cells which is connected but not simply connected, and there are 6 such animals with 8 cells. This program is being carried out to exemplify a purely combinatorial application of a digital computing machine.

(Received January 8, 1960.)

REFERENCES

- [1] BERGE, C.: *Théorie de graphes et ses applications*. Paris, 1958.
- [2] DE BRUIJN, N. G.: "Generalization of Polya's fundamental theorem in enumerative combinatorial analysis". *Indagationes Mathematicae* **21** (1959) 59-69.
- [3] CARLITZ, L. and RIORDAN, J.: "The number of labeled two-terminal seriesparallel networks". *Duke Math. J.* **23** (1956) 435-446.
- [4] CAYLEY, A.: *Collected Mathematical Papers*. Cambridge, 1889-1897; 3, 242-246; 9, 202-204, 427-460; 11, 365-367; 13, 26-28.
- [5] CONNOR, W. S.: "The uniqueness of the triangular association scheme". *Annals Math. Stat.* **29** (1958) 262-266.
- [6] DAVIS, R. L.: "The number of structures of finite relations". *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953) 486-495.
- [7] DAVIS, R. L.: "Structures of dominance relations". *Bull. Math. Biophysics* **16** (1954) 131-140.
- [8] DIRAC, G. A. and SCHUSTER, S.: "A theorem of Kuratowski". *Indagationes Math.* **16** (1954) 343-348.
- [9] FORD, R. W. and UHLENBECK, G. E.: "Combinatorial problems in the theory of graphs, I, II, III, IV". *Proceedings of the National Academy of Science, U.S.A.* (R. Z. Norman is the third co-author of paper II) **42** (1956) 122-128, 203-208, 529-535 and **43** (1957) 163-167.
- [10] FOSTER, R. M.: "Geometrical circuits of electrical networks". *Trans. A. I. E. E.* **51** (1932) 309-317.
- [11] FRUHT, R.: "Graphs of degree 3 with a given abstract group". *Canadian Journal of Mathematics* **1** (1949) 365-378.
- [12] GILBERT, E. N.: "Enumeration of labeled graphs". *Canadian Journal of Mathematics* **8** (1956) 405-411.
- [13] GILBERT, E. N.: "Gray codes and paths on the n -cube". *Bell System Technical Journal* **37** (1958) 815-826.
- [14] GOLOMB, S.: "Dominoes, pentominoes and checker boards". Unpublished manuscript, 1959.
- [15] HARARY, F.: "On the notion of balance of a signed graph". *Michigan Mathematical Journal* **2** (1953-54) 143-146.

- [16] HARARY, F.: "The number of linear, directed, rooted, and connected graphs". *Transactions of the American Mathematical Society* **78** (1955) 445—463.
- [17] HARARY, F.: "Note on the Pólya and Otter formulas for enumerating trees". *Michigan Mathematical Journal* **3** (1955—56) 109—112.
- [18] HARARY, F.: "Note on an enumeration theorem of Davis and Slepian". *Michigan Mathematical Journal* **3** (1955—56) 149—153.
- [19] HARARY, F.: "On the number of dissimilar line-subgraphs of a given graph". *Pacific Journal of Mathematics* **6** (1956) 57—64.
- [20] HARARY, F.: "The number of dissimilar supergraphs of a linear graph". *Pacific Journal of Mathematics* **7** (1957) 903—911.
- [21] HARARY, F.: "The number of oriented graphs". *Michigan Mathematical Journal* **4** (1957) 221—224.
- [22] HARARY, F.: "On the number of dissimilar graphs between a given graph-subgraph pair". *Canadian Journal of Mathematics* **10** (1958) 513—516.
- [23] HARARY, F.: "On the number of bicolored graphs". *Pacific Journal of Mathematics* **8** (1958) 743—755.
- [24] HARARY, F.: "On the group of a graph with respect to a subgraph". *Journal of London Mathematical Society* **33** (1958) 457—461.
- [25] HARARY, F.: "Note on Carnap's relational asymptotic relative frequencies". *Journal of Symbolic Logic* **23** (1958) 257—260.
- [26] HARARY, F.: "The number of functional digraphs". To appear in *Math. Annalen*, 1959.
- [27] HARARY, F.: "Exponentiation of permutation groups". To appear in *American Mathematical Monthly*, 1959.
- [28] HARARY, F.: "Feynman's simplification of the Kac—Ward treatment of the two-dimensional Ising problem". Unpublished manuscript, June 12, 1958.
- [29] HARARY, F. and NORMAN, R. Z.: "The dissimilarity characteristic of Husimi trees". *Annals of Mathematics* **58** (1953) 134—141.
- [30] HARARY, F. and NORMAN, R. Z.: "Dissimilarity characteristic theorems for graphs". To appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1960.
- [31] HARARY, F. and PRINS, G.: "The number of homeomorphically irreducible trees, and other species". *Acta Math.* **101** (1959) 141—162.
- [32] HARARY, F. and UHLENBECK, G. E.: "On the number of Husimi trees, I." *Proceedings of the National Academy of Science, U.S.A.* **39** (1953) 315—322.
- [33] HOFFMAN, A. J.: "On the uniqueness of the triangular association scheme". To appear in *Annals Math. Stat.*, 1960.
- [34] HUSIMI, K.: "Note on Mayer's theory of cluster integrals". *J. Chem. Physics* **18** (1950) 682—684.
- [35] ISING, E.: "Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus". *Z. Physik* **31** (1925) 253—258.
- [36] KAC, M. and WARD, J. C.: "A combinatorial solution of the two-dimensional Ising model". *Phys. Rev.* **88** (1952) 1332—1337.
- [37] KATZ, L. and POWELL, J. H.: "The number of locally restricted directed graphs". *Proc. Amer. Math. Soc.* **5** (1954) 621—626.
- [38] KIRCHHOFF, G.: "Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischen Ströme geführt wird". *Annalen der Physik und Chemie* **72** (1847) 497—508.
- [39] KÖNIG, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, 1936; reprinted New York, 1950.
- [40] KRAUSZ, J.: "Demonstration nouvelle d'une théorème de Whitney sur les resaux" (in Hungarian). *Mat. Fiz. Lapok* **50** (1943) 75—85.
- [41] NEWELL, G. F. and MONTROLL, E. W.: "On the theory of the Ising model of ferromagnetism". *Rev. Modern Phys.* **25** (1953) 353—389.
- [42] NORMAN, R. Z.: "On the number of linear graphs with given blocks". Doctoral dissertation. University of Michigan, 1954.
- [43] ONSAGER, L.: "Crystal statistics I, a two-dimensional model with an order—disorder transition". *Phys. Rev.* **65** (1944) 117—149.
- [44] OTTER, R.: "The number of trees". *Annals of Math.* **49** (1948) 583—599.
- [45] PÓLYA, G.: "Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen, und chemische Verbindungen". *Acta Math.* **68** (1937) 145—254.
- [46] PÓLYA, G.: "Sur les types des propositions composées". *J. Symbolic Logic* **5** (1940) 98—103.
- [47] PÓLYA, G.: "On picture-writing". *Amer. Math. Monthly* **63** (1956) 689—697.

- [48] PRINS, G.: "The automorphism group of a tree". Doctoral dissertation, University of Michigan, 1957.
- [49] READ, R. C.: "The enumeration of locally restricted graphs I". *J. London Math. Soc.* **34** (1959) 417—436.
- [50] RIORDAN, J. and SHANNON, C. E.: "The number of two-terminal series-parallel networks". *J. of Math. and Physics* **21** (1942) 83—93.
- [51] RIORDAN, J.: "The numbers of labeled colored and chromatic trees". *Acta Math.* **97** (1957) 211—225.
- [52] RIORDAN, J.: *An introduction to combinatorial analysis*. New York, 1958.
- [53] SENIOR, J. K.: "Partitions and their representative graphs", *Amer. J. Math.* **73** (1951) 663—689.
- [54] SHRIKHANDE, S. S.: "On a characterization of the triangular association scheme". *Annals Math. Stat.* **30** (1959) 39—47.
- [55] SLEPIAN, D.: "On the number of symmetry types of Boolean functions of n variables". *Canadian Journal of Mathematics* **5** (1953) 185—193.
- [56] VETUCHNOVSKY, F. Y.: "On the number of indecomposable nets and some of their properties". *Doklady Ak. Nauk, U. S. S. R.* **123** (1958) 391—394.
- [57] VYSSOTSKY, V. A.: "A counting problem for finite automata". Bell Telephone Labs. memorandum, May 1959.
- [58] WHITNEY, H.: "Congruent graphs and the connectivity of graphs". *Amer. J. Math.* **54** (1932) 150—168.
- [59] WHITNEY, H.: "Non-separable and planar graphs". *Trans. Amer. Math. Soc.* **34** (1932) 339—362.
- [60] WINE, R. L. and FREUND, J. E.: "On the enumeration of decision patterns involving n means". *Ann. Math. Stat.* **28** (1957) 256—259.

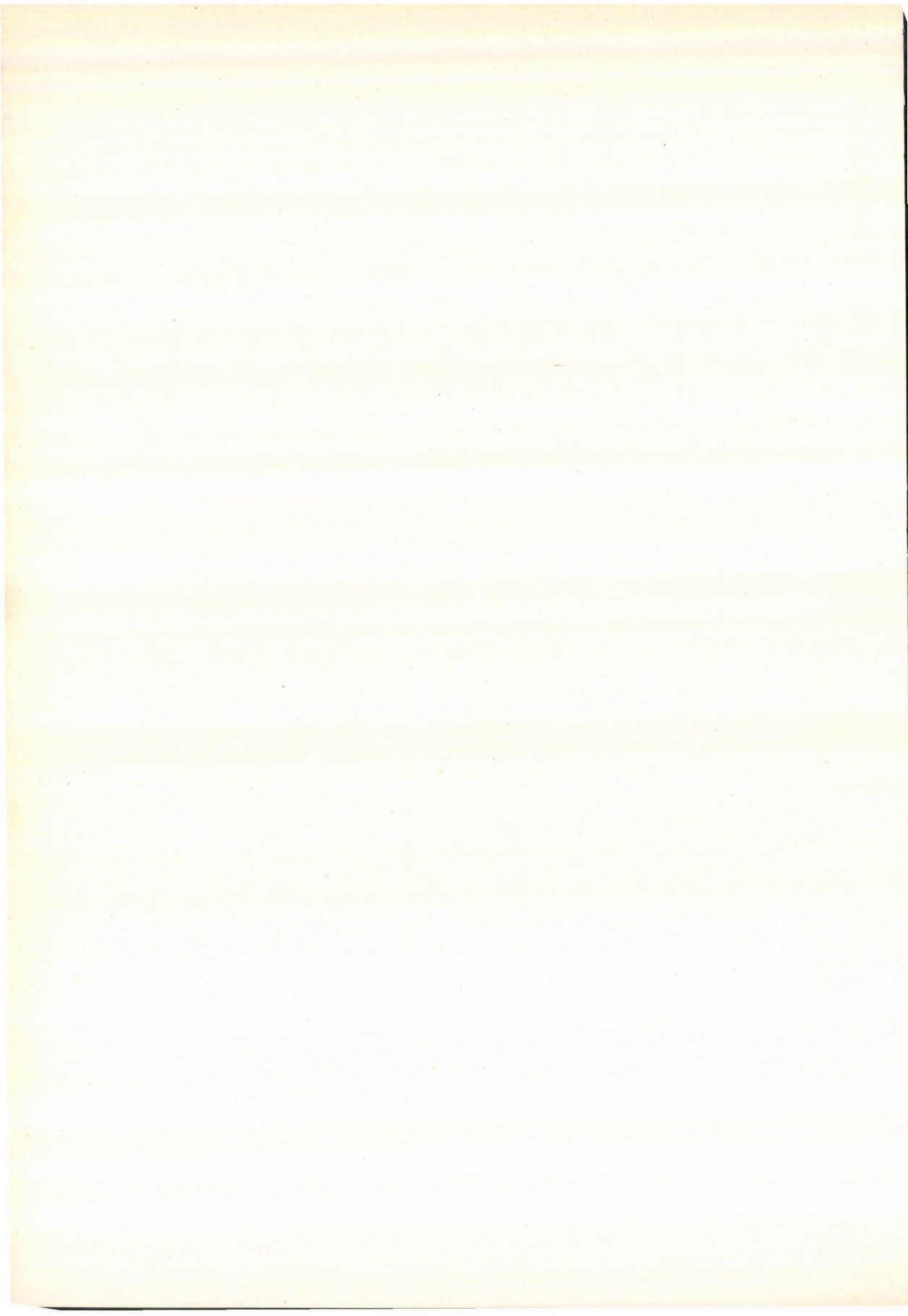
НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ О ПЕРЕЧИСЛЕНИИ ГРАФОВ

F. HARARY

Резюме

Цель работы указать на ряд проблем относительно перечисления графов, чтобы вызвать интерес математиков к таким проблемам. Кажется маловероятным, что в скором будущем все эти проблемы будут решены, так как среди них фигурирует и гипотеза о четырех цветах.

Сначала характеризуется значение проблемы о перечислении графов и направленных графов. Затем работа знакомит с основными понятиями, необходимых для того, чтобы можно было кратко сформулировать нерешенные проблемы. Далее приводятся (без доказательства) некоторые методы, которые, применяются в этой области, среди них наиболее важным является элегантный и эффективный метод Рёбхуса [45]. Этот метод, или некоторое его видоизменение применяюся в большинстве известных решений этих проблем. Сравняются проблемы относительно числа деревьев различных сортов с аналогичными проблемами относительно графов. Автор дает список 27 решенных и 27 нерешенных проблем. (см. стр. 86 и 68.) Он указывает на их значение и связанные с ними трудности. Упомянется также вычисление асимптотического числа графов различных сортов. В связи с темой дается обширная библиография.



REMARQUE SUR LA SOMMABILITÉ DES SÉRIES DE TAYLOR SUR LEURS CERCLES DE CONVERGENCE, III.

par

LÁSZLÓ ALPÁR

*Dédié au professeur Paul Turán
à l'occasion de son 50-ième anniversaire.*

§ 1. Introduction

Cette troisième partie du présent ouvrage expose une généralisation des résultats obtenus par M. P. TURÁN [1] et par l'auteur [2], [3]. Les deux théorèmes que nous allons démontrer contiennent, comme leurs cas particuliers, les propositions développées dans les travaux cités, sauf celui dû à M. TURÁN concernant la sommabilité Abel des séries envisagées. Rappelons brièvement les problèmes en question et les résultats déjà établis.

Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions régulières dans le cercle $|z| < 1$ liées par la relation

$$(1.1) \quad f_2(z) = f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right)$$

où $\zeta_0 = re^{i\alpha}$ est un point fixe ($0 < r < 1$, $0 \leq \alpha < 2\pi$). La relation (1.1) fait correspondre à la série de Taylor

$$(1.2) \quad f_1(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$$

la série de Taylor

$$(1.3) \quad f_2(z) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z^v.$$

Désignons de plus par z_1 et z_2 deux points homologues dans la transformation homographique

$$(1.4) \quad z_1 = \frac{z_2 - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z_2}.$$

Si $|z_1| < 1$, on a aussi $|z_2| < 1$, et selon l'hypothèse formulée sur $f_1(z)$ et $f_2(z)$

$$(1.5) \quad f_1(z_1) = f_2(z_2),$$

$$(1.6) \quad \sum_{v=0}^{\infty} a_v z_1^v = \sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z_2^v.$$

Par contre, si $|z_1| = 1$, et par suite $|z_2| = 1$, on ne peut rien affirmer sur les expressions (1.5) et (1.6) sans faire des hypothèses supplémentaires sur

$f_1(z)$. Supposons donc que $f_1(z)$ est définie en ce point z_1 ($|z_1| = 1$) et que la série (1.2) y est convergente, ce qui revient à dire que $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$. La relation

(1.5) ne cesse pas de subsister et l'on est porté à croire que la série (1.3) est également convergente au point correspondant z_2 et que l'égalité (1.6) reste valable. Cette impression est encore confirmée par les faits suivants: a) Dans la plupart des cas où $f_1(z)$ est une des fonctions élémentaires habituellement considérées, la convergence de la série (1.2) au point z_1 ($|z_1| = 1$) entraîne en effet celle de la série (1.3) au point z_2 , et les deux séries ont la même somme.

b) Si $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$, la convergence de la série $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ sur la frontière de son cercle

de convergence est une propriété locale et l'on attendrait que cette convergence soit conservée après une transformation analytique de la variable z , comme dans notre cas où l'on substitue z par une fonction régulière dans le cercle fermé $|z| \leq 1$ [cf. (1.1)].

Or, une étude approfondie ne vérifie pas cette présomption. En effet, en posant $z_1 = 1$, et selon (1.4) $z_2 = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$, ce qui n'affecte pas la généralité de ces recherches, M. P. TURÁN a démontré [1] que pour chaque ζ_0 donné on peut trouver des fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$ telles que, malgré la convergence de la série

$$(1.7) \quad \sum_{v=0}^{\infty} a_v,$$

la série

$$(1.8) \quad \sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \right)^v$$

soit divergente. M. TURÁN a encore prouvé que si la série (1.2) est sommable Abel au point $z = 1$, la série (1.3) possède cette même propriété au point $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$ pour toutes les fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$.

Ces deux théorèmes de M. TURÁN de caractères opposés amènent à poser la question naturelle : quelle conclusion pourrait-on tirer dans le même problème en utilisant un procédé de sommation plus puissant que la sommation des séries au sens élémentaire, mais moins puissant que celui d'Abel? Le procédé de sommation (C, k) , avec $0 < k < \infty$, possède cette propriété et est en même temps le plus couramment utilisé. C'est cette circonstance qui suggère l'idée de comparer les séries (1.7) et (1.8) du point de vue de leur sommabilité (C, k) . Ainsi, en généralisant le théorème de M. TURÁN, nous avons démontré [2] que pour chaque k entier positif et ζ_0 donnés on peut trouver des fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$ telles que, malgré la sommabilité (C, k) de la série (1.7), la série (1.8) ne soit pas sommable (C, k) .

Nous avons démontré ensuite [3] un théorème de sens inverse, notamment si k est un entier non négatif, la sommabilité (C, k) de la série (1.7) assure toujours la sommabilité $(C, k + 1)$ de la série (1.8). Ce dernier résultat permet de prévoir d'une manière heuristique le théorème de M. TURÁN concernant la sommabilité Abel des séries en question, à savoir le procédé de som-

mation d'Abel peut souvent être considéré comme le cas limite du procédé de sommation (C, k) quand $k \rightarrow \infty$, mais «alors on ne fait pas de distinction entre k et $k+1$ ».

Au cours des recherches que nous venons d'esquisser nous avons supposé que l'ordre k de la sommation est un entier non négatif, bien que cette condition ne s'impose pas d'elle même; et il semble comme une suite logique de ce qui précède d'étendre nos investigations aux cas où k n'est pas un entier, mais réel et non négatif. On se demande également si l'ordre $k+1$ de la sommabilité de la série (1.8) est le plus petit possible, ou bien s'il existe un nombre δ , $0 < \delta < 1$, tel que la sommabilité (C, k) de la série (1.7) entraîne la sommabilité $(C, k+\delta)$ de la série (1.8). M. M. RIESZ, en généralisant le théorème de FEJÉR, avait établi [4] que les séries de Fourier sont déjà sommables (C, δ) , si petit que soit le nombre positif δ . En évoquant ce résultat de M. RIESZ, nous nous attendions à trouver un phénomène analogue dans le problème qui nous occupe. Plus précisément nous avons cru que pour un $k \geq 0$ quelconque, la sommabilité (C, k) de la série (1.7) implique toujours la sommabilité $(C, k+\delta)$ de la série (1.8) pour chaque $\delta > 0$. Or, nous allons démontrer d'une part que lorsque la série (1.7) est sommable (C, k) , la série (1.8) est certainement sommable $(C, k+\delta)$ si $\delta \geq \frac{1}{2}$; d'autre part que l'on peut trou-

ver des fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$ telles que, malgré la sommabilité (C, k) de la série (1.7), la série (1.8) ne soit pas sommable $(C, k+\delta)$

si $\delta < \frac{1}{2}$.

Avant d'énoncer ces résultats sous forme de théorèmes précis, nous y ajouterons quelques remarques. Désignons comme dans les parties I et II ([2], [3]) par $\alpha_n^{(k)}$ la n -ième moyenne (C, k) de la série (1.7) et par $\beta_n^{(k)}$ celle de la série (1.8). $\alpha_n^{(k)}$ et $\beta_n^{(k)}$ sont aussi définies pour k non entiers positifs ou négatifs ([5], pp. 95—96) et en particulier pour $k \geq 0$. Les relations que nous avons établies entre les $\alpha_n^{(k)}$ et les a_v respectivement entre les $\beta_n^{(k)}$ et les $b_v(\zeta_0) \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} \right)^v$ ([2], (2.6), (2.8)) ne sont pas non plus altérées si $k \geq 0$ n'est pas un entier. La formule ([2], (2.16)) qui exprime $\beta_n^{(k)}$ à l'aide des $\alpha_v^{(k)}$

$$(1.9) \quad \beta_n^{(k)} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\binom{v+k}{k}}{\binom{n+k}{k}} p_{nv}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_v^{(k)}$$

reste également valable, les coefficients binomiaux étant aussi définis pour les $k \geq 0$; enfin $p_{nv}^{(k)}(\zeta_0)$ donné par la formule ([2], (2.15)):

$$(1.10) \quad p_{nv}^{(k)}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} \right)^n \int_{|\omega|=\varrho} \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0} \right)^{n+1} (1+\bar{\zeta}_0\omega)^{k-1} d\omega$$

ne perd pas son sens si ϱ est une constante et $r < \varrho < \frac{1}{r}$ ($r = |\zeta_0|$) pour des $k \geq 0$ quelconques. Cependant la démonstration que nous avons dévelop-

pée dans la partie I ([2]) ne s'applique plus, car nous y avons fait usage des dérivées d'ordre k entier. Afin d'arriver à notre but, nous devons choisir maintenant une voie différente.

Ces remarques faites, nous pouvons énoncer les théorèmes suivants:

Théorème 1. Soient $k \geq 0$, $\delta \geq \frac{1}{2}$ deux nombres donnés, $\zeta_0 \neq 0$ un point fixe dans le cercle $|z| < 1$, et $f_1(z)$ une fonction régulière dans le même cercle, dont la série de Taylor est sommable (C, k) au point $z = 1$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(k)}$ existe. Alors la série déterminée par la relation

$$(1.11) \quad f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z^v$$

est sommable $(C, k + \delta)$ au point $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(k+\delta)}$ existe aussi, et

$$(1.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(k+\delta)}.$$

À vrai dire il suffirait de démontrer le théorème 1 pour $\delta = \frac{1}{2}$, lequel serait déjà une conséquence du théorème d'inclusion pour $\delta > \frac{1}{2}$. Mais des raisons diverses nous ont amenées à garder dans l'énoncé du théorème 1 la notation $\delta \geq \frac{1}{2}$. Tout d'abord la démonstration du théorème 1 pour $\delta > \frac{1}{2}$ s'effectue à l'aide d'une méthode analogue à celle que nous avons appliquée dans la partie II ([3], § 4, où k est un entier non négatif et $\delta = 1$), tandis que pour $\delta = \frac{1}{2}$ la démonstration du théorème 1 exige des considérations nouvelles et plus délicates. En outre la démonstration du théorème 1 pour $\delta > \frac{1}{2}$ nous fournira certains lemmes nécessaires pour mener à bien la démonstration dans le cas de $\delta = \frac{1}{2}$. Au cours de la démonstration, nous supposerons de plus que $\delta \leq 1$, ce qui simplifie nos raisonnements, mais n'introduit aucune restriction vu le théorème d'inclusion.

On obtient un cas particulier important du théorème 1 pour $k = 0$:

Corollaire. La convergence de la série (1.7) implique toujours la sommabilité $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ de la série (1.8) et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(1/2)}.$$

Au cas où $\delta < \frac{1}{2}$ nous obtenons un résultat de sens inverse.

Théorème 2. Soient $k \geq 0$, $\delta < \frac{1}{2}$ deux nombres donnés, $\zeta_0 \neq 0$ un point fixe dans le cercle $|z| < 1$. Alors on peut trouver des fonctions $f_1(z)$

régulières dans le cercle-unité, dont la série de Taylor est sommable (C, k) au point $z = 1$, autrement dit $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(k)}$ existe, mais la série déterminée par la relation

$$(1.11) \text{ n'est pas sommable } (C, k + \delta) \text{ au point } z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(k+\delta)} \text{ n'existe pas.}$$

La démonstration se simplifie en supposant $\delta > 0$ mais en raison du théorème d'inclusion ce n'est qu'une restriction apparente.

Pour $k = 0$ le théorème 2 représente une amélioration du théorème de M. TURÁN. En effet, le théorème 2 exprime que ce n'est pas seulement la convergence de la série (1.8) qui n'est pas assurée par la convergence de la série (1.7), mais celle-ci n'implique même pas la sommabilité $(C, k + \delta)$ de la première série si $\delta < \frac{1}{2}$.

L'idée de la démonstration est d'établir entre les $\alpha_n^{(k)}$ et les $\beta_n^{(k+\delta)}$ une relation de la forme

$$(1.13) \quad \beta_n^{(k+\delta)} = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \alpha_v^{(k)}$$

où les $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ sont indépendants du choix particulier de $f_1(z)$ et ne dépendent que de ζ_0 , k , δ , n et v . La relation (1.13) définit un procédé de sommation linéaire, et son examen est l'objet essentiel de nos investigations. Il sera établi que ce procédé n'est pas régulier pour $\delta < \frac{1}{2}$, tandis que pour $\delta \geq \frac{1}{2}$ les conditions de la régularité de Toeplitz—Schur sont réalisées:

I. $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 0$ pour chaque v fixé;

II. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 1$;

III. il existe une constante $K^{(k,\delta)} > 0$ telle que l'inégalité

$$(1.14) \quad \sum_{v=0}^{\infty} |\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)| < K^{(k,\delta)}$$

est vérifiée indépendamment de n .

On verra que les conditions I et II sont remplies pour tous les $\delta \geq 0$. C'est l'examen de la condition III, donc l'évaluation de la série (1.14), qui offre les difficultés principales. Pour $\delta > \frac{1}{2}$ l'existence de la constante $K^{(k,\delta)}$ sera démontrée en suivant une voie analogue à celle de la partie II ([3], § 4). Mais cette méthode devient inefficace pour $\delta = \frac{1}{2}$ ou $\delta < \frac{1}{2}$. On étudiera dans ces cas la condition III en utilisant un autre procédé. Notamment l'expression asymptotique de $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ sera représentée par une intégrale de la forme

$$\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \approx g_{nv} = \frac{c_n^{(k+\delta)}}{2\pi i} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \int_{L_{nv}} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^{k+\delta} \omega^\nu}{(1-\omega)^\delta (\omega+\zeta_0)} \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0} \right)^n d\omega$$

où $c_n^{(k+\delta)}$ est une constante et le contour d'intégration L_{nv} une courbe fermée entourant le pôle $\omega = -\zeta_0$. Nous devons déterminer la valeur de g_{nv} pour un n assez grand, mais fixé et pour chaque ν . La structure de cette intégrale suggère l'idée de recourir à la méthode du col. Toutefois l'emploi direct de cette méthode se heurte actuellement à certains obstacles que nous voudrions brièvement décrire.

Les oeuvres traitant des expressions asymptotiques des intégrales dépendant de deux ou plusieurs paramètres n'embrassent pas des problèmes très variés. Elles se rapportent essentiellement aux recherches des fonctions de Bessel, lorsque l'argument et l'ordre de ces fonctions tendent simultanément vers l'infini ([6], pp. 225—270). Le procédé consiste à tenir constant le quotient de ces deux paramètres (tout en discutant les trois cas où ce rapport est supérieur, égal ou inférieur à 1) et à obtenir par là un col et un contour d'intégration invariable dans chaque cas donné. Le problème à deux paramètres se réduit ainsi à un problème à un paramètre.

MM. W. FULKS [7] et D. L. THOMSEN Jr. [8] ont élaboré certaines généralisations de la méthode de Laplace pour déterminer les valeurs asymptotiques d'intégrales réelles dépendant de deux resp. de trois paramètres. M. FULKS considère les intégrales de la forme

$$J_{h,k} = \int_0^b f(t) e^{-h\Phi(t)+k\Psi(t)} dt$$

où b est une constante, $h, k \rightarrow \infty$ sont des paramètres. M. THOMSEN envisage les intégrales du type

$$J_{h,k,a} = \int_0^a f(t) e^{-h\Phi(t)+k\Psi(t)} dt$$

qui diffèrent des précédentes par le fait que $a \rightarrow 0$ est aussi un paramètre. Les hypothèses communes qu'ils adoptent tous les deux sont les suivantes: le rapport h/k n'est pas constant, mais $h \gg k$; $\Phi(t), \Psi(t), f(t)$ sont indépendantes des paramètres et ainsi, en supposant de plus que $\Phi(0) = 0, \Phi'(0) = 0, \Phi''(0) > 0, \Psi(0) = 0$, les valeurs asymptotiques des $J_{h,k}$ et $J_{h,k,a}$ sont toujours fournies par les contributions des intégrales prises dans le voisinage de l'origine.

Il convient de signaler encore l'ouvrage intéressant de M. A. BÉKÉSSY [9] qui étudie, à l'aide de la méthode de Laplace, le comportement asymptotique de l'intégrale suivante:

$$p_n(k|j) = \binom{k-2}{j-2} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty u^{n-1} e^{-ju} (1-e^{-u})^{k-j} du$$

où $j, k, n \rightarrow \infty$ sont des paramètres ($p_n(k|j)$ signifie une probabilité conditionnelle). Pour pouvoir appliquer la méthode de Laplace, l'auteur distingue quatre éventualités possibles dont chacune s'exprime par une relation entre les para-

mètres, et en conséquence il remplace la fonction à intégrer par une expression nouvelle où les paramètres ne figurent pas seulement comme exposants. C'est ainsi que la valeur asymptotique de $p_n(k|j)$ est donnée par une intégrale prise dans le voisinage d'un point qui varie avec les paramètres et de même l'intervalle de l'intégration change aussi bien sa place que sa longueur.

Cependant dans les cas énumérés il s'agissait toujours de la valeur asymptotique d'intégrales considérées en elles-mêmes sans tenir compte de leurs relations avec d'autres expressions analogues. C'est pourquoi une relation entre les paramètres une fois adoptée, qui introduit certaines complications dans les calculs, le col et la voie d'intégration ou bien sont restés invariables, ou bien leur changement avec les paramètres n'a pas eu une importance particulière, malgré la discussion inévitable de certaines possibilités. Par contre nous envisageons une somme dont chaque terme est représenté par une intégrale et la détermination de la valeur asymptotique de chacune de ces intégrales s'effectue au moyen des cols et d'un contour d'intégration qui varient d'une intégrale à l'autre. Cette circonstance est la conséquence de la structure particulière de la fonction à intégrer qui figure dans l'expression de g_{nv} . On sait que les cols doivent être cherchés parmi les racines de l'équation

$\left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}\right)' = 0$, mais cette équation n'a pas de racines finies. Cet obstacle

s'élimine en introduisant le paramètre $\lambda = \frac{\nu}{n}$, et en envisageant par la suite

la fonction $\left(\omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}\right)^n$ au lieu de $\left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}\right)^n$. L'équation $\left(\omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}\right)' = 0$

a déjà deux racines finies, mais qui dépendent de λ et par suite les cols et les contours d'intégration varient avec λ . Dans notre cas, le contour d'intégration doit passer par tous les deux cols correspondants et de cette façon on obtient $|g_{nv}|$, pour chaque ν , comme la somme de deux expressions asymptotiques qui est suffisamment petite pour que $\sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{nv}|$ soit uniformément bornée

en n si $\delta = \frac{1}{2}$; et cette somme est assez grande pour que $\sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{nv}|$ dépasse

toute limite avec n si $\delta < \frac{1}{2}$. Pour certaines valeurs de λ les deux cols se

rapprochent arbitrairement l'un de l'autre, tandis que pour d'autres valeurs de λ un des cols au moins se trouve dans le voisinage du point $\omega = 1$ et la fonction à intégrer ne reste pas bornée. Nous avons à discuter à plusieurs reprises séparément les cas où ζ_0 est réel et ceux où ζ_0 est complexe. Enfin puisque nous examinons la somme des valeurs asymptotiques, il ne suffit pas de déterminer la partie principale du développement asymptotique de chaque intégrale, mais il faut aussi évaluer la somme des restes.

La régularité du procédé de sommation (1.13) et la formule (1.12) seront ainsi vérifiées pour $\delta \geq \frac{1}{2}$ et le théorème 1 sera démontré.

On trouvera de cette manière pour $\delta < \frac{1}{2}$ que la condition III de la régularité n'est pas réalisée pour le procédé de sommation (1.13). Par conséquent

il existe des suites convergentes qui se transforment en suites divergentes par la matrice $[\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)]$. Soit $\{\alpha_n^*\}$ une de ces suites convergentes et $\{\beta_n^*\}$ sa transformée divergente. Alors la fonction

$$\begin{aligned} f_1^*(z) &= (1-z)^{k+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+k}{k} \alpha_v^* z^v = \\ (1.15) \quad &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \binom{k+1}{\mu} z^\mu \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+k}{k} \alpha_v^* z^v = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v^* z^v \end{aligned}$$

est régulière pour $|z| < 1$, où $(1-z)^{k+1}$ est définie par sa détermination principale. Or, la formule (1.15) n'est autre que la relation classique entre les α_v et les $\alpha_v^{(k)}$. Posons donc $\alpha_v^* = \alpha_v^{(k)}$, $\alpha_v^* = \alpha_v$, alors $f_1^*(z)$ est la fonction $f_1(z)$ qui vérifie les conditions du théorème 2 et $\beta_n^* = \beta_n^{(k+\delta)}$. Ce qui complète la démonstration du théorème 2.

*

Nous tenons particulièrement à exprimer nos remerciements les plus vifs à M. J. CZIPSZER pour ses précieuses remarques qu'il a apportées en lisant le manuscrit de ce présent ouvrage.

§ 2. Le procédé de sommation

On démontre dans la théorie du procédé de sommation de Cesàro que $\beta_n^{(k+\delta)}$ s'exprime par les $\beta_m^{(k)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) ([5] p. 101):

$$\begin{aligned} \beta_n^{(k+\delta)} &= \frac{1}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \sum_{m=0}^n \binom{n-m+\delta-1}{\delta-1} \binom{m+k}{k} \beta_m^{(k)} = \\ (2.1) \quad &= \frac{1}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \sum_{m=0}^n \binom{m+\delta-1}{\delta-1} \binom{n-m+k}{k} \beta_{n-m}^{(k)}. \end{aligned}$$

En tenant compte de la formule (1.9)

$$(2.2) \quad \beta_{n-m}^{(k)} = \frac{1}{\binom{n-m+k}{k}} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+k}{k} p_{n-m,v}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_v^{(k)}.$$

Ainsi il découle des relations (2.1) et (2.2)

$$\begin{aligned} \beta_n^{(k+\delta)} &= \frac{1}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \sum_{m=0}^n \binom{m+\delta-1}{m} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+k}{k} p_{n-m,v}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_v^{(k)} = \\ (2.3) \quad &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\binom{m+\delta-1}{m}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \binom{v+k}{k} p_{n-m,v}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_v^{(k)} = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \alpha_v^{(k)} \end{aligned}$$

où $p_{n-m,v}^{(k)}(\zeta_0)$ est donné par l'expression (1.10),

et par suite

$$(2.4) \quad \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \frac{\binom{v+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \int_{|\omega|=1} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^k}{\omega+\zeta_0} \omega^v \sum_{m=0}^n \binom{m+\delta-1}{m} \left| \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} \frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0} \right|^{n-m} d\omega.$$

La formule (2.3) représente le procédé de sommation cherché. Nous pouvons constater dans l'expression (2.4) que $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ ne dépend pas du choix particulier de $f_1(z)$. La relation (2.4) sera remplacée plus tard par des expressions asymptotiques.

§ 3. Les deux premières conditions de la régularité

La démonstration du théorème 1 s'effectue en vérifiant que les éléments de la matrice $[\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)]$ donnés par la relation (2.4) remplissent les trois conditions de la régularité de Toeplitz—Schur. En ce qui concerne les conditions I et II nous avons déjà observé dans le § 1 qu'elles sont réalisées non seulement pour $\delta \geq \frac{1}{2}$, mais même pour $\delta \geq 0$. Nous admettrons donc dans ce § que $k \geq 0$, $\delta \geq 0$.

La vérification des conditions I et II se base sur des choix particuliers de $f_1(z)$, ce qui est permis, puisque d'après (2.4) les $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ sont les mêmes quelle que soit $f_1(z)$ régulière dans le cercle $|z| < 1$.

I. $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 0$ pour chaque v fixé.

Démonstration. Soit

$$(3.1) \quad f_1(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu} z^{\mu}$$

une fonction régulière dans le cercle-unité telle que $\alpha_{\lambda}^{(k)} = 0$ si $\lambda \neq v$, et $\alpha_v^{(k)} = 1$. Selon cette hypothèse et la relation (1.15), on a

$$(3.2) \quad f_1(z) = (1-z)^{k+1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{\lambda+k}{k} \alpha_{\lambda}^{(k)} z^{\lambda} = \binom{v+k}{k} z^v (1-z)^{k+1}.$$

On lira de (3.2) que $a_{\mu} = 0$ si $\mu < v$ et

$$(3.3) \quad f_1(1) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha_{\lambda}^{(k)} = 0.$$

D'autre part en vertu de la définition (1.1) de $f_2(z)$ on peut écrire

$$(3.4) \quad f_2(z) = \binom{v+k}{k} \left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z} \right)^v \left[\frac{1+\zeta_0-(1+\bar{\zeta}_0)z}{1-\bar{\zeta}_0 z} \right]^{k+1} = \\ = (1+\zeta_0)^{k+1} \frac{(z-\zeta_0)^v}{(1-\bar{\zeta}_0 z)^{v+k+1}} \binom{v+k}{k} \left(1 - \frac{1+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0} z \right)^{k+1}$$

et par suite

$$(3.5) \quad f_2 \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\mu}(\zeta_0) \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \right)^{\mu} = 0.$$

Or, $k + \delta \geq 0$, on tire donc de la relation (3.5) que

$$(3.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(k+\delta)} = 0.$$

Exprimons maintenant $\beta_n^{(k+\delta)}$ au moyen de la formule (2.3), en tenant compte du choix particulier des $\alpha_{\lambda}^{(k)}$

$$(3.7) \quad \beta_n^{(k+\delta)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_{n\lambda}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \alpha_{\lambda}^{(k)} = \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0),$$

et ainsi de (3.6) et (3.7)

$$(3.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 0.$$

v étant arbitraire, la relation (3.8) est valable pour tous les $v \geq 0$ entiers. La condition I est donc réalisée.

$$\text{II. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 1.$$

Démonstration. Soit maintenant $f_1(z) = 1$. Alors

$$\alpha_v^{(k)} = 1 \quad (v = 0, 1, 2, \dots); \quad f_2(z) \equiv 1, \quad \beta_n^{(k+\delta)} = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

et par l'expression (2.3)

$$(3.9) \quad \beta_n^{(k+\delta)} = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \alpha_v^{(k)} = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 1.$$

Par conséquent la condition II est réalisée.

§ 4. Expression asymptotique de $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$

L'expression (2.4) de $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ n'est pas appropriée aux calculs. Pour cette raison nous cherchons à la remplacer par une formule asymptotique plus adéquate. Soit à nouveau $r < |\omega| = \varrho < 1$ et

$$\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} = \frac{1}{y},$$

donc $\max_{|\omega|=\varrho} |y| = y_0 < 1$. On écrira ainsi

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sum_{m=0}^n \binom{m+\delta-1}{m} \frac{1}{y^{n-m}} &= \frac{1}{y^n} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+\delta-1}{\delta-1} y^m - \sum_{m=n+1}^{\infty} \binom{m+\delta-1}{\delta-1} y^m \right] = \\ &= \frac{1}{y^n(1-y)^{\delta}} - y \sum_{m=n+1}^{\infty} \binom{m+\delta-1}{\delta-1} y^{m-(n+1)} = A_n - B_n, \end{aligned}$$

d'où en vertu de (2.4)

$$\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = \frac{c^{(k)}}{2\pi i} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \left[\int_{|\omega|=\varrho} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^k \omega^\nu}{\omega+\zeta_0} A_n d\omega - \int_{|\omega|=\varrho} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^k \omega^\nu}{\omega+\zeta_0} B_n d\omega \right] =$$

$$(4.2) \quad = g_{nv} - g'_{nv}$$

où

$$(4.3) \quad c^{(k)} = \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k}.$$

Nous allons vérifier que

$$(4.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |g'_{nv}| = 0.$$

g_{nv} peut donc être considéré comme l'expression asymptotique de $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ dans l'évaluation de la série (1.14).

D'après les formules (4.1) et (4.2):

$$(4.5) \quad |g'_{nv}| \leq |c^{(k)}| \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \frac{\varrho^{\nu+1}}{\varrho-r} (1+r\varrho)^k \sum_{m=n+1}^{\infty} \binom{m+\delta-1}{\delta-1} y_0^{m-(n+1)}.$$

Or, les relations suivantes sont valables pour les grandes valeurs de n , en supposant de plus que $m \geq n+1$ et $0 < \delta \leq 1$:

$$(4.6) \quad \binom{n+k+\delta}{k+\delta} = O(n^{k+\delta}), \quad \binom{m+\delta-1}{\delta-1} = O(m^{\delta-1}) = O(n^{\delta-1}).$$

Il s'ensuit par (4.5) que

$$(4.7) \quad |g'_{nv}| = O(n^{-k-\delta}) \binom{\nu+k}{k} \varrho^{\nu+1} O(n^{\delta-1}) \sum_{m=n+1}^{\infty} y_0^{m-(n+1)} = O(n^{-k-1}) \binom{\nu+k}{k} \varrho^{\nu+1}.$$

Par conséquent

$$(4.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g'_{nv} = 0,$$

et en vertu de (4.2) et (4.8)

$$(4.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{nv}.$$

Mais l'expression (4.7) permet d'en tirer de plus que

$$(4.10) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |g'_{nv}| = O(n^{-k-1}) \frac{\varrho}{(1-\varrho)^{k+1}}$$

et il en découle déjà (4.4). Il résulte de (4.2) et (4.10) que

$$(4.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{n\nu}|.$$

Il suffira donc d'examiner le membre droit de l'égalité (4.11).

Pour terminer ce §, écrivons encore $g_{n\nu}$ dans sa forme explicite:

$$(4.12) \quad g_{n\nu} = \frac{c_n^{(k+\delta)}}{2\pi i} \binom{\nu+k}{k} \int_{|\omega|=q} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^{k+\delta-1}\omega^\nu}{(1-\omega)^\delta} \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0} \right)^{n+1} d\omega,$$

où

$$c_n^{(k+\delta)} = \frac{(1+\zeta_0)^{k+\delta+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+\delta}} \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0} \right)^n.$$

L'expression (4.12) peut prendre aussi la forme

$$(4.13) \quad g_{n\nu} = \frac{C_\delta}{2\pi i} \binom{\nu+k}{k} \int_{|\omega|=q} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^{k+\delta-1}\omega^\nu}{(1-\omega)^\delta} \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0} \frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0} \right)^{n+1} d\omega,$$

avec

$$C_\delta = \frac{(1+\zeta_0)^{k+\delta}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+\delta}} (1+\bar{\zeta}_0)$$

Nous aurons besoin de toutes les deux expressions de $g_{n\nu}$.

§ 5. Cas de $\delta > \frac{1}{2}$

Nous avons déjà remarqué que pour $\delta > \frac{1}{2}$ la démonstration du théorème 1 peut se faire d'une manière analogue à celle donnée dans la partie II ([3], § 4). Pour cette fin il nous faut démontrer le lemme suivant:

Lemme 1. Soient n un entier positif et $0 \leq \delta \leq 1$ un nombre donné. Alors

$$(5.1) \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^{2\delta} t} dt = \begin{cases} O(n^{2\delta-1}) & \text{si } \delta > \frac{1}{2} \\ O(\log n) & \text{si } \delta = \frac{1}{2} \\ O(1) & \text{si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Démonstration. Pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, on a $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ et par suite

$$(5.2) \quad J \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{t^{2\delta}} dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\delta} I,$$

autrement dit $J = O(I)$. Il est évident que pour $\delta \neq \frac{1}{2}$

$$(5.3) \quad I \leq n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} t^{2-2\delta} dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^{2\delta}} = O(n^{2\delta-1}) + O(1).$$

Ce qui revient à dire que $I = O(n^{2\delta-1})$ pour $\delta > \frac{1}{2}$, et $I = O(1)$ pour $\delta < \frac{1}{2}$.

Si $\delta = \frac{1}{2}$ la relation (5.3) doit être remplacée par la suivante

$$I \leq O(1) + \log n.$$

Les relations (5.1) sont ainsi démontrées.

Démonstration du théorème 1 pour $\delta > \frac{1}{2}$. Il faut encore prouver que la condition III de la régularité est réalisée, c'est-à-dire que la constante $K^{(k,\delta)}$ qui figure dans l'inégalité (1.14) existe, mais cette dernière relation doit être remplacée par

$$(5.4) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{n\nu}| < K^{(k,\delta)}.$$

Décomposons en deux parties la série qui intervient dans (5.4):

$$(5.5) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{n\nu}| = \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |g_{n\nu}| + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |g_{n\nu}|,$$

où

$$(5.6) \quad \nu_0 = \lambda_0 n$$

et λ_0 est une quantité positive qui sera fixée avec n par la suite. On démontrera l'existence de deux constantes $K_1^{(k,\delta)}$ et $K_2^{(k,\delta)}$ indépendantes de n pour lesquelles les inégalités

$$(5.7) \quad S_1 \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |g_{n\nu}| < K_1^{(k,\delta)}, \quad S_2 \equiv \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |g_{n\nu}| < K_2^{(k,\delta)}$$

sont vérifiées quel que soit n .

On discutera d'abord la seconde inégalité (5.7) qui est réalisée pour chaque $\delta > 0$ intervenant. C'est seulement après que nous pourrons limiter S_1 .

1° *Évaluation de S_2* . En tenant compte de l'expression (4.12) de g_m et du fait que

$$\max_{|\omega|=\varrho} |1 + \bar{\zeta}_0 \omega| = 1 + r\varrho, \quad \max_{|\omega|=\varrho} |1 - \omega|^{-\delta} = (1 - \varrho)^{-\delta},$$

$$\max_{|\omega|=\varrho} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right| = \frac{1 - r\varrho}{\varrho - r} > 1,$$

on a

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \frac{|c_n^{(k+\delta)}|}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \frac{(1+r\varrho)^{k+\delta-1} (1-r\varrho)^{n+1}}{(1-\varrho)^\delta (\varrho-r)^{n+1}} \varrho \sum_{v=v_0}^{\infty} \binom{v+k}{k} \varrho^v = \\ (5.8) \quad &= O(1) \frac{\binom{v_0+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \frac{\varrho^{v_0}}{(1-\varrho)^\delta (\varrho-r)^{n+1}} \sum_{v=v_0}^{\infty} \binom{v-v_0+k}{k} \varrho^{v-v_0} = \\ &= O(1) \frac{\binom{v_0+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \frac{1}{(1-\varrho)^{k+\delta+1}} \left(\varrho^{v_0} \frac{1-r\varrho}{\varrho-r} \right)^n \end{aligned}$$

où l'on a pris en considération la relation (5.6) et l'inégalité évidente

$$(5.9) \quad \frac{\binom{v+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \leq \binom{v-v_0+k}{k} \quad (v \geq v_0, k \geq 0).$$

Si λ_0 est choisi de telle façon qu'il puisse être enfermé dans un intervalle de longueur finie et dont les extrémités sont indépendantes de n , il vient

$$(5.10) \quad \binom{v_0+k}{k} \binom{n+k+\delta}{k+\delta}^{-1} = O(n^{-\delta}).$$

Il suffirait donc de prendre

$$(5.11) \quad \lambda_0 = 1 + \left\lceil \frac{\log \frac{\varrho-r}{1-r\varrho}}{\log \varrho} \right\rceil \geq 2,$$

comme nous l'avons fait dans la partie II ([3], (4.13)) ($[x]$ désigne la partie entière de x), pour que l'inégalité

$$(5.12) \quad \varrho^{\lambda_0} \frac{1-r\varrho}{\varrho-r} \leq 1$$

soit vérifiée, et l'existence de $K_2^{(k,\delta)}$ serait ainsi prouvée. Mais ayant en vue des considérations ultérieures nous cherchons à trouver pour λ_0 une valeur inférieure à celle fournie par la formule (5.11). Pour cette raison on choisit ϱ d'une manière particulière et l'on pose pour n suffisamment élevé $\varrho = 1 - n^{-\varepsilon}$, avec

$$(5.13) \quad \varepsilon = \frac{\delta}{k + \delta + 1}.$$

Ainsi, de la formule (5.10) on tire

$$(5.14) \quad \frac{\binom{\nu_0 + k}{k}}{\binom{n + k + \delta}{k + \delta} (1 - \varrho)^{k + \delta + 1}} = O(1).$$

D'autre part si la relation (5.12) est vérifiée on peut écrire

$$(5.15) \quad \lambda_0 \geq \frac{\log \frac{1 - r \varrho}{\varrho - r}}{-\log \varrho}.$$

Posons $\varrho = 1 - h$, où $0 < h < 1 - r$. Alors $-\log \varrho < h$ et

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \frac{\log \frac{1 - r \varrho}{\varrho - r}}{-\log \varrho} &< \frac{1 + r}{1 - r} + h \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1 - (-r)^m}{(1 - r)^m} h^{m-2} < \\ &< \frac{1 + r}{1 - r} + \frac{1 + r}{(1 - r)^2} h \left\{ 1 - \log \left(1 - \frac{h}{1 - r} \right) \right\}. \end{aligned}$$

$-\log \left(1 - \frac{h}{1 - r} \right)$ croît avec h ; si $h = n^{-\varepsilon} < \frac{1}{2} (1 - r)$, on a

$-\log \left(1 - \frac{h}{1 - r} \right) < \log 2$. En prenant

$$(5.17) \quad \lambda_0 > \frac{1 + r}{1 - r} + \frac{1 + r}{(1 - r)^2} (1 + \log 2) n^{-\varepsilon} = \frac{1 + r}{1 - r} + H n^{-\varepsilon},$$

les inégalités (5.12) et (5.15) seront satisfaites. Soit donc λ_0 le plus petit des nombres de la forme $\frac{\nu}{n}$ vérifiant la relation (5.17) (n étant supposé fixé), à savoir

$$(5.18) \quad \lambda_0 = \frac{1}{n} \left[n \left(\frac{1 + r}{1 - r} + H n^{-\varepsilon} \right) \right] + \frac{1}{n},$$

et ainsi selon (5.6)

$$(5.19) \quad \nu_0 = \left[n \left(\frac{1 + r}{1 - r} + H n^{-\varepsilon} \right) \right] + 1.$$

Considérant les relations (5.8), (5.12) et (5.14) on peut constater que

$$(5.20) \quad S_2 = O(1)$$

et la seconde inégalité (5.7) est vérifiée.

2° *Évaluation de S_1* . La fonction $(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta-1} \omega^v (1 - \omega)^{-\delta}$ étant régulière dans le cercle $|\omega| = \varrho < 1$, l'expression (4.13) de g_{nv} peut être remplacée par la suivante:

$$(5.21) \quad g_{nv} = \frac{C_\delta}{2\pi i} \frac{\binom{v+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \int_{|\omega|=\varrho} \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta-1} \omega^v}{(1 - \omega)^\delta} \left[\left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^{n+1} - 1 \right] d\omega.$$

L'intégrale (5.21) garde évidemment son sens même pour $\varrho = 1$, c'est-à-dire pour $\omega = e^{i\varphi}$, en conséquence

$$(5.22) \quad |g_{nv}| = |C_\delta| \frac{\binom{v+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \omega^v h_{\delta n}(\omega) d\omega \right| \stackrel{\text{def}}{=} |C_\delta| \frac{\binom{v+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} |g_v^{(n)}|$$

où

$$(5.23) \quad h_{\delta n}(\omega) = \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta-1}}{(1 - \omega)^\delta} \left[\left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^{n+1} - 1 \right].$$

On remarque que les $g_v^{(n)}$ définis par la relation (5.22) sont les coefficients de Fourier de $h_{\delta n}(\omega)$.

L'inégalité de Cauchy appliquée à la somme $\sum_{v=0}^{v_0-1} |g_{nv}|$, de plus vu que $\binom{v+k}{k} < \binom{v_0+k}{k}$ pour $v < v_0$, on obtient

$$(5.24) \quad \left(\sum_{v=0}^{v_0-1} |g_{nv}| \right)^2 \leq v_0 \sum_{v=0}^{v_0-1} |g_{nv}|^2 \leq |C_\delta|^2 \lambda_0 n \frac{\binom{v_0+k}{k}^2}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}^2} \sum_{v=0}^{\infty} |g_v^{(n)}|^2.$$

En vertu de l'inégalité de Bessel

$$(5.25) \quad \sum_{v=0}^{\infty} |g_v^{(n)}|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 d\varphi.$$

Introduisons ensuite la notation employée dans la partie II ([3], (4.22)):

$$\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} = e^{-i\theta_0}, \quad \frac{1 + \bar{\zeta}_0 e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} + \zeta_0} = e^{i\theta},$$

donc

$$e^{i\varphi} = \frac{1 - \zeta_0 e^{i\theta}}{e^{i\theta} - \bar{\zeta}_0}, \quad \frac{1}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{1}{1 + \bar{\zeta}_0} \frac{e^{i\theta} \bar{\zeta}_0}{e^{i(\theta - \theta_0)} - 1}, \quad d\varphi = - \frac{(1 - r^2) d\theta}{|e^{i\theta} - \zeta_0|^2}.$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 &\leq \frac{(1 + r)^{2(k + \delta - 1)}}{|1 + \zeta_0|^{2\delta}} |e^{i\theta} - \bar{\zeta}_0|^{2\delta} \frac{|e^{i(n+1)(\theta - \theta_0)} - 1|^2}{|e^{i(\theta - \theta_0)} - 1|^{2\delta}} = \\ (5.26) \quad &= \frac{(1 + r)^{2(k + \delta - 1)}}{|1 + \zeta_0|^{2\delta}} |e^{i\theta} - \bar{\zeta}_0|^{2\delta} \frac{\sin^2(n+1) \frac{\theta - \theta_0}{2}}{\sin^{2\delta} \frac{\theta - \theta_0}{2}}. \end{aligned}$$

De plus $1 + r \geq |e^{i\theta} - \bar{\zeta}_0| \geq 1 - r$, et ainsi en vertu de la relation (5.26)

$$(5.27) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 d\varphi = O(1) \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} \frac{\sin^2(n+1) \frac{\theta - \theta_0}{2}}{\sin^{2\delta} \frac{\theta - \theta_0}{2}} d\theta,$$

ou en posant $\theta - \theta_0 = 2t$, on tire de (5.27)

$$(5.28) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 d\varphi = O(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)t}{\sin^{2\delta} t} dt.$$

Par conséquent, d'après le lemme 1

$$(5.29) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \begin{cases} O(n^{2\delta-1}) & \text{si } \delta > \frac{1}{2} \\ O(\log n) & \text{si } \delta = \frac{1}{2} \\ O(1) & \text{si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Par ailleurs selon la formule (5.10)

$$(5.30) \quad n \binom{v_0 + k}{k}^2 \binom{n + k + \delta}{k + \delta}^{-2} = O(n^{1-2\delta}).$$

Ainsi il découle de (5.29) et de (5.30)

$$(5.31) \quad \frac{n}{2\pi} \frac{\binom{v_0 + k}{k}^2}{\binom{n + k + \delta}{k + \delta}^2} \int_0^{2\pi} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \begin{cases} O(1) & \text{si } \delta > \frac{1}{2} \\ O(\log n) & \text{si } \delta = \frac{1}{2} \\ O(n^{1-2\delta}) & \text{si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

La formule (5.31) de même que les inégalités (5.24) et (5.25) fournissent la preuve que $S_1 = O(1)$ si $\delta > \frac{1}{2}$, et la première inégalité (5.7) est aussi vérifiée. Le théorème 1 est ainsi démontré pour $\delta > \frac{1}{2}$.

En même temps la relation (5.31) met en évidence que cette méthode est inefficace pour évaluer S_1 si $\delta = \frac{1}{2}$ ou $\delta < \frac{1}{2}$. Cependant le lemme 1, aussi bien que l'expression (5.31) éveillent l'idée que le comportement de la somme partielle S_1 varie avec δ et que pour $\delta = \frac{1}{2}$ ou $\delta < \frac{1}{2}$ elle a une allure différente de celle que nous venons de constater dans le cas de $\delta > \frac{1}{2}$. Cette présomption a été vérifiée pour $\delta < \frac{1}{2}$, mais non pour $\delta = \frac{1}{2}$.

On supposera d'ailleurs dans ce qui suit que $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$.

§ 6. Lemmes complémentaires

L'intégrale qui intervient dans l'expression (4.12) de g_{nv} appartient au type dont la valeur asymptotique peut être déterminée pour chaque v par la méthode du col, n étant supposé fixé et suffisamment élevé. Cette méthode est assez puissante pour dominer le problème en question quelles que soient les valeurs de δ , de n et de v , mais on rencontre de sérieuses difficultés quant au choix du contour d'intégration adéquat, lequel joue un rôle particulier dans l'application de la méthode. La forme et l'emplacement de ce contour dépend notamment de la quantité $\frac{v}{n}$ et les espèces très variées de courbes d'intégration qu'il faudrait considérer quand $\frac{v}{n}$ varie exigeraient une discussion géométrique très longue et détaillée. Pour éviter cette complication nous

renoncerons à l'homogénéité de l'exposé et n'aurons recours à la méthode du col que pour des ν satisfaisant à la double inégalité:

$$(6.1) \quad \lambda'_1 = \frac{1-r}{1+r} + \frac{1}{\log n} + \frac{v'_n+1}{n} \leq \frac{\nu}{n} \leq \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{\log n} - \frac{v_n+1}{n} = \lambda_1$$

où v_n et v'_n sont des nombres fixés avec n tels que, λ_1 est le nombre le plus grand de la forme $\frac{\nu}{n}$ et inférieur à $\frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{\log n}$, tandis que λ'_1 est le plus petit des nombres de la même forme et supérieur à $\frac{1-r}{1+r} + \frac{1}{\log n}$. On a donc

$$(6.2) \quad v_n = n \frac{1+r}{1-r} - \frac{n}{\log n} - \left\lfloor n \frac{1-r}{1+r} \frac{n}{\log n} \right\rfloor \quad (0 \leq v_n < 1),$$

$$v'_n = \left\lceil n \frac{1-r}{1+r} + \frac{n}{\log n} \right\rceil + 1 - \left(n \frac{1-r}{1+r} + \frac{n}{\log n} \right) \quad (0 < v'_n \leq 1).$$

Des relations (6.1) et (6.2) on déduit deux valeurs particulières de ν

$$(6.3) \quad \nu_1 = \lambda_1 n = \left\lfloor n \frac{1+r}{1-r} - \frac{n}{\log n} \right\rfloor - 1; \quad \nu'_1 = \lambda'_1 n = \left\lceil n \frac{1-r}{1+r} + \frac{n}{\log n} \right\rceil + 2.$$

On démontrera par la méthode du col que $\sum_{\nu=\nu'_1}^{\nu_1} |g_{n\nu}|$ dépasse toute limite si $0 < \delta < \frac{1}{2}$, et qu'elle est bornée si $\delta = \frac{1}{2}$, mais on vérifiera d'abord que les sommes $\sum_{\nu=0}^{\nu'_1-1} |g_{n\nu}|$ et $\sum_{\nu=\nu_1+1}^{\infty} |g_{n\nu}|$ sont bornées pour $\delta = \frac{1}{2}$.

Nous venons de voir que $S_2 = O(1)$ [cf. (5.7) et (5.20)] pour tous les $\delta > 0$. Notre second lemme exprime un résultat analogue.

Lemme 2. Soit $\delta = \frac{1}{2}$. Alors il existe un entier positif $\nu'_0 = \lambda'_0 n < \nu_0$ tel que

$$(6.4) \quad S_3 \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu'_0} |g_{n\nu}| = O(1),$$

où λ'_0 est le plus grand des nombres de la forme $\frac{\nu}{n}$ inférieur ou égal à $\frac{1-r}{1+r}$.

Démonstration. On évaluera $g_{n\nu}$ au moyen de son expression (4.12) en modifiant convenablement la voie d'intégration $|\omega| = \rho$. En raison de la symétrie nous admettons une fois pour toute que $0 \leq \alpha \leq \pi$ (où $\zeta_0 = re^{i\alpha}$). Sous cette réserve, d'après le théorème de Cauchy, le contour d'intégration peut être composé de l'arc a' du cercle c' de centre $\omega = 0$ et de rayon R ($1 < R < \frac{1}{r}$), de l'arc a'' du cercle c'' de centre $\omega = 1$ et de rayon n^{-1}

et de deux segments de droites s' et s'' parallèles à l'axe réel (Fig. 1). Le nouveau contour ne contient pas le pôle $\omega = 1$, mais il entoure le pôle $\omega = -\zeta_0$ de la fonction à intégrer. La valeur de R sera précisée sous peu. L'expression de g_{nv} se décompose ainsi en quatre intégrales qu'on désignera par

$$(6.5) \quad g_{nv} = \int_{a'} + \int_{a''} + \int_{s'} + \int_{s''}.$$

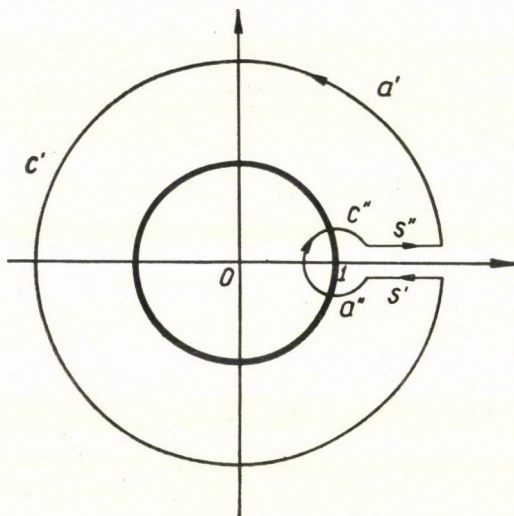


Figure 1

Il est aisé de voir que pour $v \leq v'_0$ on a

$$(6.6) \quad \left| \int_{a'} \right| \leq |c_n^{(k+\frac{1}{2})}| \frac{\binom{v'_0+k}{k}}{\binom{n+k+\frac{1}{2}}{k+\frac{1}{2}}} \frac{(1+rR)^{k+\frac{1}{2}}}{(R-1)^{1/2}(R+r)} R^{v+1} \left(\frac{1+rR}{R+r} \right)^n = I_{nv}^{(1)}$$

et

$$(6.7) \quad \sum_{v=0}^{v'_0} I_{nv}^{(1)} \leq O(1) \frac{\binom{v'_0+k}{k}}{\binom{n+k+\frac{1}{2}}{k+\frac{1}{2}}} \frac{1}{(R-1)^{3/2}} \left(R^{2'} \frac{1+rR}{R+r} \right)^n.$$

Posons actuellement $R = 1 + n^{-\frac{1}{3}}$. Nous obtenons

$$(6.8) \quad \frac{\binom{\nu'_0 + k}{k}}{\binom{n + k + \frac{1}{2}}{k + \frac{1}{2}} (R - 1)^{3/2}} = O(1).$$

Choisissons λ'_0 de façon que la condition

$$(6.9) \quad \left(R^{\lambda'_0} \frac{1 + rR}{R + r} \right)^n = O(1)$$

soit vérifiée. Cela se réalise, avec la valeur adoptée pour R , si $\lambda'_0 \leq \frac{1-r}{1+r}$, vu que

$$(6.10) \quad R^{\frac{1-r}{1+r}} \frac{1 + rR}{R + r} = 1 + A(R - 1)^3 + \dots = 1 + O(n^{-1}) \quad (A > 0)$$

d'où résulte (6.9). λ'_0 est de la forme $\frac{\nu}{n}$, il peut donc être le plus grand nombre de cette forme inférieur ou égal à $\frac{1-r}{1+r}$, à savoir

$$(6.11) \quad \lambda'_0 = \frac{1}{n} \left[n \frac{1-r}{1+r} \right] \text{ et } \nu'_0 = \lambda'_0 n = \left[n \frac{1-r}{1+r} \right].$$

Avec ν'_0 ainsi défini on obtient

$$(6.12) \quad \sum_{\nu=0}^{\nu'_0} I_{n\nu}^{(1)} = O(1)$$

à partir des relations (6.7) (6.8) et (6.9).

Considérons en second lieu l'intégrale prise sur c'' défini par l'expression $\omega = 1 + n^{-1} e^{i\sigma}$ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$). Alors pour des n suffisamment grands on a

$$(6.13) \quad \begin{aligned} \max_{0 \leq \sigma \leq 2\pi} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right| &= 1 + \frac{1 - r^2}{1 + 2r \cos \alpha + r^2} n^{-1} + o(n^{-1}) \leq \\ &\leq 1 + \frac{1+r}{1-r} n^{-1} + o(n^{-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent pour $\nu \leq \nu'_0$

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \left| \int_{a''} \right| &\leq n^{-1} O(n^{-1/2}) (1 + n^{-1})^{\nu'_0 + k + \frac{1}{2}} \frac{n^{1/2}}{1 - n^{-1} - r} \left(1 + \frac{1+r}{1-r} n^{-1} + o(n^{-1}) \right)^n = \\ &= O(n^{-1}) = I_{n\nu}^{(2)} \end{aligned}$$

et

$$(6.15) \quad \sum_{v=0}^{v'_0} I_{nv}^{(2)} = O(1).$$

Il reste à évaluer les intégrales prises sur les segments s' et s'' . Les fonctions

$$\omega^v, \left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^{n+1}, \quad (1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k - \frac{1}{2}}$$

prennent sensiblement les mêmes valeurs aux points d'abscisses égales de s' et s'' . Par contre $(1 - \omega)^{1/2}$ admet des valeurs différentes en ces points. En adoptant la détermination principale de $(1 - \omega)^{1/2}$ quand $\omega \in s''$, on aura $e^{i\pi} (1 - \omega)^{1/2}$ le long de s' . Ainsi, puisque $R = 1 + n^{-\frac{1}{3}}$, il vient

$$(6.16) \quad \left| \int_{s'} + \int_{s''} \right| \leq O(n^{-\frac{1}{2}}) \left| \int_{1+n^{-1}}^{1+n^{-\frac{1}{3}}} \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k + \frac{1}{2}} \omega^v}{(\omega - 1)^{1/2} (\omega + \zeta_0)} \left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^n d\omega \right| \leq$$

$$\leq O(n^{-\frac{1}{2}}) \frac{[1 + r(1 + n^{-\frac{1}{3}})]^{k + \frac{1}{2}}}{1 - n^{-1} - r} \int_{1+n^{-1}}^{1+n^{-\frac{1}{3}}} \omega^v \left(\frac{1 + r\omega}{\omega + r} \right)^n \frac{d\omega}{(\omega - 1)^{1/2}} = I_{nv}^{(3)}$$

et

$$(6.17) \quad \sum_{v=0}^{v'_0} I_{nv}^{(3)} = O(n^{-\frac{1}{2}}) \int_{1+n^{-1}}^{1+n^{-\frac{1}{3}}} \frac{\omega^{v'_0+1} - 1}{(\omega - 1)^{3/2}} \left(\frac{1 + r\omega}{\omega + r} \right)^n d\omega.$$

La relation (6.9) reste valable pour chaque R de l'intervalle $(1 + n^{-1}, 1 + n^{-\frac{1}{3}})$. Par suite, d'après le choix (6.11) de v'_0 , on a pour $1 + n^{-1} \leq \omega \leq 1 + n^{-\frac{1}{3}}$

$$(6.18) \quad (\omega^{v'_0+1} - 1) \left(\frac{1 + r\omega}{\omega + r} \right)^n = O(1),$$

et l'expression (6.17) peut s'écrire sous la forme

$$(6.19) \quad \sum_{v=0}^{v'_0} I_{nv}^{(3)} = O(n^{-\frac{1}{2}}) \int_{1+n^{-1}}^{1+n^{-\frac{1}{3}}} \frac{d\omega}{(\omega - 1)^{3/2}} = O(n^{-\frac{1}{2}}) \frac{1}{2} (n^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{6}}) = O(1).$$

En vertu des relations (6.5), (6.12), (6.15) et (6.19) la formule (6.4) est vérifiée et le lemme 2 est démontré.

Nous soulignons que le lemme 2 est valable même si $0 < \delta < \frac{1}{2}$. La démonstration subit dans ce cas une légère modification en remplaçant la

définition de λ'_0 par celle de $\lambda'_0 = \frac{1-r}{1+r} - H' n^{-\frac{1}{3}}$, où H' est une constante indépendante de ν et de n , analogue à H de la formule (5.17) et l'on raisonne de la même manière que dans le § 5. La relation (6.9) reste vérifiée, mais il n'existe pas d'expression analogue à (6.10).

Lemme 3. Soient $\delta = \frac{1}{2}$, ν_1 et ν'_1 les entiers définis par les expressions

(6.3). Alors

$$(6.20) \quad S_4 \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu'_1-1} |g_{n\nu}| = O(1), \quad S_5 \equiv \sum_{\nu=\nu_1+1}^{\infty} |g_{n\nu}| = O(1).$$

Démonstration. Désignons par ν' et ν'' deux entiers positifs remplissant les conditions suivantes: $\nu' < \nu'' \leq \nu_0$ et $\nu'' - \nu' = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$. Un raisonnement semblable à celui que nous a fourni la formule (5.24) conduit à la relation

$$(6.21) \quad \left(\sum_{\nu=\nu'}^{\nu''} |g_{n\nu}| \right)^2 \leq O\left(\frac{1}{\log n}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{\nu}^{(n)}|^2,$$

d'où selon les expressions (5.25) et (5.29) on a

$$(6.22) \quad \sum_{\nu=\nu'}^{\nu''} |g_{n\nu}| = O(1).$$

Les entiers ν_0 , ν'_0 , ν_1 , ν'_1 sont définis de manière [cf. (5.19), (6.11), (6.3)] qu'on ait

$$(6.23) \quad \nu_0 - \nu_1 = O\left(\frac{n}{\log n}\right), \quad \nu'_1 - \nu'_0 = O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

Par conséquent d'après (6.22)

$$(6.24) \quad \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_0} |g_{n\nu}| = O(1), \quad \sum_{\nu=\nu'_0}^{\nu'_1} |g_{n\nu}| = O(1).$$

En tenant compte de plus que $S_2 = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |g_{n\nu}| = O(1)$ pour tous les $\delta > 0$ [cf. (5.20)] et que $S_3 = \sum_{\nu=0}^{\nu'_0} |g_{n\nu}| = O(1)$ pour $\delta = \frac{1}{2}$ [cf. (6.4)], le lemme 3 est démontré.

Lemme 4. Les $|g_{n\nu}|$ sont uniformément bornés en n et ν .

Démonstration. Pour $\delta > \frac{1}{2}$ le lemme est démontré par le théorème 1.

Pour $\delta = \frac{1}{2}$ les relations (5.20) et (6.22) constituent la vérification du lemme.

Il reste le cas où $\delta < \frac{1}{2}$. Si $\nu \geq \nu_0$, la formule (5.20) est valable et pour ces ν le lemme est prouvé. Soient ensuite ν^{III} et ν^{IV} deux entiers positifs tels que

$\nu^{\text{III}} < \nu^{\text{IV}} \leq \nu_0$ et $\nu^{\text{IV}} - \nu^{\text{III}} = O(n^{20})$ et l'on obtient facilement la formule analogue à (6.22):

$$(6.25) \quad \sum_{\nu^{\text{III}}}^{\nu^{\text{IV}}} |g_{n\nu}| = O(1).$$

§ 7. Détermination des cols

Les recherches que nous avons encore à faire se réduisent dès maintenant à l'étude de la somme $\sum_{\nu=\nu'_1}^{\nu_1} |g_{n\nu}|$, quand $\delta = \frac{1}{2}$ et $\delta < \frac{1}{2}$, pour un n fixe et assez grand. Nous cherchons à trouver une expression asymptotique de $g_{n\nu}$ pour chaque ν vérifiant l'inégalité $\nu'_1 \leq \nu \leq \nu_1$. L'intégrale qui figure dans l'expression (4.12) de $g_{n\nu}$ est du type

$$(7.1) \quad J_n = \int_L h(\omega) [F(\omega)]^n d\omega = \int_L h(\omega) e^{nf(\omega)} d\omega,$$

dont la valeur asymptotique peut être déterminée par la méthode du col ([10], pp. 77—93). Les fonctions $F(\omega)$, $f(\omega)$ et $h(\omega)$ sont supposées régulières dans un domaine D du plan complexe ω , où la courbe L est aussi tracée. D'après le théorème de Cauchy L peut être modifiée en D et précisément c'est le choix d'une voie d'intégration convenable qui constitue l'élément essentiel de cette méthode.

La méthode du col consiste à trouver une courbe d'intégration L passant par un point particulier $\omega_1 \in D$ appelé col et jouissant des propriétés suivantes: $|F(\omega)|$ resp. $\text{Ref}(\omega)$ prend son maximum absolu sur L en ω_1 , la contribution de l'intégrale prise sur un arc infiniment petit de L au voisinage de ω_1 fournit la valeur asymptotique de l'intégrale (7.1), tandis que l'intégrale prise sur le reste de L tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$. Il arrive (et c'est notre cas) que L doit passer simultanément par plusieurs cols, soient $\omega_j \in D$ ($j = 1, 2, \dots, p$). La méthode du col reste applicable même dans ces cas, si L peut être partagée en arcs A_j dont chacun ne contient qu'un seul col correspondant ω_j et ω_j a les mêmes propriétés sur A_j que ω_1 sur L dans le cas d'un col unique. La valeur asymptotique de J_n s'exprime alors par la somme des intégrales prises sur les arcs infiniment petits des A_j dans les voisinages des cols ω_j .

Les cols se trouvent parmi les racines de l'équation $f'(\omega) = 0$ (dans le cas que nous traitons les équations $f'(\omega) = 0$ et $f''(\omega) = 0$ n'ont pas de racines communes). Soit ω_1 un col, donc une de ces racines remplissant les conditions mentionnées ci-dessus; alors $\omega_1 \in D$ et $f(\omega)$ est développable en série de Taylor autour de ω_1 :

$$f(\omega) = f(\omega_1) + \frac{1}{2} f''(\omega_1) (\omega - \omega_1)^2 + \dots$$

Considérons ensuite la droite t_1 (appelée aussi l'axe du col ω_1) définie comme le lieu des points ω pour lesquels $f''(\omega_1) (\omega - \omega_1)^2 \leq 0$. t_1 forme l'angle τ_1 avec l'axe réel. La courbe L , si elle existe, fait avec t_1 un angle inférieur en valeur absolue à $\frac{\pi}{4}$. Si cela est possible il est avantageux de choisir L tangente à t_1 ([10], pp. 87—88). Supposons que L existe, qu'elle satisfasse à toutes les

conditions énumérées, même à la dernière, en outre qu'elle ne passe que par le seul col ω_1 et enfin que $f(\omega)$ et $h(\omega)$ soient indépendantes de n . Alors la valeur asymptotique de l'intégrale (7.1) est donnée par la formule

$$(7.2) \quad J_n = h(\omega_1) e^{nf(\omega_1) + i\tau_1} \left(\frac{2\pi}{n|f''(\omega_1)|} \right)^{1/2} \{1 + O(n^{-1})\}$$

([10], p. 88 (5.7.2)).

Cependant des circonstances particulières peuvent se présenter qui exigent de faire passer L simultanément par plusieurs cols ω_j . Désignons par t_j l'axe du col ω_j faisant l'angle τ_j avec l'axe réel, alors la relation (7.2) se substitue par la suivante

$$(7.3) \quad J_n = \sum_{j=1}^p h(\omega_j) e^{nf(\omega_j) + i\tau_j} \left(\frac{2\pi}{n|f''(\omega_j)|} \right)^{1/2} \{1 + O(n^{-1})\}.$$

Il faut souligner que les formules (7.2) et (7.3) doivent être éventuellement modifiées si l'une des quantités $h(\omega_j)$, $f(\omega_j)$ ou $|f''(\omega_j)|$ dépend elle-même de n . Nous aurons l'occasion de tenir compte de cette remarque.

Dans le cas concret c'est l'intégrale

$$(7.4) \quad J_{nv} = \int_L \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta}}{(1 - \omega)^\delta (\omega + \zeta_0)} \omega^v \left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^n d\omega$$

qui nous intéresse, car pour les v que nous considérons maintenant: $v'_1 \leq v \leq v_1$ [cf. (6.3)], nous pouvons écrire

$$(7.5) \quad |g_{nv}| = \frac{|c_n^{(k+\delta)}|}{2\pi} \frac{\binom{v+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} |J_{nv}| = d_{nv} n^{-\delta} |J_{nv}| = O(n^{-\delta}) |J_{nv}|$$

où les d_{nv} sont des nombres positifs ayant des bornes supérieures et inférieures indépendantes de n et de v . En effet, si $v'_1 \leq v \leq v_1$, il vient

$$\binom{v+k}{k} \geq \binom{v'_1+k}{k} \approx \frac{v_1'^k}{\Gamma(k)} = \frac{\lambda_1'^k n^k}{\Gamma(k)},$$

$$\binom{v+k}{k} \leq \binom{v_1+k}{k} \approx \frac{v_1^k}{\Gamma(k)} = \frac{\lambda_1^k n^k}{\Gamma(k)},$$

$$\binom{n+k+\delta}{k+\delta} \approx \frac{n^{k+\delta}}{\Gamma(k+\delta)}$$

et par suite

$$\frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k)} \lambda_1'^k n^{-\delta} \leq \frac{\binom{v+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \leq \frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k)} \lambda_1^k n^{-\delta}.$$

Or, d'après leurs définitions données sous (6.3)

$$(7.6) \quad \frac{1-r}{1+r} < \lambda'_1 < \lambda_1 < \frac{1+r}{1-r}$$

et ainsi

$$(7.7) \quad d = \frac{|c_n^{(k+\delta)}|}{2\pi} \frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k)} \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^k < d_{nv} < \frac{|c_n^{(k+\delta)}|}{2\pi} \frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k)} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^k.$$

Pour pouvoir appliquer la formule (7.2) ou (7.3) à l'intégrale (7.4) il incombe trois tâches préalables: 1° faire le choix d'une fonction $f(\omega)$ convenable (où $F(\omega) = e^{f(\omega)}$); 2° déterminer et examiner les cols, c'est-à-dire les racines de l'équation $f'(\omega) = 0$; 3° démontrer l'existence de la courbe L réalisant les conditions établies et construire cette courbe. Nous consacrons ce § aux problèmes 1° et 2°.

À première vue on pourrait prendre pour $F(\omega)$ respectivement $f(\omega)$ les fonctions

$$F(\omega) = \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}, \quad f(\omega) = \log \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0},$$

mais alors l'équation

$$f'(\omega) = \frac{r^2 - 1}{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)(\omega + \zeta_0)} = 0$$

n'aurait pas de racines finies. Il faut donc choisir pour $f(\omega)$ une autre fonction;

À cet effet introduisons la notation $\lambda = \frac{v}{n}$ et soit

$$(7.8) \quad f(\omega) = \log \left(\omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right) = \lambda \log \omega + \log(1 + \bar{\zeta}_0 \omega) - \log(\omega + \zeta_0).$$

$f(\omega)$ est définie en un point initial quelconque par sa détermination principale et suivie par continuité. On a ainsi

$$(7.9) \quad f'(\omega) = \frac{\lambda}{\omega} + \frac{\bar{\zeta}_0}{1 + \bar{\zeta}_0 \omega} - \frac{1}{\omega + \zeta_0} = \frac{\bar{\zeta}_0 \lambda \omega^2 + [(1 + r^2)\lambda - (1 - r^2)]\omega + \zeta_0 \lambda}{\omega(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)(\omega + \zeta_0)}.$$

L'équation $f'(\omega) = 0$ a déjà des racines finies:

$$(7.10) \quad \begin{aligned} \omega_{1,2} &= \frac{e^{i\alpha}}{2r\lambda} \left\{ -[(1 + r^2)\lambda - (1 - r^2)] \pm \left[[(1 + r^2)\lambda - (1 - r^2)]^2 - 4r^2\lambda^2 \right]^{1/2} \right\} = \\ &= \frac{e^{i(\alpha+\pi)}}{2r\lambda} \left\{ (1 + r^2)\lambda - (1 - r^2) \mp i(1 - r^2) \left[\left(\frac{1+r}{1-r} - \lambda \right) \left(\lambda - \frac{1-r}{1+r} \right) \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Selon les hypothèses on a $\nu'_1 \leq \nu \leq \nu_1$, donc $\lambda'_1 \leq \lambda \leq \lambda_1$ et d'après l'inégalité (7.6)

$$(7.11) \quad \frac{1-r}{1+r} < \lambda < \frac{1+r}{1-r}.$$

On en conclut par un calcul simple que $|\omega_{1,2}| = 1$ et il est justifié d'écrire

$$(7.12) \quad \frac{1+r^2}{2r} - \frac{1-r^2}{2r\lambda} = \cos \vartheta,$$

$$\frac{1-r^2}{2r\lambda} \left[\left(\frac{1+r}{1-r} - \lambda \right) \left(\lambda - \frac{1-r}{1+r} \right) \right]^{1/2} = \sin \vartheta,$$

où

$$(7.13) \quad \omega_1 = e^{i(\alpha+\pi-\vartheta)}, \quad \omega_2 = e^{i(\alpha+\pi+\vartheta)}.$$

Cette circonstance est très importante, car pour $|\omega| = 1$

$$(7.14) \quad |F(\omega)| = 1 \quad \text{resp.} \quad \operatorname{Re} f(\omega) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(7.15) \quad |F(\omega_1)| = |F(\omega_2)| = 1 \quad \text{resp.} \quad \operatorname{Re} f(\omega_1) = \operatorname{Re} f(\omega_2) = 0.$$

La courbe L doit donc passer par un domaine dans lequel $|F(\omega)| < 1$ resp. $\operatorname{Re} f(\omega) < 0$.

Passons à la détermination de $f'(\omega_1)$ et $f'(\omega_2)$. Il est aisé de vérifier que

$$(7.16) \quad f'(\omega_1) = \lambda \left[\left(\frac{1+r}{1-r} - \lambda \right) \left(\lambda - \frac{1-r}{1+r} \right) \right]^{1/2} e^{-2i\left(\alpha + \frac{3\pi}{4} - \vartheta\right)} = R_1 e^{i\varphi_1}$$

et

$$(7.17) \quad f'(\omega_2) = |f'(\omega_1)| e^{-2i\left(\alpha + \frac{5\pi}{4} + \vartheta\right)} = R_1 e^{i\varphi_2}.$$

Les relations (7.16) et (7.17) permettent de calculer τ_1 et τ_2 . Du fait que $f''(\omega_1)(\omega - \omega_1)^2$ est réelle et négative on conclut que

$$(7.18) \quad \tau_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{2} = \alpha + \pi - \vartheta + \frac{\pi}{4},$$

et de même

$$(7.19) \quad \tau_2 = \alpha + \pi + \vartheta + \frac{3\pi}{4}.$$

On constate que $0 < \vartheta < \pi$, car pour $\vartheta = \pi$ on aurait $\omega_1 = \omega_2 = e^{i\alpha}$, $\lambda = \frac{1-r}{1+r}$, et pour $\vartheta = 0$ on aurait $\omega_1 = \omega_2 = e^{i(\alpha+\pi)}$, $\lambda = \frac{1+r}{1-r}$, mais ces cas ont été exclus par la condition (7.11). Quand λ croît de λ'_1 à λ_1 , ω_1 et ω_2 se déplacent chacun sur une demi-circonférence ayant des positions symétriques

§ 8. Construction de la courbe L_λ

On démontre dans la théorie de la méthode du col que L_λ doit être tracée dans un domaine dont la frontière Γ est déterminée par l'équation

$$(8.1) \quad |F(\omega)| = |F(\omega_1)| \quad \text{ou} \quad \operatorname{Re} f(\omega) = \operatorname{Re} f(\omega_1),$$

le col ω_1 étant en général un point double de Γ , où cette dernière se coupe sous un angle droit ([10], pp. 83—85; [11], pp. 402—406). Les autres racines de l'équation $f'(\omega) = 0$ peuvent avoir la même propriété.¹ De plus Γ est une courbe de niveau qui divise le plan complexe ω en deux domaines D_1 et D_2 tels que

$$(8.2) \quad \begin{aligned} |F(\omega)| < |F(\omega_1)| & \quad \text{ou} \quad \operatorname{Re} f(\omega) < \operatorname{Re} f(\omega_1) & \quad \text{si } \omega \in D_1, \\ |F(\omega)| > |F(\omega_2)| & \quad \text{ou} \quad \operatorname{Re} f(\omega) > \operatorname{Re} f(\omega_2) & \quad \text{si } \omega \in D_2. \end{aligned}$$

Dans notre cas $|\omega_1| = 1$ et $|F(\omega_1)| = 1$, de même $|\omega_2| = 1$ et $|F(\omega_2)| = 1$, donc la courbe Γ déterminée par l'équation (8.1) passe par tous les deux cols: ω_1 et ω_2 . D'autre part, nous avons déjà observé que l'équation $|F(\omega)| = 1$ est vérifiée en tous les points de la circonférence $|\omega| = 1$ qui appartient ainsi à la courbe Γ . Mais Γ doit contenir également d'autres points que ceux de cette circonférence, puisque ω_1 et ω_2 sont les points doubles de Γ où elle se coupe sous des angles droits. On en conclut que Γ se décompose en deux parties distinctes: l'une la circonférence $|\omega| = 1$, que l'on désignera par Γ_1 , et l'autre que l'on appellera Γ_2 . Les points de Γ_2 sont de toute évidence à distance finie et en raisonnant sur la forme polaire de l'équation $|F(\omega)| = 1$ avec $\omega = \varrho e^{i\varphi}$:

$$|F(\omega)| = \varrho^2 \left[\frac{r^2 \varrho^2 + 2 r \varrho \cos(\varphi - \alpha) + 1}{\varrho^2 + 2 r \varrho \cos(\varphi - \alpha) + r^2} \right]^{1/2} = 1,$$

on entrevoit facilement que Γ_2 est une courbe fermée et symétrique par rapport à l'axe qui passe par les points $\omega = 0$ et $\omega = -\zeta_0$, de plus que la courbe Γ n'a d'autres branches distinctes que Γ_1 et Γ_2 . Nous ne détaillons pas ces calculs. Les tangentes à Γ en ω_1 et ω_2 sont par conséquent les rayons et les tangentes de Γ_1 qui passent par ces points (Figures 3 et 4). Appelons A_1 resp. A_2 les domaines limités par Γ_1 resp. Γ_2 .

¹ La fonction $F(\omega) = ef(\omega) = \omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}$, qui joue un rôle important dans nos recherches, présente une forte analogie avec la fonction

$$ef(s) = \frac{s(1-s)}{1-xs}$$

étudiée par RIEMANN ([11], p. 402) ayant pour but de déterminer la valeur asymptotique de l'intégrale

$$\int_{-1}^1 s^{n+a} (1-s)^{n+b} (1-xs)^{c-n} ds,$$

a, b, c étant des constantes et $n \rightarrow \infty$.

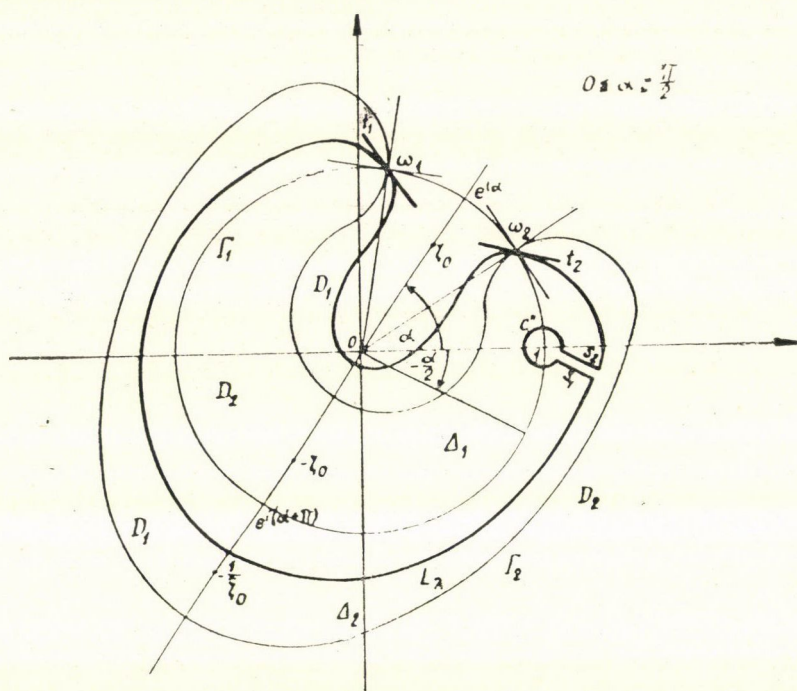


Figure 3

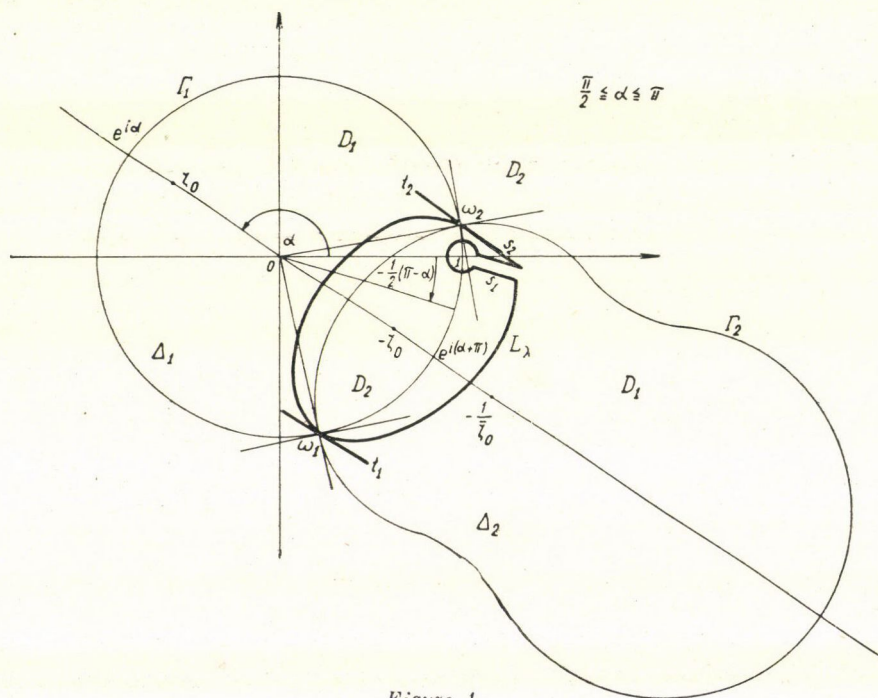


Figure 4

Les relations (8.2) prennent maintenant les formes particulières:

$$(8.3) \quad \begin{aligned} |F(\omega)| < 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{Re} f(\omega) < 0 & \quad \text{si } \omega \in D_1, \\ |F(\omega)| > 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{Re} f(\omega) > 0 & \quad \text{si } \omega \in D_2. \end{aligned}$$

Ce qui revient à dire que $[F(\omega)]^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ si $\omega \in D_1$, et que $|F(\omega)|$ atteint son maximum en ω_1 (ou en ω_2) sur chaque courbe tracée en D_1 , mais contenant ω_1 (ou ω_2), point de sa frontière. On sait encore que

$$(8.4) \quad |F(0)| = 0, \quad |F(-\zeta_0)| = \infty, \quad \left| F\left(-\frac{1}{\zeta_0}\right) \right| = 0, \quad |F(\infty)| = \infty,$$

On en tire que

$$(8.5) \quad 0 \in D_1, \quad -\zeta_0 \in D_2, \quad -\frac{1}{\zeta_0} \in D_1, \quad \infty \in D_2.$$

L'arc de Γ_2 qui se trouve dans Δ_1 sépare donc les points $\omega = 0$ et $\omega = -\zeta_0$; de même l'arc de Γ_1 qui traverse Δ_2 sépare les points $\omega = -\zeta_0$ et $\omega = -\frac{1}{\zeta_0}$.

Par conséquent $\omega = -\zeta_0$ est un point commun aux domaines Δ_1 et Δ_2 . En tenant compte de ces circonstances et des relations (8.5) nous sommes en mesure de donner des définitions exactes des domaines D_1 et D_2 : D_1 est constitué par des points intérieurs non communs à Δ_1 et Δ_2 , et D_2 contient les points communs intérieurs et extérieurs à Δ_1 et Δ_2 . Ce qui s'exprime par les formules

$$(8.6) \quad D_1 = \Delta_1 \cup \Delta_2 - \Delta_1 \cap \Delta_2, \quad D_2 = (\Delta_1 \cap \Delta_2) \cup (\bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2)$$

où $\bar{\Delta}_1$ et $\bar{\Delta}_2$ désignent les domaines complémentaires de Δ_1 et Δ_2 par rapport au plan ω .

Les droites t_1, t_2 et les angles τ_1, τ_2 peuvent aussi être déterminés par des considérations géométriques. t_1 respectivement t_2 est une des bissectrices des tangentes à Γ en ω_1 respectivement ω_2 ([10], p. 84). $\operatorname{Re} f(\omega) \leq 0$ pour les $\omega \in t_1$ (ou $\omega \in t_2$) si $|\omega - \omega_1|$ (ou $|\omega - \omega_2|$) est suffisamment petit. t_1 respectivement t_2 est donc celle des bissectrices en question qui ne traverse pas le domaine $\Delta_1 \cap \Delta_2$. Ainsi les valeurs données pour τ_1 et τ_2 par les formules (7.18) et (7.19) sont de nouveau vérifiées.

La courbe L_λ doit être tracée autant que possible dans le domaine D_1 tout en entourant le pôle $\omega = -\zeta_0$. Cette condition se réalise le mieux si L_λ passe non seulement par ω_1 , mais aussi par ω_2 . Dans ce cas $|F(\omega)| < 1$ resp. $\operatorname{Re} f(\omega) < 0$, si $\omega \in L_\lambda$ excepté les points ω_1 et ω_2 où $|F(\omega_1)| = |F(\omega_2)| = 1$ resp. $\operatorname{Re} f(\omega_1) = \operatorname{Re} f(\omega_2) = 0$. On suppose de plus que L_λ est tangente à t_1 et à t_2 en ω_1 et en ω_2 . Les points $\omega = 0$, $\omega = 1$ et $\omega = -\frac{1}{\zeta_0}$, comme points singuliers de $F(\omega)$ et $h(\omega)$, doivent rester en dehors du domaine limité par L_λ soit D_λ . Quant aux points $\omega = 0$ et $\omega = -\frac{1}{\zeta_0}$ cette condition est toujours réalisable sans difficulté, mais le cas de $\omega = 1$ demande à être discuté.

Si $\omega = 1$ n'est pas un point intérieur à Δ_2 , donc n'est pas un point de la frontière du domaine $\Delta_1 \cap \Delta_2$, on peut construire L_λ sans aucun artifice particulier. Par contre, si $\omega = 1$ est un point intérieur à Δ_2 , il sera exclu de D_λ par le petit cercle c'' de centre $\omega = 1$ et de rayon n^{-1} (voir § 6) dont on considère l'arc a'' raccordé au reste de L_λ par deux segments de droites parallèles s_1 et s_2 faisant avec l'axe réel l'angle

$$(8.7) \quad \sigma = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2} & \text{si } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi - \alpha}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \end{cases}.$$

Ce choix de l'angle σ s'expliquera d'ici peu.

Avant d'appliquer la formule (7.3) il faut s'assurer que la somme des intégrales en question prises sur a'' , s_1 et s_2 reste bornée. Or, nous avons déjà remarqué que la démonstration du lemme 2 du § 6 reste valable même si l'on pose $0 < \delta \leq 1$ au lieu de $\delta = \frac{1}{2}$. Nous pouvons écrire encore selon (6.14)

$$(8.8) \quad \left| \int_{a''} \right| = I_{nv}^{(2)} = O(n^{-1})$$

et étant donné que $v_1 - v'_1 = O(n)$, on a

$$(8.9) \quad \sum_{v=v'_1}^{v_1} I_{nv}^{(2)} = O(1).$$

C'est donc une somme bornée.

Considérons ensuite les intégrales prises sur s_1 et s_2 suivant des directions opposées. Il faut démontrer que la longueur commune des segments s_1 et s_2 peut être choisie indépendamment de n et de v , et après que la somme des intégrales prises sur ces segments reste bornée. C'est la première de ces questions, autrement dit la détermination de la longueur des segments s_1 et s_2 qui nous amène au choix spécial de l'angle σ . On pourrait croire qu'il est naturel de prendre s_1 et s_2 parallèles à l'axe réel (c'est ainsi que nous avons tracé s' et s'' dans le § 6), mais on verra que ce n'est pas toujours possible. En effet d'après les formules (7.13):

$$(8.10) \quad 1 - \omega_1 = 2 \cos \frac{\alpha - \vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha - \vartheta)}, \quad 1 - \omega_2 = 2 \cos \frac{\alpha + \vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha + \vartheta)},$$

et nous avons constaté dans le § 7 que $0 < \vartheta < \pi$; en supposant de plus que $0 < \alpha < \pi$, nous pouvons écrire

$$(8.11) \quad \cos \frac{\alpha - \vartheta}{2} > \begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} & \text{si } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi \end{cases}.$$

Il existe donc une constante $d_1 > 0$ indépendante de ϑ (ou bien de n et de ν) telle que

$$(8.12) \quad d_1 < |1 - \omega_1| = 2 \cos \frac{\alpha - \vartheta}{2} \leq 2.$$

Donc les points ω_1 et $\omega = 1$ ne coïncident et ne se rapprochent arbitrairement jamais. Par contre ω_2 se déplace sur la demi-circonférence qui contient le point $\omega = 1$, et pour certaines valeurs de λ l'un des deux cas suivants est sûrement réalisé: 1) $\frac{1}{2}(\alpha + \vartheta) = \frac{\pi}{2}$ et $|1 - \omega_2| = 0$, ou bien 2) $\frac{1}{2}(\alpha + \vartheta)$

diffère très peu de $\frac{\pi}{2}$ et $|1 - \omega_2|$ est infiniment petit. Dans le premier cas

Γ_2 est tangente par en bas à l'axe réel, et dans le second elle est tangente à un rayon du cercle-unité qui fait un angle infiniment petit avec l'axe réel. Il en résulte que si les segments s_1 et s_2 étaient parallèles à l'axe réel, ils ne pourraient avoir, dans ces derniers cas, qu'une longueur infinitésimale, fonction de $\lambda = \frac{\nu}{n}$.

On voit aussi sans difficulté que si $\alpha = 0$, $\omega = 1$ n'est jamais point de Δ_2 et tout ce calcul peut être évité. Tout au contraire si $\alpha = \pi$, $\omega = 1$ est toujours point de Δ_2 , ω_1 et ω_2 étant symétriques par rapport à $\omega = 1$, ils se rapprochent arbitrairement de ce point. Néanmoins, dans ce cas l'axe réel est l'axe de symétrie de Γ_2 et les arcs de Γ_2 se rapprochent de l'axe réel simultanément par en haut et par en bas, et malgré que l'on a, d'après (8.7) $\sigma = 0$, la longueur commune des segments s_1 et s_2 peut être choisie indépendamment de n . Le cas de $\alpha = \pi$ n'implique donc pas une discussion particulière.

Reprenons donc la première alternative $0 < \alpha < \pi$ et supposons pour l'instant que λ est un paramètre continu. λ a ainsi une valeur $\lambda^{(0)}$ pour laquelle

$$(8.13) \quad \omega_2 = \omega_2^{(0)} = e^{i(\alpha + \pi + \vartheta^{(0)})} = 1$$

d'où

$$(8.14) \quad \vartheta^{(0)} = \pi - \alpha$$

et de l'expression (7.12) de $\cos \vartheta$, on obtient

$$(8.15) \quad \lambda^{(0)} = \frac{1 - r^2}{1 + 2r \cos \alpha + r^2}.$$

La formule (7.12) montre également que ϑ est une fonction strictement monotone décroissante de λ . Par conséquent $\vartheta < \vartheta^{(0)}$ si $\lambda > \lambda^{(0)}$, et Δ_2 ne contient pas le point $\omega = 1$; de même $\vartheta > \vartheta^{(0)}$ si $\lambda < \lambda^{(0)}$ et $\omega = 1$ est un point intérieur à Δ_2 . Ce dernier cas est à examiner. Désignons par ω_0 le premier point d'intersection de $\Gamma_2(\lambda^{(0)})$ et de la demi-droite $\omega = 1 + ue^{i\sigma}$, où u est une variable non négative, et $|\omega_0| > 1$. Pour chaque $\lambda < \lambda^{(0)}$ on a donc

$$(8.16) \quad \left| \omega_0^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega_0}{\omega_0 + \zeta_0} \right| < \left| \omega_0^{\lambda^{(0)}} \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega_0}{\omega_0 + \zeta_0} \right| = 1.$$

Ce qui revient à dire que ω_0 est contenue par tous les $\Gamma_2(\lambda)$, si $\lambda < \lambda^{(0)}$. D'après la formule (8.15) $\lambda^{(0)}$ ne dépend pas de n et v , donc la distance $|1 - \omega_0| = 2u_0$ a la même propriété. Soit u_0 la longueur commune de s_1 et s_2 , le point $\omega = 1 + u_0 e^{i\sigma}$ appartient alors à D_1 pour tous les $\lambda \leq \lambda^{(0)}$, et s_1 et s_2 ne varient pas avec n et v . Avec ces notations et en reprenant le raisonnement du § 6 on a

$$(8.17) \quad \left| \int_{s_1} + \int_{s_2} \right| = O(n^{-\delta}) \left| \int_{1+n^{-1}e^{i\sigma}}^{1+u_0e^{i\sigma}} \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta-1}}{(1-\omega)^\delta} \omega^v \left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^{n+1} d\omega \right| =$$

$$= \left| O(n^{-\delta}) \int_{1+n^{-1}e^{i\sigma}}^{1+u_0e^{i\sigma}} \frac{|\omega|^v}{|\omega - 1|^\delta} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n |d\omega| \right| = I_{nv}.$$

Faisons le changement de variable $\omega = 1 + ue^{i\sigma}$ ($u \geq 0$), alors

$$(8.18) \quad I_{nv} = O(n^{-\delta}) \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{|\omega|^v}{u^\delta} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n du$$

où ω est une fonction de u . Ensuite

$$(8.19) \quad \sum_{v=v'_1}^{v_1} I_{vn} = O(n^{-\delta}) \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{|\omega|^{v'_1} (|\omega|^{v_1-v'_1+1} - 1)}{u^\delta (|\omega| - 1)} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n du \leq$$

$$\leq O(n^{-\delta}) \left\{ \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{|\omega|^{v_1}}{u^\delta (|\omega| - 1)} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n du + \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{|\omega|^{v'_1}}{u^\delta (|\omega| - 1)} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n du \right\}.$$

Or, nous venons de voir que les points de s_1 et de s_2 appartiennent à D_1 et ainsi

$$(8.20) \quad |\omega|^{v_1} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n = \left| \omega^{\lambda} \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n < 1;$$

$$|\omega|^{v'_1} \left| \frac{1 + \zeta_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n = \left| \omega^{\lambda'_1} \frac{1 + \zeta_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n < 1.$$

On peut tirer des relations (8.19) et (8.20)

$$(8.21) \quad \sum_{v=v'_1}^{v_1} I_{nv} \leq O(n^{-\delta}) \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{du}{u^\delta (|\omega| - 1)}.$$

σ étant choisi de telle façon [cf. (8.7)] que l'on ait $0 < \cos \sigma \leq 1$ et ainsi

$$(8.22) \quad |\omega| - 1 = (1 + 2u \cos \sigma + u^2)^{1/2} - 1 \geq u \cos \sigma.$$

Il vient donc de (8.21) et (8.22) que

$$(8.23) \quad \sum_{v=v'_1}^{v_1} I_{nv} \leq O(n^{-\delta}) \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{du}{u^{\delta+1}} = O(n^{-\delta}) \left[-\frac{1}{\delta} (u_0^{-\delta} - n^{\delta}) \right] = O(1).$$

Les relations (8.9) et (8.23) expriment le fait que la somme des intégrales envisagées prises sur l'arc a'' et sur les segments s_1 et s_2 est une quantité bornée quand v varie de v'_1 à v_1 . L'application de la formule asymptotique (7.3) est donc permise.

Néanmoins notre raisonnement est en défaut si ω_1 ou ω_2 , ou bien si tous les deux cols tombent dans le cercle c'' . Nous écarterons cette difficulté en démontrant que ces cas ne se produisent qu'un nombre fini de fois, ce dont on peut faire abstraction. Autrement dit on supprime un nombre fini de termes de la somme $\sum_{v=v'_1}^{v_1} |g_{nv}|$ ce qui est justifié par le lemme 4 du § 6 selon lequel les $|g_{nv}|$ sont uniformément bornés en n et en v .

Nous venons de voir que si $\alpha = 0$ le cercle c'' n'intervient même pas. Si $\alpha = \pi$, alors ω_1 et ω_2 sont des nombres complexes conjugués et ils se rapprochent le plus du point $\omega = 1$ si $\lambda = \lambda_1$. En exprimant le fait que ω_1 et ω_2 sont les fonctions de λ , nous pouvons écrire d'après les formules (6.1) et (7.10)

$$(8.24) \quad \begin{aligned} |\omega_1(\lambda_1) - \omega_2(\lambda_1)| &= \frac{1-r^2}{r\lambda_1} \left[\left(\frac{1}{\log n} + \frac{v_n+1}{n} \right) \left(\frac{4r}{1-r^2} - \frac{1}{\log n} - \frac{v_n+1}{n} \right) \right]^{\frac{1}{2}} > \\ &> \frac{(1-r)^2}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\log n}} > \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

pour des n suffisamment élevés. $\omega_1(\lambda_1)$ et $\omega_2(\lambda_1)$ sont donc à l'extérieur du cercle c'' , si $\alpha = \pi$, et à plus forte raison $\omega_1(\lambda)$ et $\omega_2(\lambda)$ ne tombent pas dans ce cercle, si $\lambda < \lambda_1$.

Seul le cas $0 < \alpha < \pi$ nous intéresse. En vertu de l'inégalité (8.12) ω_1 n'est pas un point intérieur au cercle c'' , mais selon l'expression (8.10) la distance $|1 - \omega_2|$ peut devenir infiniment petite ou nulle. Nous devons évaluer le nombre des cas où

$$(8.25) \quad |1 - \omega_2| = 2 \left| \cos \frac{\alpha + \vartheta}{2} \right| = 2 \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \vartheta}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Si ϑ vérifie l'inégalité (8.25), on a

$$(8.26) \quad \frac{4}{\pi} \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \vartheta}{2} \right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad |\vartheta + \alpha - \pi| \leq \frac{\pi}{2n}.$$

Ces ϑ sont dans un intervalle I de longueur $\frac{\pi}{n}$. D'autre part d'après la formule (7.12)

$$(8.27) \quad \lambda = \lambda(\vartheta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \vartheta + r^2},$$

et il en découle que

$$(8.28) \quad A = \max_{0 \leq \vartheta \leq \pi} |\lambda'(\vartheta)| < \infty.$$

Par conséquent la longueur de l'image I' de l'intervalle I obtenu par la transformation $\lambda(\vartheta)$ est au plus égale à $\frac{\pi}{n}A$ et le nombre des $\lambda = \frac{\nu}{n}$ qui se trouvent

dans I' n'est pas supérieur à $\pi A + 1$, quantité indépendante de n . Cette dernière est la borne supérieure du nombre des cols ω_2 qui peuvent tomber dans le cercle c'' ou sur sa frontière. Faisons abstraction de ces cols et des g_{nv} correspondants. Les courbes L_λ qui restent, réalisent déjà les conditions prescrites.

Ces réflexions faites, la courbe L_λ doit être tracée de la manière suivante: elle passe par les cols ω_1 et ω_2 où elle est respectivement tangente aux droites

t_1 et t_2 , elle ne contient pas les points $\omega = 0$, $\omega = 1$, $\omega = -\frac{1}{\zeta_0}$, ailleurs elle

se trouve entièrement dans le domaine D_1 et entoure le pôle $\omega = -\zeta_0$. Si $\omega = 1$ est un point de A_2 , l'arc a'' et les segments s_1 , s_2 font partie de L_λ . Au reste L_λ peut être une courbe quelconque, toutefois de structure géométrique assez simple pour que les intégrales prises sur elle aient un sens.

§ 9. Cas de $\delta = \frac{1}{2}$

Les résultats acquis dans les §§ précédents permettent de terminer la démonstration du théorème 1 qui n'a été achevée complètement que pour $\delta > \frac{1}{2}$.

Nous venons de construire dans le § 8 la courbe d'intégration L_λ , mais sa connaissance en elle-même ne suffit encore pas pour pouvoir appliquer la formule (7.3) ou (7.2). En fait, après avoir déterminé la valeur asymptotique de $|g_{nv}|$, il faut former encore la somme $\sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2} |g_{nv}|$, et par conséquent ce n'est pas seulement la partie principale de (7.3) qui doit être envisagée, mais aussi le reste qui y figure. Or, nous avons déjà fait observer dans le § 7 que l'expression (7.3) doit être soumise à une analyse préalable minutieuse, si les quantités $f(\omega_j)$, $|f''(\omega_j)|$, $h(\omega_j)$ ($j = 1, 2$) dépendent elles-mêmes du paramètre n . Les formules du § 7 indiquent que c'est précisément le cas: ω_j dépend de n par intermédiaire de λ . Une autre particularité de la formule (7.3) provient du fait que ω_2 (si ζ_0 est un nombre complexe) ou bien simultanément ω_1 et ω_2 (si ζ_0 est réel) peuvent se trouver dans le voisinage du point $\omega = 1$, pôle de la fonction $h(\omega)$. Dans le but de modifier la relation (7.3) nous avons besoin d'un lemme concernant les fonctions suivantes du paramètre réel t et de la variable réelle x :

1° $\eta(t) > 0$ définie (au moins) pour $t > 1$, $\eta(t) = O(1)$ si $1 < t \leq \infty$, et $\eta(t)^{-1} = O(\log t)$ quand $t \rightarrow \infty$;

$$2^\circ f(x; t) = -\eta(t)x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots$$

où les α_j ($j=3, 4, \dots$) peuvent dépendre de t , mais $\alpha_3 = O(1)$ et la somme $t \sum_{j=3}^{\infty} |\alpha_j x^j|$ est uniformément bornée en t pour $|x| \leq t^{-1/3} = \tau$;

$$3^\circ \quad h(x; t) = h(0; t) \quad h^*(x; t) = h(0; t) (1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots)$$

où il existe des β_j qui dépendent de t , mais la série de $h^*(x; t)$ est absolument convergente pour $|x| < \xi$, ξ étant supposé supérieur à τ ; en outre il faut traiter séparément les deux cas suivants:

$$(a) \quad \beta_j = O(\beta^j) \quad ; \quad (b) \quad \beta_j = O\left(\frac{t^{j/3}}{2^j}\right) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

où $\beta > 0$ est une constante (le cas (b) contient les cas (a), il est pourtant nécessaire de faire cette distinction qui s'expliquera plus tard);

4°

$$\int_{-\infty}^{-\tau} h^*(x; t) e^{tf(x; t)} dx = O(t^{-N}), \quad \int_{\tau}^{\infty} h^*(x; t) e^{tf(x; t)} dx = O(t^{-N})$$

pour chaque entier $N > 0$.

Avec ces notations le lemme s'énonce comme suit:

Lemme 5. *Soit t suffisamment grand. Alors*

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x; t) e^{tf(x; t)} dx = h(0; t) \left(\frac{2\pi}{t\eta(t)} \right)^{1/2} + h(0; t) O\left\{ t^{-\frac{3}{2}} \eta(t)^{-\frac{7}{2}} \right\} = P + E \quad (9.1a)$$

dans le cas (a), et

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x; t) e^{tf(x; t)} dx = h(0; t) \left(\frac{2\pi}{t\eta(t)} \right)^{1/2} + h(0; t) O\left\{ t^{-\frac{2}{3}} \eta(t)^{-1} \right\} = P + E' \quad (9.1b)$$

dans le cas (b).

Démonstration. Le lemme s'obtient par un calcul dont l'analogue peut être trouvé dans [10] (pp. 60—69). Résumons d'abord les conséquences immédiates des conditions 1°—4°. On a d'après 1°

$$(9.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^a \eta(t) = +\infty$$

pour chaque $a > 0$. Il résulte ainsi de 2° et de (9.2) que pour $|x| \leq \tau$ et $t \rightarrow \infty$

$$(9.3) \quad e^{tf(x; t)} = e^{-\tau(t)x^2} \{1 + \alpha_3 t x^3 + O(tx^4) + O(t^2 x^6)\}.$$

On conclut de 3°, également pour $|x| \leq \tau$ et $t \rightarrow \infty$

$$(9.4a) \quad h^*(x; t) = 1 + \beta_1 x + O(x^2)$$

dans le cas (a), et

$$(9.4b) \quad h^*(x; t) = 1 + O(t^{1/3} |x|)$$

dans le cas (b).

Dans le cas (a) nous avons par les formules (9.3) et (9.4a)

$$(9.5) \quad h^*(x; t) e^{tf(x; t)} = 1 + \beta_1 x + \alpha_3 t x^3 + O(x^2 + t x^4 + t^2 x^6),$$

et de 4° et (9.1a)

$$(9.6) \quad \begin{aligned} J(t) &= h(0; t) \left\{ \int_{-\tau}^{\tau} e^{-\eta(t) t x^2} dx + \int_{-\tau}^{\tau} (\beta_1 x + \alpha_3 t x^3) e^{-\eta(t) t x^2} dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\tau}^{\tau} O(x^2 + t x^4 + t^2 x^6) e^{-\eta(t) t x^2} dx + O(t^{-N}) \right\} = \\ &= h(0; t) \{J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + O(t^{-N})\}. \end{aligned}$$

Rappelons certaines relations connues où $q \geq 0$ est un entier quelconque :

$$(9.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta(t) t x^2} dx = \left(\frac{2\pi}{t \eta(t)} \right)^{1/2}, \quad \int_{\tau}^{\infty} e^{-\eta(t) t x^2} x^q dx = O \left\{ e^{-\frac{1}{2} (\eta(t) t)^{1/3}} \right\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta(t) t x^2} |x|^q dx = O \left\{ (\eta(t) t)^{-\frac{1}{2} (q+1)} \right\}, \quad \int_{-\tau}^{\tau} e^{-\eta(t) t x^2} x^{2q+1} dx = 0.$$

Par conséquent

$$(9.8) \quad \begin{aligned} J_1(t) &= \left(\frac{2\pi}{t \eta(t)} \right)^{1/2} + O \left\{ e^{-\frac{1}{2} (\eta(t) t)^{1/3}} \right\}, \quad J_2(t) = 0, \\ J_3(t) &= O \left\{ t^{-\frac{3}{2}} \eta(t)^{-\frac{7}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Les formules (9.6) et (9.8) fournissent la relation (9.1a).

Dans le cas (b) nous avons d'après (9.3) et (9.4b)

$$(9.9) \quad h^*(x; t) e^{tf(x; t)} = 1 + O(t^{1/3} |x|)$$

et en tenant compte de 4°, (9.7) et (9.8)

$$(9.10) \quad \begin{aligned} J(t) &= h(0; t) J_1(t) + h(0; t) O \left\{ t^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta(t) t x^2} |x| dx \right\} + h(0; t) O(t^{-N}) = \\ &= h(0; t) \left(\frac{2\pi}{t \eta(t)} \right)^{1/2} + h(0; t) O \{ t^{-2/3} \eta(t)^{-1} \} = P + E' \end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la relation (9.1b).

L'évaluation du reste de la formule (7.3) à l'aide du lemme 5 exige le changement des notations adoptées pour le lemme. Remplaçons t par n , l'axe des x par la droite t_1 resp. t_2 , l'origine des x par ω_1 resp. ω_2 , les fonctions $f(x; t)$, $h(x; t)$, $\eta(t)$ par $f(\omega)$, $h(\omega)$, $f''(\omega_1)$ resp. $f''(\omega_2)$. En développant $f(\omega)$ et $h(\omega)$ en série de Taylor suivant les puissances de $\omega - \omega_1$ resp. $\omega - \omega_2$ on met en évidence la dépendance de ces fonctions de ω (équivalent à x) et de n (équivalent à t). Désignons ces fonctions par $f(\omega; \omega_1)$, $h(\omega; \omega_1)$ resp. $f(\omega; \omega_2)$, $h(\omega; \omega_2)$. Nous supposons de plus que la courbe d'intégration L_λ est composée d'arcs convenablement choisis (cf. § 8) et de deux segments de droite $s_{1\lambda}$ et $s_{2\lambda}$ de support t_1 et t_2 , de longueur commune $2n^{-1/3}$ et de milieu

ω_1 resp. ω_2 , tels que $|\omega - \omega_1| \leq n^{-1/3}$ si $\omega_1 \in s_{1\lambda}$, et $|\omega - \omega_2| \leq n^{-1/3}$ si $\omega_2 \in s_{2\lambda}$. Après avoir démontré que $f''(\omega_1)$, $f(\omega; \omega_1)$, $h(\omega; \omega_1)$ resp. $f''(\omega_2)$, $f(\omega; \omega_2)$, $h(\omega; \omega_2)$ réalisent les conditions 1°–4° du lemme 5 on peut remplacer L_λ par $s_{1\lambda}$

et $s_{2\lambda}$ sans commettre par cela une erreur supérieure à $O\left\{\exp\left(-\frac{1}{4}n^{1/3}|f''(\omega_1)|^{1/3}\right)\right\}$

[cf. (9.7)] où $|f''(\omega_1)| = |f''(\omega_2)|$ est équivalent à $\eta(n)$. Observons encore que la condition 4° correspond au fait que $\operatorname{Re} f(\omega) < 0$ si $\omega \in L_\lambda$, mais $\omega \neq \omega_1$ resp. $\omega \neq \omega_2$ et la valeur de l'intégrale prise sur $L_\lambda - s_{1\lambda} - s_{2\lambda}$ est de l'ordre sus-mentionné.

On peut vérifier que $s_{1\lambda} \subset D_1$ et $s_{2\lambda} \subset D_1$. Sans rentrer dans les détails nous remarquons seulement que dans les cas considérés ($\lambda'_1 \leq \lambda \leq \lambda_1$) la distance des cols $|\omega_1(\lambda) - \omega_2(\lambda)|$ atteint ses minima pour $\lambda = \lambda'_1$ et $\lambda = \lambda_1$, et selon les formules (6.1) et (7.10) l'expression (8.24) reste valable même si $\alpha \neq \pi$, autrement dit il existe une constante $c^* > 0$ telle que, $|\omega_1(\lambda'_1) - \omega_2(\lambda'_1)| > c^*(\log n)^{-1/2} > 2n^{-1/3}$ et $|\omega_1(\lambda_1) - \omega_2(\lambda_1)| > c^*(\log n)^{-1/2} > 2n^{-1/3}$, si n est assez grand.

Nous étudierons maintenant si $f''(\omega_1)$, $f(\omega; \omega_1)$, $h(\omega; \omega_1)$ resp. $f''(\omega_2)$, $f(\omega; \omega_2)$, $h(\omega; \omega_2)$ vérifient les conditions 1°–4° du lemme 5. Nous désignerons dans ce qui suit par c_i , c'_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) des constantes numériques positives.

A. *Examen de $f''(\omega_1)$ resp. $f''(\omega_2)$.* Supposons que c_0 , c'_0 , dont les valeurs seront fixées à chaque occasion, vérifient l'inégalité suivante

$$(9.11) \quad \frac{1-r}{1+r} < \lambda'_1 < c'_0 < c_0 < \lambda_1 < \frac{1+r}{1-r},$$

λ_1 et λ'_1 ont été définis par la relation (6.1). Si

$$(9.12) \quad c'_0 \leq \lambda \leq c_0,$$

il découle de (7.16) et (9.11) que

$$(9.13) \quad \begin{aligned} c'_1 &= \frac{1-r}{1+r} \left\{ \left(\frac{1+r}{1-r} - c_0 \right) \left(c'_0 - \frac{1-r}{1+r} \right) \right\}^{1/2} \leq |f''(\omega_1(\lambda))| \leq \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} \left\{ \left(\frac{1+r}{1-r} - c'_0 \right) \left(c_0 - \frac{1-r}{1+r} \right) \right\}^{1/2} = c_1 \end{aligned}$$

ou en posant $\eta(n) = |f''(\omega_1(\lambda))|$ (9.13) s'écrit sous la forme

$$(9.14) \quad c'_1 \leq \eta(n) \leq c_1.$$

Pour les $\lambda \in [c_0, \lambda_1]$ et $\lambda \in [\lambda'_1, c'_0]$ nous introduisons les notations

$$(9.15) \quad \lambda_1 \geq \lambda_\mu \geq c_0, \quad \lambda'_1 \leq \lambda'_{\mu'} \leq c'_0$$

où λ_μ et $\lambda'_{\mu'}$ sont déterminés par les expressions

$$(9.16) \quad \lambda_\mu = \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{\log n} - \frac{v_n + \mu}{n}, \quad \lambda'_{\mu'} = \frac{1-r}{1+r} + \frac{1}{\log n} + \frac{v'_n + \mu'}{n}.$$

v_n et v'_n ont été donnés par (6.2), et les indices μ et μ' prennent d'après les inégalités (9.15) les valeurs suivantes:

$$(9.17) \quad \begin{aligned} \mu = 1, 2, \dots, \left[n \left(\frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{\log n} - c_0 \right) - v_n \right] &= M \approx c_2 n, \\ \mu' = 1, 2, \dots, \left[n \left(c'_0 - \frac{1}{\log n} - \frac{1-r}{1+r} \right) - v'_n \right] &= M' \approx c'_2 n. \end{aligned}$$

En vertu de (9.15) et (9.16) on a

$$(9.18) \quad c_0 - \frac{1-r}{1+r} \leq \lambda_\mu - \frac{1-r}{1+r} < \frac{1+r}{1-r} - \frac{1-r}{1+r} = \frac{4r}{1-r^2}$$

et par suite, selon (7.16)

$$(9.19) \quad \begin{aligned} \frac{1-r}{1+r} \left\{ \left(c_0 - \frac{1-r}{1+r} \right) \left(\frac{1}{\log n} + \frac{v_n + \mu}{n} \right) \right\}^{1/2} &\leq |f''(\omega_1(\lambda_\mu))| \leq \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} \left\{ \frac{4r}{1-r^2} \left(\frac{1}{\log n} + \frac{v_n + \mu}{n} \right) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Une relation analogue peut être établie pour $|f''(\omega_1(\lambda'_{\mu'}))|$. On conclut de (9.19) qu'il existe deux constantes positives c_3 et c'_3 telles que

$$(9.20) \quad c'_3 (\log n)^{-\frac{1}{2}} < \eta(n) < c_3.$$

Que l'inégalité (9.14), ou que (9.20) limite $\eta(n)$, la condition 1° est réalisée.

B. Examen de $f(\omega; \omega_1)$ resp. $f(\omega; \omega_2)$. On obtient de l'expression (7.9) de $f'(\omega)$

$$(9.21) \quad f^{(m)}(\omega_1) = (-1)^{m-1} (m-1)! \left\{ \frac{\lambda}{\omega_1^m} + \frac{\bar{\zeta}_0^m}{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega_1)^m} - \frac{1}{(\omega_1 + \zeta_0)^m} \right\}$$

qui s'annule pour $m = 1$. Ainsi

$$(9.22) \quad f(\omega; \omega_1) = f(\omega_1) - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left\{ \frac{\lambda}{\omega_1^m} + \frac{\bar{\zeta}_0^m}{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega_1)^m} - \frac{1}{(\omega_1 + \zeta_0)^m} \right\} (\omega - \omega_1)^m$$

et il résulte de (9.21) que

$$(9.23) \quad \frac{|f^{(m)}(\omega_1)|}{m!} \leq \frac{1}{m} \left\{ \lambda + \left| \frac{\bar{\zeta}_0^m}{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega_1)^m} \right| + \frac{1}{|\omega_1 + \zeta_0|^m} \right\} < 2 \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^m.$$

La série (9.22) est donc absolument convergente, si $|\omega - \omega_1| < \frac{1-r}{1+r}$,

et en vertu de (9.23), si n est assez élevé, on a pour $|\omega - \omega_1| \leq n^{-\frac{1}{3}} < \frac{1}{2} \frac{1-r}{1+r}$

$$(9.24) \quad n \sum_{m=3}^{\infty} \frac{|f^{(m)}(\omega_1)|}{m!} |\omega - \omega_1|^m < 2 \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^3 n |\omega - \omega_1|^3 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^m |\omega - \omega_1|^m < 4 \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^3.$$

La somme (9.24) est uniformément bornée. De telles relations peuvent être déduites pour $f(\omega; \omega_2)$. La condition 2° est donc réalisée.

C. *Examen de $h(\omega; \omega_1)$ resp. $h(\omega; \omega_2)$.* Nous avons constaté que ω_1 et ω_2 ne jouent pas de rôles identiques, si ζ_0 est complexe (cf. § 8). Dans

ce cas $|1 - \omega_2|$ prend aussi des valeurs inférieures à $n^{-\frac{1}{3}}$, tandis que $|1 - \omega_1|$ reste supérieure à une constante positive d_1 [cf. (8.12)]. Par contre si ζ_0 est réel $|1 - \omega_1|$ peut aussi devenir très petit et pour $\alpha = 0$ ce sont les points $\omega_1(\lambda'_1)$ et $\omega_2(\lambda'_1)$, pour $\alpha = \pi$ ce sont les points $\omega_1(\lambda_1)$ et $\omega_2(\lambda_1)$ qui s'approchent le plus du point $\omega = 1$. Cependant

$$(9.25) \quad |1 - \omega_1(\lambda'_1)| = |1 - \omega_2(\lambda'_1)| > c_4 (\log n)^{-\frac{1}{2}} > n^{-\frac{1}{3}} \quad \text{si } \alpha = 0,$$

$$|1 - \omega_1(\lambda_1)| = |1 - \omega_2(\lambda_1)| > c_4 (\log n)^{-\frac{1}{2}} > n^{-\frac{1}{3}} \quad \text{si } \alpha = \pi$$

[cf. (8.24)]. Il en découle qu'on ne rencontre pas de difficulté pour développer

en série $h(\omega; \omega_1)$ suivant les puissances de $\omega - \omega_1$, où $|\omega - \omega_1| \leq n^{-\frac{1}{3}}$ que ζ_0 soit complexe ou réel. On peut dire la même chose sur la série de $h(\omega; \omega_2)$ développée autour de ω_2 si ζ_0 est réel; mais si ζ_0 est complexe il faut étudier à part le comportement de $h(\omega; \omega_2)$. Il est donc motivé de traiter d'abord la fonction $h(\omega; \omega_2)$, toutes conclusions s'ensuivront pour $h(\omega; \omega_1)$.

$h(\omega)$ est définie par la formule (7.20) et on peut écrire

$$(9.26) \quad h(\omega; \omega_2) = h(\omega_2) \frac{\left(1 + \frac{\bar{\zeta}_0(\omega - \omega_2)}{1 + \bar{\zeta}_0 \omega_2} \right)^{k + \frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{\omega - \omega_2}{1 - \omega_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\omega - \omega_2}{\omega_2 + \zeta_0} \right)} = \\ = h(\omega_2) h^*(\omega; \omega_2) = h(\omega_2) [1 + \beta_1(\omega - \omega_2) + \beta_2(\omega - \omega_2)^2 + \dots].$$

La série qui figure dans (9.26) est absolument convergente si

$$(9.27) \quad |\omega - \omega_2| < \min \left\{ \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega_2}{\bar{\zeta}_0} \right|, |\omega_2 + \zeta_0|, |1 - \omega_2| \right\} = b.$$

La relation (9.27) supposée vérifiée $h^*(\omega; \omega_2)$ est analytique pour $|\omega - \omega_2| \leq n^{-\frac{1}{3}}$, si $b > n^{-\frac{1}{3}}$, mais $h^*(\omega; \omega_2)$ n'est pas développable en série dans le même cercle, suivant les puissances de $\omega - \omega_2$ si $|1 - \omega_2| \leq n^{-\frac{1}{3}}$. Nous allons démontrer tout à l'heure un lemme pour éliminer cet obstacle, mais envisageons premièrement les cas où $|1 - \omega_2| > n^{-\frac{1}{3}}$. Il faut calculer les β_j . Il est aisé de voir d'après (9.26) que

$$(9.28) \quad \beta_j = q_j(1 - \omega_2)^{-j}$$

où $|q_j| = O(1)$. Si $|1 - \omega_2|^{-1} \leq \beta$, alors $\beta_j = O(\beta^j)$ et on est dans le cas (a). Par contre si $|1 - \omega_2| \geq 2n^{-\frac{1}{3}} = \xi$, on a $\beta_j = O\left(\frac{n^{j/3}}{2^j}\right)$ et l'on se trouve dans le cas (b). La série de $h^*(\omega; \omega_2)$ est ainsi absolument convergente pour $|\omega - \omega_2| \leq n^{-\frac{1}{3}} < \xi$ dans tous les deux cas. La condition 3° est toujours remplie si ζ_0 est réel, elle est vérifiée même si ζ_0 est complexe pour $|1 - \omega_2| \geq 2n^{-\frac{1}{3}}$. Il reste à étudier le cas où ζ_0 est complexe et $|1 - \omega_2| < 2n^{-\frac{1}{3}}$. La réponse à la question ainsi posée est donnée par le lemme suivant:

Lemme 6. Soit $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$ et c''' le cercle de centre $\omega = 1$ et de rayon $2n^{-\frac{1}{3}}$. Alors

$$(9.29) \quad \sum_{\omega_2 \in c'''} |g_{nv}| = O(1).$$

Démonstration. Nous avons prouvé dans le § 8 que le nombre des $\omega_2 \in c''$ (c'' est le cercle de centre $\omega = 1$ et de rayon n^{-1}) est au plus égal à $\pi A + 1 = O(1)$ [cf. (8.28)]. On peut démontrer par un raisonnement semblable à celui du § 8 que le nombre des $\omega_2 \in c'''$ ne dépasse pas $2\pi A n^{2/3}$.

Cherchons à présent l'arc du cercle-unité sur lequel $|1 - \omega_2|$ peut devenir arbitrairement petit. Le phénomène se produit si $|\lambda^{(0)} - \lambda|$ est suffisamment petit [cf. (8.13), (8.14), (8.15)], parce que $\omega_2(\lambda)$ est une fonction continue de λ dans le voisinage de $\lambda^{(0)}$ et $\omega_2(\lambda^{(0)}) = 1$, donc $|1 - \omega_2(\lambda)|$ est très petit avec $|\lambda^{(0)} - \lambda|$. Il suffit ainsi de préciser les valeurs de c_0 et c'_0 telles qu'elles vérifient l'inégalité

$$(9.30) \quad \lambda_1 > c_0 > \lambda^{(0)} > c'_0 > \lambda'_1$$

et démontrer le lemme pour les $\lambda \in (c'_0, c_0)$.

Dans le calcul de J_{nv} [cf. (7.4)] décomposons L_λ en deux arcs partiels $A_{1\lambda}$ et $A_{2\lambda}$ comprenant respectivement les segments $s_{1\lambda}$ et $s_{2\lambda}$ (cf. p. 135) et soit

$$(9.31) \quad J_{nv} = J'_{nv} + J''_{nv} = \int_{A_{1\lambda}} h(\omega) e^{nf(\omega)} d\omega + \int_{A_{2\lambda}} h(\omega) e^{nf(\omega)} d\omega.$$

Rien n'empêche de faire usage de la formule (7.2) pour évaluer J'_{nv}

$$(9.32) \quad J'_{nv} = h(\omega_1) e^{nf(\omega_1) + i\tau_1} \left(\frac{2\pi}{n|f''(\omega_1)|} \right)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(n^{-1})\}.$$

En effet, ζ_0 n'étant pas réel, $|h(\omega_1)| < c_5$ [cf. (7.20), (8.12)], $\frac{1}{c'} > |f''(\omega_1)|^{-1} = \eta(n)^{-1} = O(1)$ et $|\exp(nf(\omega_1) + i\tau_1)| = 1$, ainsi le reste de l'expression (9.32) est $O(n^{-3/2})$, mais la formule (9.1a) du lemme 5 conduit à la même valeur $E = O(n^{-3/2})$. On déduit de (9.32) que

$$(9.33) \quad |J'_{nv}| < c_5 \left(\frac{2\pi}{c'_1 n} \right)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(n^{-1})\} = O(n^{-\frac{1}{2}}).$$

Cependant la relation (7.2) est inutilisable pour évaluer $|J''_{nv}|$ si $|1 - \omega_2| < 2n^{-\frac{1}{3}}$. Il faut limiter $|J''_{nv}|$ sans se référer à (7.2). Le fait que $\omega_2 \in s_{2\lambda}$ s'exprime par les relations

$$(9.34) \quad \omega = \omega_2 + ue^{i\tau_2}, \quad -n^{-\frac{1}{3}} \leq u \leq n^{-\frac{1}{3}}.$$

Désignons par $B'_{2\lambda}$ et $B''_{2\lambda}$ les parties de $A_{2\lambda}$ différentes de $s_{2\lambda}$. La valeur de l'intégrale en question prise sur $B'_{2\lambda}$ et $B''_{2\lambda}$ est $O(n^{\frac{1}{6}} e^{-\frac{n}{3}})$, car pour $\omega \in B'_{2\lambda}$, $\omega \in B''_{2\lambda}$ on a $|h(\omega)| = O(n^{\frac{1}{6}})$ et $|e^{nf(\omega)}| = O(e^{-\frac{n}{3}})$ et par suite

$$(9.35) \quad |J''_{nv}| = \left| \int_{s_{2\lambda}} h(\omega) e^{nf(\omega)} d\omega \right| + O(n^{-\frac{1}{6}} e^{-\frac{n}{3}}).$$

D'ailleurs, si $\omega \in s_{2\lambda}$, on a

$$(9.36) \quad |e^{nf(\omega)}| \leq 1, \quad |h(\omega)| \leq \frac{c_6}{|1 - \omega_2 - ue^{i\tau_2}|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{2c_6}{|u|^{\frac{1}{2}}}$$

et en faisant le changement de variable (9.34) on obtient par (9.35)

$$(9.37) \quad |J''_{nv}| \leq 4c_6 \int_0^{n^{-\frac{1}{3}}} \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} + O(n^{\frac{1}{6}} e^{-\frac{n}{3}}) = O(n^{-\frac{1}{6}}).$$

En vertu des relations (9.31), (9.33) et (9.37)

$$(9.38) \quad |J_{nv}| \leq |J'_{nv}| + |J''_{nv}| = O(n^{-\frac{1}{6}}).$$

D'autre part selon la formule (7.5)

$$(9.39) \quad |g_{nv}| \leq O(n^{-\frac{1}{2}}) |J_{nv}| = O(n^{-\frac{2}{3}}).$$

Or, nous venons de voir que le nombre des $\omega_2 \in c'''$ est $O(n^{\frac{2}{3}})$, d'où résulte la relation (9.29). Le lemme 6 est ainsi démontré.

Dans la partie suivante de ce § il est nécessaire de traiter séparément les cas où ζ_0 est complexe ($0 < \alpha < \pi$) et ceux où ζ_0 est réel ($\alpha = 0, \alpha = \pi$).

I. ζ_0 est complexe. On sait que $|h(\omega_1(\lambda))| = O(1)$ [cf. (7.20), (8.12)], mais $|h(\omega_2(\lambda))|$ peut avoir des valeurs très grandes. Néanmoins $|h(\omega_2(\lambda_\mu))| = O(1)$ et $|h(\omega_2(\lambda'_\mu))| = O(1)$ [cf. (9.15)–(9.17)], puisque $\lambda_\mu \notin (c'_0, c_0)$ et $\lambda'_\mu \notin (c'_0, c_0)$, tandis que $\lambda^{(0)} \in (c'_0, c_0)$ [cf. (9.30)] et l'intervalle critique des λ sur lequel $|h(\omega_2(\lambda))|$ devient très grand est un voisinage de $\lambda^{(0)}$. Par conséquent l'évaluation de E de (9.1a) est simple pour $\lambda = \lambda_\mu$ ou $\lambda = \lambda'_\mu$.

Nous avons pour ces λ , selon (9.20), $\eta(n)^{-1} = O\{(\log n)^{\frac{1}{2}}\}$ et ainsi

$$(9.40) \quad E = O\{n^{-\frac{3}{2}}(\log n)^{\frac{7}{4}}\}.$$

Soit $v_\mu = \lambda_\mu n$ et $v'_\mu = \lambda'_\mu n$, et formons la somme

$$(9.41) \quad \sum_{\mu=1}^M |J_{nv_\mu}| + \sum_{\mu'=1}^{M'} |J_{nv'_\mu}|,$$

où M et M' sont donnés sous (9.17), alors l'erreur commise en calculant (9.41) à l'aide de la formule (9.1a) est

$$(9.42) \quad O(n)E = E_1 = O\{n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{7}{4}}\}$$

et, étant donné que $|g_{nv}| = O(n^{-\frac{1}{2}})|J_{nv}|$, le reste de la somme $\sum_{\mu=1}^M |g_{nv_\mu}| + \sum_{\mu'=1}^{M'} |g_{nv'_\mu}|$ est

$$(9.43) \quad E_2 = O\{n^{-1}(\log n)^{\frac{7}{4}}\}.$$

On peut tirer ensuite de la relation (9.19)

$$(9.44) \quad (n|f''(\omega_1(\lambda_\mu))|)^{-\frac{1}{2}} = (v_n + \mu)^{-\frac{1}{4}} O(n^{-\frac{1}{4}})$$

et on obtient par (9.1a), (9.43) et (9.44)

$$(9.45) \quad \sum_{\mu=1}^M |g_{nv_\mu}| = O(n^{-\frac{1}{2}}) \sum_{\mu=1}^M |J_{nv_\mu}| = O(n^{-\frac{3}{4}}) \sum_{\mu=1}^M (v_n + \mu)^{-\frac{1}{4}} + E_2 = O(1).$$

On a de même

$$(9.46) \quad \sum_{\mu'=1}^{M'} |g_{nv'_\mu}| = O(1).$$

Supposons en second lieu que $c'_0 \leq \lambda \leq c_0$ et désignons ces λ par $\bar{\lambda}_x$, où l'indice x peut être positif, négatif ou nul et que nous allons définir. Soit $\bar{\lambda}_0$ le nombre de la forme $\frac{v}{n}$ qui est le plus près de $\lambda^{(0)}$ (n étant fixe), c'est-à-dire

$$(9.47) \quad |\bar{\lambda}_0 - \lambda^{(0)}| \leq n^{-1}$$

et posons

$$(9.48) \quad c'_0 \leq \bar{\lambda}_x = \bar{\lambda}_0 + x n^{-1} \leq c_0.$$

L'indice κ varie donc entre les limites

$$(9.49) \quad \kappa_1 = -[n(\bar{\lambda}_0 - c'_0)] \leq \kappa \leq [n(c_0 - \bar{\lambda}_0)] = \kappa_2$$

([x] désigne la partie entière de x), et $\kappa_2 - \kappa_1 = c_7 n$. Soient encore $\bar{y}_\kappa = \bar{\lambda}_\kappa n$ et $J_{n\bar{y}_\kappa} = J'_{n\bar{y}_\kappa} + J''_{n\bar{y}_\kappa}$. En tenant compte de (9.48) et (9.13) ou (9.14) on a $|f''(\omega_1(\bar{\lambda}_\kappa))| = \eta(n)^{-1} \leq \frac{1}{c_1}$, $|h(\omega_1(\bar{\lambda}_\kappa))| = O(1)$, et par suite le

reste $E = O(n^{-\frac{3}{2}})$ dans l'évaluation de $|J'_{n\bar{y}_\kappa}|$. Nous obtenons ainsi

$$(9.50) \quad \sum_{\kappa=\kappa_1}^{\kappa_2} |J'_{n\bar{y}_\kappa}| = \sum_{\kappa=\kappa_1}^{\kappa_2} \left\{ O(n^{-\frac{1}{2}}) + O(n^{-\frac{3}{2}}) \right\} = O(n^{\frac{1}{2}}).$$

Pour ce qui est de $J''_{n\bar{y}_\kappa}$ il faut s'occuper d'avantage de $h(\omega_2(\bar{\lambda}_\kappa))$. Nous avons selon la définition (9.47) et (9.48) de $\bar{\lambda}_\kappa$

$$(9.51) \quad |1 - \omega_2(\bar{\lambda}_\kappa)| = |1 - \omega_2(\bar{\lambda}_0) + \omega_2(\bar{\lambda}_0) - \omega_2(\bar{\lambda}_\kappa)| = (1 + |\kappa|) O(n^{-1}),$$

car $\max_{c'_0 \leq \lambda \leq c_0} |\omega'_2(\lambda)| = O(1)$. On obtient par (9.51)

$$(9.52) \quad |h(\omega_2(\bar{\lambda}_\kappa))| = (1 + |\kappa|)^{-\frac{1}{2}} O(n^{\frac{1}{2}}).$$

Les quantités $|1 - \omega_2(\bar{\lambda}_\kappa)|$ peuvent être très petites, mais en vertu du lemme 6 seules nous intéressent celles qui vérifient la relation $|1 - \omega_2(\bar{\lambda}_\kappa)| \geq 2n^{-\frac{1}{3}}$, ainsi il faut prendre $\beta_j = O\left(\frac{n^{j/2}}{2^j}\right)$ et l'on doit utiliser la formule (9.1b) dans le calcul de $J''_{n\bar{y}_\kappa}$, le reste s'exprimant par la relation

$$(9.53) \quad E' = (1 + |\kappa|)^{-\frac{1}{2}} O(n^{-\frac{1}{6}}).$$

En outre $|f''(\omega_2(\bar{\lambda}_\kappa))|^{-1} = |f''(\omega_1(\bar{\lambda}_\kappa))|^{-1} = O(1)$, par conséquent

$$(9.54) \quad \sum_{\kappa=\kappa_1}^{\kappa_2} |J''_{n\bar{y}_\kappa}| = \left\{ O(1) + O(n^{-\frac{1}{6}}) \right\} \sum_{\kappa=\kappa_1}^{\kappa_2} (1 + |\kappa|)^{-\frac{1}{2}} = O(n^{\frac{1}{2}}).$$

On obtient ainsi de (7.5), (9.50) et (9.54)

$$(9.55) \quad \sum_{\kappa=\kappa_1}^{\kappa_2} |g_{n\bar{y}_\kappa}| = O(n^{-\frac{1}{2}}) \sum_{\kappa=\kappa_1}^{\kappa_2} (|J'_{n\bar{y}_\kappa}| + |J''_{n\bar{y}_\kappa}|) = O(1).$$

Les relations (9.45), (9.46) et (9.54) établissent la démonstration du théorème 1 pour $\delta = \frac{1}{2}$ et ζ_0 complexe.

II. ζ_0 est réel. La discussion des cas de $\alpha = 0$ et de $\alpha = \pi$ s'effectuant de la même manière, il suffit de traiter l'un d'entre eux, soit $\alpha = \pi$. Cette fois-ci [cf. (8.10)]

$$(9.56) \quad |1 - \omega_1| = \cos \frac{\pi - \vartheta}{2} = \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad |1 - \omega_2| = -\cos \frac{\pi + \vartheta}{2} = \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Il s'ensuit que pour les petites valeurs de ϑ les quantités $|h(\omega_1)| = |h(\omega_2)|$ [cf. (7.20)] et $|f''(\omega_1)|^{-1} = |f''(\omega_2)|^{-1}$ [cf. (7.16)] deviennent très grandes. Les $\vartheta \geq \vartheta_0 > 0$, où $0 < \vartheta_0 < \pi$ est un angle constant arbitraire, ne créent donc aucune difficulté. Nous allons discuter les deux éventualités $\vartheta \in [\vartheta_0, \pi)$ et $\vartheta \in (0, \vartheta_0)$.

Admettons que c_0 et c'_0 [cf. (9.11)] soient maintenant confondues et désignons par

$$(9.57) \quad c_0 = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \vartheta_0 + r^2}$$

leur valeur commune. Alors pour chaque n assez élevé $\lambda_1 > c_0 > \lambda'_1$ et les inégalités (9.15) peuvent être remplacées par

$$(9.58) \quad \lambda_1 \geq \lambda_\mu > c_0 \geq \lambda'_{\mu'} \geq \lambda'_1.$$

Les définitions de $\lambda_\mu, \lambda'_{\mu'}, M, M'$ [cf. (9.16), (9.17)] ne changent pas. Les $\lambda'_{\mu'}$ correspondent aux $\vartheta \in [\vartheta_0, \pi)$ et les λ_μ aux $\vartheta \in (0, \vartheta_0)$. Il en découle, vu les relations (9.56) et (9.13), que $|h(\omega_1(\lambda'_{\mu'}))| = |h(\omega_2(\lambda'_{\mu'}))| = O(1)$ et $|f''(\omega_1(\lambda'_{\mu'}))|^{-1} = |f''(\omega_2(\lambda'_{\mu'}))|^{-1} < \frac{1}{c'_1}$, la formule (9.46) reste ainsi valable sans qu'il soit nécessaire de modifier la démonstration.

On déduit des expressions (7.12) et (9.16) que

$$(9.59) \quad \sin^2 \frac{\vartheta(\lambda_\mu)}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta(\lambda_\mu)) \geq c_8 (v_n + \mu) n^{-1},$$

d'où selon (7.20) et (8.10)

$$(9.60) \quad |h(\omega_1(\lambda_\mu))| = |h(\omega_2(\lambda_\mu))| = (v_n + \mu)^{-\frac{1}{4}} O(n^{\frac{1}{4}}).$$

L'expression (9.44) garde évidemment son sens, $\eta(n)^{-1}$ est donné à nouveau par la formule (9.40) et par application de la relation (9.1b) on obtient

$$(9.61) \quad \begin{aligned} \sum_{\mu=1}^M |g_{n\nu_\mu}| &= O(n^{-\frac{1}{2}}) \sum_{\mu=1}^M |J_{n\nu_\mu}| = \\ &= O(n^{-\frac{3}{4}}) \sum_{\mu=1}^M (v_n + \mu)^{-\frac{1}{4}} + O\{n^{-\frac{11}{12}} (\log n)^{\frac{1}{2}}\} \sum_{\mu=1}^M (v_n + \mu)^{-\frac{1}{4}} = O(1). \end{aligned}$$

Le théorème 1 est ainsi entièrement démontré.

§ 10. Cas de $\delta < \frac{1}{2}$

La première question qui se pose à nouveau est de savoir si la formule (7.3) est applicable ou non dans sa forme originelle. La réponse est affirmative au cas où $\lambda \in [c'_0, c_0]$ [cf. (9.11)] si en opposition à l'inégalité (9.30)

$$(10.1) \quad \lambda^{(0)} \notin [c'_0, c_0].$$

Au fait, dans ce cas $|h(\omega_1)|$ et $|h(\omega_2)|$ sont bornées, $\beta_j = O(\beta^j)$ et d'après les relations (9.13) et (9.14) on a

$$(10.2) \quad \frac{1}{c_1} > |f''(\omega_1)|^{-1} > \frac{1}{c_1} \quad \text{ou} \quad \eta(n)^{-1} = O(1).$$

Les $\lambda \notin [c'_0, c_0]$ et les g_{nv} correspondants ne nous intéressent pas, car nous allons démontrer que d'ores et déjà

$$(10.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{c'_0 n \leq v \leq c_0 n} |g_{nv}| = +\infty.$$

L'application de la formule (7.3) étant légitime on peut écrire

$$(10.4) \quad |J_{nv}| = |h(\omega_1) e^{nf(\omega_1) + i\tau_1} + h(\omega_2) e^{nf(\omega_2) + i\tau_2}| \left(\frac{2\pi}{n|f''(\omega_1)|} \right)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(n^{-1})\}.$$

En tenant compte de l'inégalité (10.2) nous devons seulement prouver que

$$(10.5) \quad |U_n(\lambda)| = |h(\omega_1(\lambda)) e^{nf(\omega_1(\lambda)) + i\tau_1(\lambda)} + h(\omega_2(\lambda)) e^{nf(\omega_2(\lambda)) + i\tau_2(\lambda)}|$$

reste supérieur à une constante $c_9 > 0$, lorsque $c'_0 \leq \lambda \leq c_0$. La démonstration sera faite séparément pour les ζ_0 complexes et pour les ζ_0 réels.

I. ζ_0 est complexe. Nous avons déjà remarqué dans l'introduction que pour faciliter la démonstration nous supposons $\delta > 0$, et pour $\delta \leq 0$ nous nous référons au théorème d'inclusion.

D'après l'expression (7.13) de ω_1 resp. ω_2 nous avons

$$(10.6) \quad |1 + \bar{\zeta}_0 \omega_1| = |\omega_1 + \zeta_0| = |1 + \bar{\zeta}_0 \omega_2| = |\omega_2 + \zeta_0| = r_1,$$

et en vertu des relations (7.20) et (8.10)

$$(10.7) \quad |h(\omega_1)| = \frac{r_1^{k+\delta-1}}{2^\delta \cos^\delta \frac{\alpha - \vartheta}{2}} \neq |h(\omega_2)| = \frac{r_1^{k+\delta-1}}{2^\delta \left| \cos \frac{\alpha + \vartheta}{2} \right|^\delta}.$$

Désignons par ϑ_0 et ϑ'_0 deux angles constants tels que

$$(10.8) \quad 0 < \vartheta_0 < \vartheta'_0 < \min(\alpha, \pi - \alpha)$$

et soient

$$(10.9) \quad c_0 = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \vartheta_0 + r^2}, \quad c'_0 = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \vartheta'_0 + r^2}.$$

Alors $c_0 > c'_0 > \lambda^{(0)}$ [cf. (8.15)], et aux $\lambda \in [c'_0, c_0]$ correspondent les $\vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta'_0]$. Il résulte donc de (10.5) et (10.7) que

$$(10.10) \quad |U_n(\lambda)| \geq ||h(\omega_1)| - |h(\omega_2)|| \geq \frac{r_1^{k+\delta-1}}{2^\delta} \left(\cos^{-\delta} \frac{\alpha + \vartheta_0}{2} - \cos^{-\delta} \frac{\alpha - \vartheta_0}{2} \right) = c_9 > 0.$$

II. ζ_0 est réel. Dans ce cas $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, donc $|h(\omega_1)| = |h(\omega_2)|$ et les relations (10.7) et (10.10) ne sont plus valables. C'est pourquoi nous démontrons le lemme suivant:

Lemme 7. *Il existe un entier n_0 et deux constantes positives c_{10} et c_{11} indépendants de n tels que l'inégalité*

$$(10.11) \quad |U_n(\lambda)| = \left| U_n \left(\frac{\nu}{n} \right) \right| \geq c_{10}$$

soit vérifiée au moins $[c_{11} n]$ fois, lorsque $n > n_0$ est fixé et $\frac{\nu}{n}$ varie dans un intervalle convenablement choisi contenu par (λ'_1, λ_1) .

Démonstration. Les discussions des cas $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ étant identiques, nous nous bornons à traiter l'un d'entre eux, soit $\alpha = 0$.

Cette fois-ci $\omega_1 = \bar{\omega}_2$ et on en tire les relations

$$(10.12) \quad h(\omega_1) = \overline{h(\omega_2)}, \quad nf(\omega_1) = \overline{nf(\omega_2)}, \quad \tau_1 = -\tau_2 + 3\pi.$$

Par conséquent le second terme du membre droit de l'expression de $U_n(\lambda)$ [cf. (10.5)] est le conjugué du premier multiplié par -1 , c'est-à-dire

$$(10.13) \quad U_n(\lambda) = 2i \operatorname{Im} h(\omega_1) e^{nf(\omega_1) + i\tau_1} = 2i \operatorname{Im} V_n(\lambda).$$

Introduisons maintenant certaines notations en considérant momentanément λ comme une variable continue. Soit

$$(10.14) \quad X(\lambda) = \arg h(\omega_1) + \tau_1$$

où $\arg h(\omega_1)$ est une des branches continues et univalentes de $\arg h(\omega_1)$ définie le long de l'arc $\omega_1(\lambda)$. $X(\lambda)$ est une fonction analytique de λ dans l'intervalle (λ'_1, λ_1) . Soit de plus

$$(10.15) \quad Y(\lambda) = \operatorname{Im} f(\omega_1) = \frac{1}{i} f(\omega_1).$$

Alors selon l'expression (10.13):

$$(10.16) \quad \arg V_n(\lambda) = X(\lambda) + nY(\lambda) = W_n(\lambda).$$

Commençons par l'examen de $Y(\lambda)$:

$$(10.17) \quad Y'(\lambda) = \operatorname{Im} \left\{ f'(\omega_1) \frac{d\omega_1}{d\lambda} + \log \omega_1 \right\} = \pi - \vartheta > 0$$

[cf. (7.8), $f'(\omega_1) = 0$ selon la définition de ω_1]. Observons que si λ croît dans l'intervalle (λ'_1, λ_1) , $\vartheta(\lambda)$ est une fonction strictement monotone décroissante dans l'intervalle $(0, \pi)$ et ω_1 se déplace dans le sens positif sur l'arc de la frontière du cercle-unité, lequel est situé au-dessus de l'axe réel [cf. (7.12), (7.13)]. Ainsi en vertu de (10.17) on peut affirmer que $Y(\lambda)$ et $Y'(\lambda)$ sont des fonctions strictement monotones croissantes dans l'intervalle (λ'_1, λ_1) .

Choisissons maintenant $\lambda = c_0$ de telle façon que nous ayons

$$(10.18) \quad \vartheta(c_0) = \frac{3\pi}{4}.$$

c'_0 est déterminée par l'égalité

$$(10.19) \quad c'_0 = \frac{1}{2}(\lambda'_1 + c_0).$$

La fonction $Y(\lambda)$ est donc monotone croissante pour $\lambda \in [c'_0, c_0] \subset (\lambda'_1, \lambda_1)$. Les formules (10.17) et (10.18) entraînent aussi

$$(10.20) \quad 0 < Y'(\lambda) \leq \frac{\pi}{4} \quad (\lambda \in [c'_0, c_0]) .$$

Soient S l'oscillation de $X(\lambda)$ dans l'intervalle $[c'_0, c_0]$, $T = Y(c_0) - Y(c'_0)$, et associons à chaque entier positif p qui obéit à l'inégalité

$$(10.21) \quad p \frac{S + \pi}{n} \leq T ,$$

donc

$$(10.22) \quad p = 1, 2, \dots, \left[\frac{nT}{S + \pi} \right] ,$$

un nombre $\lambda_p^{(n)} \in [c'_0, c_0]$ vérifiant l'identité

$$(10.23) \quad Y(\lambda_p^{(n)}) - Y(c'_0) = p \frac{S + \pi}{n} .$$

On écrira aussi $\lambda_0^{(n)} = c'_0$. $Y(\lambda)$ étant strictement monotone croissante, on a aussi $\lambda_p^{(n)} > \lambda_{p-1}^{(n)}$. On obtient des relations (10.16) et (10.23)

$$(10.24) \quad W_n(\lambda_p^{(n)}) - W_n(\lambda_{p-1}^{(n)}) = X(\lambda_p^{(n)}) - X(\lambda_{p-1}^{(n)}) + S + \pi \geq \pi .$$

$W_n(\lambda)$ étant une fonction continue, l'inégalité (10.24) exprime le fait qu'il existe un nombre $\lambda_{(p)}^{(n)} \in [\lambda_{p-1}^{(n)}, \lambda_p^{(n)}]$ pour lequel $W_n(\lambda_{(p)}^{(n)})$ est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$:

$$(10.25) \quad W_n(\lambda_{(p)}^{(n)}) = (2l_p + 1) \frac{\pi}{2} ,$$

où $l_p \geq 0$ est un entier.

Par ailleurs selon les relations (10.20) et (10.23)

$$(10.26) \quad \frac{S + \pi}{n} = Y(\lambda_p^{(n)}) - Y(\lambda_{p-1}^{(n)}) = (\lambda_p^{(n)} - \lambda_{p-1}^{(n)}) Y'(A_p) \leq \frac{\pi}{4} (\lambda_p^{(n)} - \lambda_{p-1}^{(n)}) ,$$

$A_p \in [\lambda_{p-1}^{(n)}, \lambda_p^{(n)}]$ est un point convenablement choisi. Il découle de (10.26) que

$$(10.27) \quad \lambda_p^{(n)} - \lambda_{p-1}^{(n)} \geq \frac{4}{n} .$$

L'intervalle $[\lambda_{p-1}^{(n)}, \lambda_p^{(n)}]$ contient donc au moins un point $\frac{\nu_p}{n}$ (ν_p étant un entier) tel que

$$(10.28) \quad \left| \frac{\nu_p}{n} - \lambda_{(p)}^{(n)} \right| \leq \frac{1}{n} .$$

Il est évident que $\nu_p \neq \nu_{p'}$, si $p \neq p'$.

Soit enfin

$$(10.29) \quad X'_0 = \max_{c'_0 \leq \lambda \leq c_0} |X'(\lambda)|,$$

alors grâce aux formules (10.16), (10.20) et (10.28)

$$(10.30) \quad \left| W_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) - W_n(\lambda_{(p)}^{(n)}) \right| \leq \frac{1}{n} \left(X'_0 + n \frac{\pi}{4} \right) = \frac{X'_0}{n} + \frac{\pi}{4}.$$

Soit n_0 aussi élevé qu'on ait $\frac{X'_0}{n_0} \leq \frac{\pi}{8}$, on conclut alors de (10.30)

$$(10.31) \quad \left| W_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) - W_n(\lambda_{(p)}^{(n)}) \right| \leq \frac{3\pi}{8} \quad (n > n_0),$$

et en tenant compte de (10.25) et (10.31)

$$(10.32) \quad (2l_p + 1) \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \leq W_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \leq (2l_p + 1) \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}.$$

d'où

$$(10.33) \quad \left| \operatorname{Im} V_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \right| = \left| h \left(\omega_1 \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \right) \sin W_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \right| \geq \left| h \left(\omega_1 \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \right) \right| \sin \frac{\pi}{8}.$$

L'expression (10.7) fournit pour $\alpha = 0$ et $c'_0 \leq \lambda \leq c_0$ la borne inférieure suivante de $|h(\omega_1)|$:

$$(10.34) \quad |h(\omega_1(\lambda))| \geq \frac{r_1^{k+\delta-1}}{2^\delta \cos^\delta \vartheta(c_0)} > \frac{r_1^{k+\delta-1}}{2 \sin^\delta \frac{\pi}{8}}.$$

On tire ainsi des formules (10.13), (10.33) et (10.34) que

$$(10.35) \quad \left| U_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \right| \geq r_1^{k+\delta-1} \sin^{1-\delta} \frac{\pi}{8} = c_{10}.$$

c_{11} est aussi donnée par la relation (10.22)

$$(10.36) \quad c_{11} = \frac{T}{S + \pi}.$$

Le lemme 7 est établi.

Soit donc ζ_0 réel ou non, il existe une constante c_{12} qui est égale à c_9 si ζ_0 est complexe, et à c_{10} si ζ_0 est réel, telle que pour des λ adéquats dans l'intervalle $[c'_0, c_0]$ (où c'_0 et c_0 ont des valeurs différentes selon que ζ_0 est réel ou non) $|U_n(\lambda)| \geq c_{12}$. Pour ces λ

$$(10.37) \quad |J_{nv}| \geq c_{12} \left(\frac{2\pi}{c_1 n} \right)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(n^{-1})\} > c_{13} n^{-\frac{1}{2}}$$

[cf. (10.2), (10.4)]. Or, d'après (7.5) et (7.7)

$$(10.38) \quad |g_{nv}| = d_{nv} n^{-\delta} |J_{nv}| > d n^{-\delta} |J_{nv}| \geq c_{14} n^{-\frac{1}{2}-\delta}.$$

Par conséquent (en tenant compte aussi du lemme 7 si ζ_0 est réel)

$$(10.39) \quad \sum_{c_0 n \leq \nu \leq c_1 n} |g_{\nu}| > c_{13} n^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

Étant donné que $\delta < \frac{1}{2}$ cette somme dépasse toute limite quand $n \rightarrow \infty$.

La démonstration du théorème 2 est ainsi achevée.

(Reçu le 20 Janvier 1959.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] TURÁN, P.: "A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence-circle". *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **12** (1958) 19–26.
- [2] ALPÁR, L.: "Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, I". *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **3** (1958) 1–12.
- [3] ALPÁR, L.: "Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, II". *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **3** (1958) 141–158.
- [4] RIESZ, M.: "Sur les séries de Dirichlet et les séries entières". *Compte Rendu* **149** (1909) 909–912.
- [5] HARDY, G. H.: *Divergent series*. Calderon Press, Oxford, 1949.
- [6] WATSON, G. N.: *A treatise on the theory of Bessel functions*. University Press, Cambridge, 1952.
- [7] FULKS, W.: "A generalization of Laplace's method". *Proceedings of the American Mathematical Society* **2** (1951) 613–622.
- [8] THOMSEN, D. L. JR.: "Extension of the Laplace method". *Proceedings of the American Mathematical Society* **5** (1954) 526–532.
- [9] BÉKÉSSY, A.: "Bemerkungen zur Engelschen Darstellung reeller Zahlen". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Roland Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* **1** (1958) 143–151.
- [10] DE BRUIJN, N. G.: *Asymptotic methods in analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, P. Noordhoff LTD. — Groningen, 1958.
- [11] RIEMANN, B.: *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. B. G. Teubner, Leipzig, 1876.

ЗАМЕЧАНИЕ О СУММИРУЕМОСТИ РЯДА ТЕЙЛОРА НА ОКРУЖНОСТИ СХОДИМОСТИ, III.

L. ALPÁR

Резюме

Пусть функция $f_1(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и $\zeta_0 \neq 0$ любая фиксированная внутренняя точка этого круга. Тогда функция, определенная соотношением

$$(1) \quad f_2(z) = f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right),$$

также регулярна в единичном круге $|z| < 1$ и поэтому в этом случае обе функции имеют при $|z| < 1$ сходящийся ряд Тейлора:

$$(2) \quad f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu},$$

$$(3) \quad f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0) z^{\nu}.$$

Предполагая еще, что $f_1(z)$ определена и ее ряд Тейлора сходится в одной из точек окружности сходимости, например, в точке $z = 1$, можно поставить следующей вопрос: что можно сказать о поведении ряда (3) в соответствующей точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$, являющейся решением уравнения $\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} = 1$? Можно ожидать, что поведение этих рядов будет сходным. Так, например, можно предполагать, что из сходимости ряда

$$(4) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$$

— когда $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{\nu} = 0$ — следует сходимость ряда

$$(5) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0) \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \right)^{\nu},$$

так как, если коэффициенты сходятся к нулю, то сходимость ряда Тейлора на окружности сходимости является локальным свойством, о котором можно предполагать, что неизменно останется, когда над переменной z производится аналитическое преобразование, каким является соотношение (1).

Однако Р. TURÁN [1] доказал, что, во-первых, к данному ζ_0 можно подобрать функцию $f_1(z)$ так, что ее ряд Тейлора (2) сходится в точке $z = 1$, а ряд (3) расходится в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$; во-вторых, если ряд (2) суммируем по Абелю в точке $z = 1$, то этот факт всегда имеет место и для ряда (3) в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$, как бы ни выбирать функцию $f_1(z)$, регулярную в круге $|z| < 1$.

В связи с этими теоремами противоположного характера сам собой встает вопрос: к какому результату приводит применение метода суммирования, более сильного чем вычисление обычной суммы рядов, но более слабого, чем суммирование по Абелю. Таковым является, например, наиболее часто применяющийся метод суммирования (C, k) , когда $0 < k < \infty$.

Исходя из этой идеи, в [2] было доказано, что к данному ζ_0 и к целому $k > 0$ можно подобрать регулярную в круге $|z| < 1$ функцию $f_1(z)$, ряд Тейлора (2) которой (C, k) — суммируем в точке $z = 1$, так, что ряд (3) не суммируем в смысле (C, k) в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$. С другой стороны, в [3] было доказано, что если $k \geq 0$ целое число и ряд (2) (C, k) — суммируем в точке

$z = 1$, то ряд (3) всегда $(C, k+1)$ — суммируем в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$. Из последней теоремы эвристически уже следует вышеприведенный результат ТУВАН-а о суммируемости по Абелю, так как метод суммирования Абеля часто является предельным случаем суммирования по Чезаро, но если $k \rightarrow \infty$, то $k+1$ не отличается от k .

Однако приведенные теоремы не достаточны для решения задачи. В предыдущем предполагалось, что k целое число. Но это не необходимое условие, так как определено и суммирование по Чезаро дробного и даже отрицательного порядка. Не выяснено и то, что из (C, k) — суммируемости ряда (4) следует лишь $(C, k+1)$ — суммируемость ряда (5), или существует такое число $0 < \delta < 1$, с которым последний уже $(C, k+\delta)$ — суммируем. На эти вопросы отвечают две теоремы работы, для формулировки которых пусть $\alpha_n^{(k)}$ означает n -ую (C, k) — среднюю ряда (4), а $\beta_n^{(k+\delta)}$ n -ую $(C, k+\delta)$ — среднюю ряда (5):

Теорема 1. Пусть $k \geq 0$ и $\delta \geq \frac{1}{2}$ данные числа $\zeta_0 \neq 0$ фиксированная

внутренняя точка единичного круга и $f_1(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ регулярная в круге $|z| < 1$ функция, ряд Тейлора которой (C, k) — суммируем в точке $z = 1$. Тогда ряд Тейлора определенной формулой

$$f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z^v$$

функции $(C, k+\delta)$ — суммируем в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(k+\delta)}.$$

Важным специальным случаем теоремы 1 является тот, когда $k = 0$.

Следствие. Из сходимости ряда $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ всегда следует $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ — суммируемость ряда $\sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}\right)^v$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(\frac{1}{2})}.$$

Результат противоположного характера имеет место в случае $\delta < \frac{1}{2}$.

Теорема 2. Пусть $k \geq 0$ и $\delta < \frac{1}{2}$ данные числа, $\zeta_0 \neq 0$ фиксированная внутренняя точка единичного круга. Тогда существует регулярная в круге $|z| < 1$ функция $f_1(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ ряда Тейлора которой (C, k) — суммируем

в точке $z = 1$, т. е. $\lim \alpha_n^{(k)}$ существует и для которой ряд (3) не суммируем в смысле $(C, k + \delta)$ в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \zeta_0}$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(k+\delta)}$ не существует.

Теорема 2 является обострением теоремы ТУВÁН-а так как последняя утверждает лишь возможность расходимости ряда (5), несмотря на сходимость ряда (4), в то время как согласно теореме 2 сходимость ряда (4) не обеспечивает даже $(C, k + \delta)$ — суммируемости ряда (5), если $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

В § 2 доказывается, что между $\alpha_v^{(k)}$ и $\beta_n^{(k+\delta)}$ имеет место соотношение

$$(6) \quad \beta_n^{(k+\delta)} = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \alpha_v^{(k)},$$

где величины $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ зависят лишь от чисел ζ_0 , k , δ , n и v , но не зависят от выбора функции $f_1(z)$. Соотношение (6) определяет линейный метод суммирования и нужно решить, при каких δ удовлетворяет его матрица $[\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)]$ условиям перманентности Теплитца—Шура. Эти условия выполняются, если

I. $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 0$ для всех фиксированных v ;

II. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 1$;

III. существует такая постоянная $K^{(k,\delta)} > 0$, что неравенство

$$\sum_{v=0}^{\infty} |\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)| < K^{(k,\delta)}$$

справедливо независимо от n .

В § 3 доказывается, что условия I и II всегда выполняются, если $\delta \geq 0$, что необходимо для доказательства теоремы 1.

Дальнейшие параграфы работы занимаются исследованием условия III, в связи с которым возникли наибольшие трудности.

С этой целью в § 4 дается одно асимптотическое выражение g_{nv} элементов матрицы $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$, для которого имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} |\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} |g_{nv}|,$$

где

$$(7) \quad g_{nv} = \frac{c_n^{(k+\delta)}}{2\pi i} \frac{\binom{v+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \int_{|\omega|=q} \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta-1}}{(1 - \omega)^\delta} \omega^v \left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^{n+1} d\omega,$$

$c_n^{(k+\delta)}$ и $|\zeta_0| < q < 1$ постоянные.

В § 5, исходя из (7), доказывается теорема 1 в случае $\delta > \frac{1}{2}$. Здесь используется следующая лемма:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt = \begin{cases} O(n^{2\delta-1}), & \text{если } \delta > \frac{1}{2} \\ O(\log n), & \text{если } \delta = \frac{1}{2} \\ O(1), & \text{если } \delta < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Однако этот метод не приводит к цели, если $\delta = \frac{1}{2}$ или $\delta < \frac{1}{2}$.

В § 6 доказываются леммы, утверждающие, что если $\delta = \frac{1}{2}$ и n фиксированное, большое число, то существует два таких индекса: $\nu_1 = \lambda_1 n > \nu'_1 = \lambda'_1 n$, для которых

$$\sum_{\nu=0}^{\nu'_1-1} |g_{n\nu}| = O(1), \quad \sum_{\nu=\nu_1+1}^{\infty} |g_{n\nu}| = O(1),$$

и что числа $|g_{n\nu}|$ не превосходят общей грани. Таким образом, надо исследовать лишь сумму $\sum_{\nu=\nu'_1}^{\nu_1} |g_{n\nu}|$.

В случаях $\delta \leq \frac{1}{2}$ и $\nu'_1 \leq \nu \leq \nu_1$ асимптотическое значение $g_{n\nu}$ в случае большого, фиксированного n и каждого ν может быть определено методом наискорейшего спуска. В § 7 определяются точки наискорейшего спуска. Так как уравнение

$$\left(\frac{1 + \zeta_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)' = 0$$

не имеет конечного корня, вводится новый параметр $\lambda = \frac{\nu}{n}$ ($\lambda'_1 \leq \lambda \leq \lambda_1$)

и вместо $\left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^n$ исследуется функция $\left(\omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^n$. Уравнение $\left(\omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)' = 0$ уже имеет два конечных корня, т. е. имеются две точки наискорейшего спуска, расположенные на единичной окружности и изменяющие свое положение, если λ изменяется.

В § 8 строится интегральная кривая L_λ , меняющая свою форму и положение вместе с изменением положения точек наискорейшего спуска и проходящая через них.

В § 9 завершается доказательство теоремы 1 в случае $\delta = \frac{1}{2}$. Так как L_λ проходит через две точки наискорейшего спуска, необходимо вычислить два асимптотических значения и детально изучить их сумму. Усложняет положение то, что точки наискорейшего спуска могут быть как угодно близки друг к другу и к точке $\omega = 1$, а в этом последнем случае подинтегральная функция уже не ограничена. Надо отдельно рассматривать случаи, когда ζ_0 вещественное и комплексное число.

В § 10 завершается доказательство теоремы 2. Особенно трудно доказать тот факт, что когда ζ_0 вещественно, сумма двух упомянутых асимптотических значений больше независимого от n и ν положительного числа.

TRANSFORMATIONS OF PERIODIC SEQUENCES¹

by

P. VERMES²

§ 1. Introduction

In 1954 R. H. C. NEWTON [6] introduced the problem of summability of periodic sequences. He was interested to obtain conditions for a regular sequence to sequence transformation matrix to transform every periodic sequence of complex numbers $x = \{x_k\}$, $(x_{k+p} = x_k)$ of any positive integral period p into a convergent sequence. NEWTON based his results on the fact that every sequence of period p can be expressed as a finite linear combination of the p distinct periodic unit vectors, so that all these vectors form a countable base for the space of periodic sequences.

In a subsequent paper [8] I investigated more general problems of summability of periodic sequences. The main tool in my investigations was the observation that the set of sequences $x_k = e^{2\pi i k t}$ where t is a positive rational number not exceeding 1 form another countable base. Using this base I could express the properties of the transformation matrix $A = (a_{n,k})$ in terms of the properties of the associated functions $a_n(z) = \sum a_{n,k} z^{k-1}$ at the "rational points on the unit circle".

The main problem in the present paper is to characterize those matrices that transform every periodic sequence into another periodic sequence, not necessarily of the same period. I can only give sufficient conditions and conjecture that they are necessary: this will be done in section 5. In section 7 I list many questions which are still unsolved. The earlier sections deal with properties of the sequence space of periodic sequences, with an attempt to make it a pseudo-Banach space, with the weak dual space, with the annihilator space. Section 6 deals with matrix products.

§ 2. The space \mathcal{S} of periodic sequences

We say that $x = \{x_k\}$ is an element of \mathcal{S} if for some positive integer p and for every $k = 1, 2, \dots$, $x_{k+p} = x_k$. The smallest such value of p is called the period of x , and we shall write $\pi(x) = p$.

If both x and y belong to \mathcal{S} , then so does $\lambda x + \mu y$ for any pair of complex numbers λ, μ , and its period does not exceed the least common multiple of the two periods. Hence

¹ A short summary of this paper was read at the Colloquium on the Theory of series of the Bolyai János Mathematical Society in Budapest on the 8th October, 1959.

² Birkbeck College, University of London.

(2.1) \mathcal{S} is a linear space.

(2.2) \mathcal{S} has a countable base:

every periodic sequence can be expressed as a finite linear combination of sequences $\{z^{k-1}\}$ where $z = e^{2\pi it}$ and where t is a rational positive number not exceeding unity. We shall call such numbers z the rational points on the unit circle.

The scalar product $\{x_k y_k\}$ of two periodic sequences is a periodic sequence.

Every periodic sequence is bounded so that \mathcal{S} is a proper linear subspace of the space of bounded sequences. It is well known that the latter is a Banach space under the norm $\sup |x_k|$, but \mathcal{S} is not a Banach space under the same norm since it is not complete. This can be seen from the sequence $x^{(n)}$ of elements in \mathcal{S} , where

$$x^{(n)} = \sum_{v=1}^n 2^{-v} e^{(v)},$$

$e^{(v)}$ being the v -periodic unit sequence $(1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$. This sequence $x^{(n)}$ is Cauchy-convergent, but its limit is not periodic.

We can define a *pseudo-norm* for \mathcal{S} by

$$\|x\| = \log p + \max |x_k|,$$

which has the following properties:

(i) $\|x\| \geq 0$, and $\|x\| = 0$ if and only if $x = 0$;

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(iii) $\|\lambda x\| \leq \lambda^+ \|x\|$, where $\lambda^+ = \max(1, |\lambda|)$.

With this norm the elements of unit norm are all constant sequences (of period 1) of modulus 1, and all sequences of period 2 and with $\max |x_k| = 1 - \log 2$.

A sequence $x^{(n)}$ of elements of \mathcal{S} may converge to an element x of \mathcal{S} in various senses.

We shall say that $x^{(n)}$ is *strongly convergent* to x if

$$\|x^{(n)} - x\| \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

\mathcal{B} -convergent to x if

$$\max_k |x_k^{(n)} - x_k| \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

and coordinate-convergent to x if

$$x_k^{(n)} - x_k \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty, \text{ for every fixed } k.$$

If $x^{(n)}$ is strongly convergent in \mathcal{S} , then, for $n > n_0$, $\pi(x^{(n)} - x) = 1$, hence

$$(2.3) \quad x^{(n)} = x + \varepsilon_n e$$

where ε_n is a null-sequence and e is the constant sequence $(1, 1, \dots)$.

It is easy to see that \mathcal{S} is complete under the pseudo-norm. For $\|x^{(n)} - x^{(m)}\| \rightarrow 0$ as $n, m \rightarrow \infty$ implies first that $\pi(x^{(n)} - x^{(m)}) = 1$ for $n, m > n_1$,

i.e. that for $n > n_1$ all the sequences $x^{(n)}$ have a common period. Moreover $x^{(n)}$ is \mathcal{B} -convergent, hence x is a periodic sequence.

It follows that strong convergence in \mathcal{S} implies \mathcal{B} -convergence which in turn implies coordinate convergence with all three limits being the same periodic sequence. The converse is not true as shown by the examples:

$$x^{(n)} = \left(1, \frac{n}{n+1}, 1, \frac{n}{n+1}, \dots \right) \text{ is } \mathcal{B}\text{-convergent to } (1, 1, \dots) \text{ but not}$$

strongly since $\|x^{(n)} - x\| = \log 2 + \frac{1}{n+1}$;

again if $e^{(n)}$ is the n -periodic unit vector of period 0, 0, ..., 1, then $e_k^{(n)} \rightarrow 0$ for every fixed k , but $\max_k \|e_k^{(n)}\| = 1$.

§ 3. The weak-dual space \mathcal{S}'

In the early work on sequence spaces KÖTHE and TOEPLITZ [4] (see also COOKE [1], chapter 10) defined the dual α^* of a sequence space α as the space of sequences u such that $\sum |u_k x_k|$ converge for every x in α . We shall here be interested in a wider class of sequences u , by requiring only the convergence of $\sum u_k x_k$ for every x in α , and we shall call the space of such u the weak-dual α' of α . ALLEN, CHILLINGWORTH and MATTHEWS have recently investigated some properties of weak-dual spaces ([2], [3], [5]), and their results do not trivially follow from those on dual spaces.

Thus we define: \mathcal{S}' (the weak-dual of \mathcal{S}) is the space of all sequences u such that $\sum u_k x_k$ converges for every periodic sequence x . Obviously \mathcal{S}' is a linear space: if u and v are in \mathcal{S}' , so is $\lambda u + \mu v$ for any complex number pair λ, μ . Denoting by φ the space of finite sequences (i.e. sequences having only a finite number of non-zero terms) we see that \mathcal{S} does not contain φ , and that \mathcal{S}' contains φ .

One can formulate various *necessary and sufficient conditions for the sequence u to be in \mathcal{S}'* :

the natural one is [NEWTON 6, page 534 (3. II) implies this]

$$(3.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_{pk+m}$$

converges for any fixed pair of positive integers p, m ;

a more useful one to our purpose [VERMES 8, page 628, Proof of theorem]

$$(3.2) \quad u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k z^{k-1}$$

converges at every rational point on the unit circle.

It follows that (3.1) and (3.2) are equivalent and hence imply each other. This fact may have application to problems discussed previously by ERDŐS and TURÁN.

The space \mathcal{S}' is a proper subspace of sequences u such that $\sum u_k$ converges, for example $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ is not in \mathcal{S}' . On the other hand \mathcal{S}' contains properly the space l_1 for which $\sum |u_k|$ converges. In \mathcal{S}' , $u_k \rightarrow 0$, and this

convergence to zero may be arbitrary slow. For example if $v(m)$ is a strictly increasing sequence of positive integers and if $\sum b_m$ is any convergent series then the identity

$$u(z) = \sum u_k z^{k-1} = \sum b_m z^{v(m)!}$$

defines a (gap-) sequence u_k in \mathcal{S}' , since the series converges at every rational point on the unit circle. If $v(m)$ increases faster then u_k decreases slower (and with ever increasing gaps).

§ 4. The annihilator space Ω

An important linear subspace of \mathcal{S}' is the space Ω of all sequences u for which $\sum u_k x_k = 0$ for every x in \mathcal{S} . The question whether Ω contains other sequences than the trivial zero can be formulated in view of (3.2) as:

(4.1) *To construct a power series $u(z) = \sum u_k z^{k-1}$ such that it is convergent at rational points on the unit circle and its sum there is zero.*

I have put this problem to P. ERDŐS, G. PIRANIAN and J. CLUNIE, and I am giving here (with their kind permission) the various constructions.

Bearing in mind that the rational points on the unit circle form a countable set, the constructions are given in the more general form:

(4.2) *To construct a power series $u(z) = \sum u_k z^{k-1}$ such that it is convergent at a countable set of distinct points α_j on the unit circle and that its sum there is zero.*

Before giving the constructions I remark that if $u(z)$ satisfies (4.2) so does $u_\pi(z)$ constructed by permuting the numbers α_j , and so does $f(z)u_\pi(z^m)$, where $f(z)$ is a function defined by a power series which is absolutely convergent on the unit circle and where m is a positive integer. Hence from one such non trivial sequence continuum many sequences can be derived. The class Ω is quite large indeed!

(4.3) Erdős.

Let $P_m(z)$ be polynomials of degree $d(m)$ defined recursively by

$$P_1(z) = 1 - z/\alpha_1, \text{ and } P_{m+1}(z) = Q_{m+1}(z)P_m(z), \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\text{where } Q_{m+1}(z) = 1 - \frac{1}{m+1} \sum_{r=1}^{m+1} \left(\frac{z}{\alpha_{m+1}} \right)^{r-1-d(m)}.$$

It follows that $P_m(z) = 0$ for $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Now we define $u(z) = \sum u_k z^{k-1}$ by $u(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(z)$. We see that $u_k \rightarrow 0$, and that, for every m , $\sum u_k z^{k-1}$ consists of sections, each of "length" $d(m)$, and each being zero at $z = \alpha_m$.

(4.4) Piranian.

Let w_m be the sequence $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. We consider the functions $g_0(z) = z$, $g_m(z) = k_m \{1 - (1 - z/w_m)^{t(m)}\}$, $m = 1, 2, \dots$, where $1 > t(m) > > t(m+1) > 0$, $t(m) \downarrow 0$.

The power series of $g_m(z)$ have unit radius of convergence and each converges absolutely on the unit circle. We define the numbers k_m recursively by

$$k_m = - \sum_{v=0}^{m-1} g_v(w_m).$$

Now, $g_m(z)$ is small on the unit circle except at $z = w_m$, where its value is k_m , and near w_m . It is easy to see that if $t(m) \downarrow 0$ fast enough then on the unit circle $\sum |g_m(z)| \leq \sum |k_m| < \infty$, hence we can define $u(z) = \sum g_m(z)$, and the power series of $u(z)$ will be convergent on the whole unit circle. At $z = \alpha_j$ the partial sums of $\sum g_m(z)$ become zero for every m for which $w_m = \alpha_j$, i.e. infinitely many times. Hence $\sum g_m(\alpha_j) = 0$, i. e. $u(\alpha_j) = 0$, so that by Abel's theorem the sum of the power series at α_j is zero.

(4.5) Clunie.

Let $u(z) = \prod (1 - z/\alpha_j)^{\lambda(j)}$, where $\lambda(j) > 0$ and $\sum \lambda(j) = \lambda < \infty$, each factor being the principal branch of the function. We shall prove that $u(z)$ satisfies (4.2).

For $|z| = r < 1$, the product $|\prod| < \prod 2^{\lambda(j)} = 2^\lambda$, hence $u(z)$ is defined in $r < 1$ and is regular. Also when z tends to α_j along the radius, $u(z)$ tends to zero. Let $u(z) = \sum u_k z^{k-1}$.

We prove that $|u_k| = O(1/k)$.

From

$$\frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{d}{dz} \log u(z) = \sum \frac{-\alpha_j}{\alpha_j - z}$$

for $r < 1$, we have

$$u'(z) = \left(\sum \frac{-\lambda(j)}{\alpha_j - z} \right) u(z),$$

and hence

$$u''(z) = \left(\sum \frac{-\lambda(j)}{(\alpha_j - z)^2} \right) u(z) + \left(\sum \frac{\lambda(j)}{\alpha_j - z} \right)^2 u(z).$$

By the Cauchy—Schwarz inequality

$$\left| \sum \frac{\lambda(j)}{\alpha_j - z} \right|^2 = \left| \sum \lambda(j)^{1/2} \frac{\lambda(j)^{1/2}}{\alpha_j - z} \right|^2 \leq \sum \lambda(j) \sum \frac{\lambda(j)}{|\alpha_j - z|^2}.$$

hence, for $|z| = r < 1$,

$$|u''(z)| < c \sum \frac{\lambda(j)}{|\alpha_j - z|^2}.$$

Now, if for $r < 1$, $g(z) = \sum b_k z^k$, then

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum |b_k|^2 r^{2k},$$

and taking $g(z) = 1/(\alpha_j - z)$, we see that $|b_k| = 1$ and that the last sum is

$$\sum r^{2k} = 1/(1 - r^2).$$

Hence

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u''(r e^{i\theta})| d\theta < \frac{c\lambda}{1 - r^2}.$$

Now, for $r < 1$,

$$u''(z) = \sum (k-1)(k-2) u_k z^{k-3},$$

and hence

$$(k-1)(k-2) u_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{u''(z) dz}{z^{k-2}}.$$

This gives, for $k > 1$,

$$(k-1)(k-2) |u_k| < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|u''(r e^{i\theta})| d\theta}{r^{k-3}} < \frac{c_1}{(1 - r^2) r^{k-3}}.$$

Taking $r = 1 - 1/k$,

$$(k-1)(k-2) |u_k| < \frac{c_1}{(1/k)(2 - 1/k)(1 - 1/k)^{k-3}} < \frac{kc_1}{(1 - 1/k)^k} < kc_2,$$

whence

$$|u_k| < c_3/k.$$

Thus we have proved that $|u_k| = O(1/k)$.

We now use LITTLEWOOD's Tauberian theorem for Abel summability. Since $\sum u_k \alpha_j^{k-1}$ is Abel summable to zero and $|u_k \alpha_j^{k-1}| = O(1/k)$, it follows that the series converges to the sum zero.

§ 5. $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ -matrices

When we are looking for matrices that transform every periodic sequence into some periodic sequence, in short when we are looking for $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ -matrices, we observe that the unit matrix I has this property. It is also easy to see that if we repeat each row of I q -times and if we then insert between each pair of columns r zero columns, the resulting matrix $J(q, r)$ will be a $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ -matrix. To these matrices we add the matrix J_∞ each row of which is the sequence $(1, 0, 0, \dots)$, and we shall call \mathcal{J} the space of all such matrices. This is not a linear space. Each matrix is formed from I by uniform row-repetition and by uniform column-dilution, and each row of every matrix is some row of the unit matrix. The structure of all these matrices is *step-like*.

Next we consider matrices the rows of which are periodic repetitions of sequences in \mathcal{P}' . Obviously if $\text{row}_n = \text{row}_{n+q}$, such a matrix transforms a sequence of period p into another sequence the period of which does not exceed q . We shall call the space of such matrices \mathcal{Q} . It is easy to see that \mathcal{Q} is a linear space.

I have earlier defined [7] the *convolution* $C = A * B$ of two matrices A and B by the relation

$$c_{nk} = a_{n1} b_{nk} + a_{n2} b_{n,k-1} + \dots + a_{nk} b_{n1}$$

i.e. by the Cauchy-product of corresponding rows. One can also define them by the functions associated with the rows, i.e. $c_n(z) = a_n(z) b_n(z)$, where $a_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z^{k-1}$. The following general theorem holds:

Theorem 5. I. *If A and B are $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrices and if the rows of A are in l_1 , then the convolution $C = A * B$ is a $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrix.*

Proof. It is enough to apply C to the sequence $x = \{z^{k-1}\}$, where z is a rational point on the unit circle. Since A and B are $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrices, $Ax = \alpha$ and $Bx = \beta$ are both periodic sequences. Now $a_n = \sum_k a_{nk} z^{k-1} = a_n(z)$ and $\beta_n = b_n(z)$ and hence $Cx = \gamma$, where $\gamma_n = a_n(z) b_n(z) = \alpha_n \beta_n$, all the series being convergent by our assumption for A . It follows that γ is a periodic sequence, and this proves the theorem.

Taking now a matrix from \mathcal{J} and a matrix from \mathcal{Q} and forming their convolution we obtain a matrix which itself is a $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrix, since the rows of matrices in \mathcal{J} are in l_1 . The class \mathcal{S} of all such matrices contains \mathcal{Q} as a proper subclass, obtained by taking J_{∞} from \mathcal{J} , since $J_{\infty} * A = A$ for any A . The matrix J_{∞} itself belongs to \mathcal{Q} and hence to \mathcal{S} . All the matrices in \mathcal{S} have a step-like structure. We start with a semi-infinite matrix F having q rows (q being a positive integer) each row being a sequence in \mathcal{S}' . Then we either repeat F again and again giving a matrix in \mathcal{Q} , or we repeat F but now preceded by a $q \times r$ zero matrix. The next block of q rows consists of F preceded by two such zero matrices, and so on, the m -th block consisting of F preceded by $m + 1$ zero matrices i.e. either

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} F & & & \\ 0 & F & & \\ 0 & 0 & F & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

We shall call matrices in \mathcal{S} *step-matrices*. The steps have equal *height* q , and equal *width* r , r being zero for a matrix in \mathcal{Q} .

By theorem 5. I all matrices in \mathcal{S} are $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrices. The space \mathcal{S} is not a linear space, since the sum of step-matrices is not always a step-matrix. This can be seen by adding two step-matrices of step heights and widths q, r and q', r' respectively, when q, r, q', r' are distinct prime numbers.

Theorem 5. II. *The space of $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrices is a linear space.*

This is an immediate consequence of (2.1), since if x, Ax, Bx all belong to \mathcal{S} , then so does $(\lambda A + \mu B)x = \lambda Ax + \mu Bx$ for any pair of complex numbers λ, μ .

Corollary. *The sum of a finite number of $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrices is a $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrix.*

We can generate a larger space \mathcal{S}^+ by forming all finite sums of matrices in \mathcal{S} . This new space is closed under matrix addition and is a linear space:

all matrices in \mathcal{S}^+ are $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ -matrices, and can be expressed in the form

$$S = R + S_1 + \dots + S_m$$

where R is a matrix in \mathcal{Q} , and S_1, \dots, S_m are step-matrices each of a positive step-width.

The structure of matrices in \mathcal{S}^+ is not so clearly periodic as of those in \mathcal{S} , but it still has a periodic like character. Given a matrix of \mathcal{S}^+ , it may or may not be possible to determine the separate constituents R, S_1, \dots, S_m or at least the separate stepwidths and heights.

Another class of $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ -matrices is the class of *annihilator matrices* \mathcal{O} , each matrix of which is assembled from rows taken arbitrarily from the annihilator weak-dual subspace Ω . There need not be any periodicity in the selection of rows, and since any row could be replaced by any multiple of that row, \mathcal{O} contains matrices the elements of which are unbounded. Adding an annihilator matrix to a step-matrix produces another $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ -matrix, and this may completely destroy the step-structure. One could say that the annihilator matrix acts as a *curtain*. The same happens if an annihilator matrix is added to a matrix in \mathcal{S}^+ .

We thus obtain a matrix space $\mathcal{S}^+ + \mathcal{O}$ generated by addition of a finite number of matrices taken from \mathcal{S} and from \mathcal{O} . Every matrix A of $\mathcal{S}^+ + \mathcal{O}$ can be expressed in the form

$$(5.1) \quad A = R + S_1 + \dots + S_m + N = S + N,$$

where R is in \mathcal{Q} , S_1, \dots, S_m are step-matrices each of a positive step-width, and where N is in \mathcal{O} ; or shortly where S is in \mathcal{S}^+ , and N in \mathcal{O} . We have:

Theorem 5. III. *Every matrix in $\mathcal{S}^+ + \mathcal{O}$ is a $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ -matrix.*

In $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ we can define equivalence classes by regarding A and B equivalent if they differ by an annihilator matrix, i.e. if $Ax = Bx$ for every x in \mathcal{P} . If A and B both belong to $\mathcal{S}^+ + \mathcal{O}$, they are equivalent if and only if they are equivalent to the same matrix S of \mathcal{S}^+ . We could say that in $\mathcal{S}^+ + \mathcal{O}$ one can "raise a curtain" to reveal a fairly periodic structure. One is lead to expect the same in the general case of $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ -matrices, and I venture to state the

Conjecture. *Every $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ -matrix is in $\mathcal{S}^+ + \mathcal{O}$.*

In other words: I believe that the sufficient condition stated in theorem 5. III is also necessary, but I cannot prove it.

The resolution in (5.1) is not unique, because one can construct matrices N_q which belong both to \mathcal{O} and to \mathcal{Q} , by taking any q rows from Ω and repeating them periodically. Hence if S is in \mathcal{S}^+ , so is $S + N_q$, and if N is in \mathcal{O} , so is $N - N_q$, so that for any such N_q

$$A = S + N = (S + N_q) + (N - N_q).$$

§ 6. Matrix products

If A and B are $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ -matrices and x is in \mathcal{P} then so are $y = Bx$ and Ay , so that the operator product $A(B)$ exists. But the matrix product AB may not exist. This can be seen by considering a matrix N in \mathcal{O} the first column

of which has sufficiently increasing elements to make its scalar product with a row of A into a divergent series. But if we restrict our attention to \mathcal{S} or to \mathcal{S}^+ , we see that all products in \mathcal{S} exist, and hence they exist in \mathcal{S}^+ . If A and B are both in \mathcal{Q} , the rows are in \mathcal{S}' , the columns are in \mathcal{S} , hence the product exists. Moreover applying $A(B)$ to any periodic unit vector $e^{(v)}$, we see that the repeated sum $\sum_j \sum_k a_{nj} b_{jk} e_k^{(v)}$ can be inverted giving the same sum both ways; this implies that $A(Bx) = (AB)x$ for every x in \mathcal{S} . But Bx and $A(Bx)$ are in \mathcal{S} , hence so is $(AB)x$, showing that AB is in \mathcal{Q} , so that

(6.1) \mathcal{Q} is closed under matrix multiplication.

If S is a step-matrix of positive step-width it is column-finite, hence AS exists for any matrix A , and if A is in \mathcal{Q} , SA exists, since the rows of S are in \mathcal{S}' , and the columns of A are in \mathcal{S} . I believe but I cannot prove that all such products are in \mathcal{S} . We can only state:

(6.2) The product of two matrices in \mathcal{S}^+ exists.

Now we consider the subclass of matrices in \mathcal{S} the rows of which are in l_1 (which is a proper subclass of \mathcal{S}'). Denoting this subclass by $|\mathcal{S}|$ it is easy to see that

(6.3) $|\mathcal{S}|$ is closed under matrix multiplication.

Proof. If A and B are in $|\mathcal{S}|$ and x is in \mathcal{S} , the series $\sum_j \sum_k |a_{nj} b_{jk} x_k|$ converges, hence $A(Bx) = (AB)x$, showing that AB is in $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Also $\sum_k |\sum_j a_{nj} b_{jk}|$ does not exceed $(\sum_k |b_{jk}|)(\sum_j |a_{nj}|)$, so that the rows of AB are in l_1 . Finally, to show the step structure of AB , we observe that if the step-heights are q, q' respectively, both matrices are also step-matrices with step-height qq' , and the step structure then follows from elementary considerations.

Finally we consider the subspace $|\mathcal{S}^+|$ of \mathcal{S}^+ , obtained by finite addition of matrices in $|\mathcal{S}|$.

(6.4) $|\mathcal{S}^+|$ is a ring with unit element under matrix addition and matrix multiplication.

A $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrix represents a strongly continuous transformation if for every strongly convergent sequence $x^{(v)}$ in \mathcal{S} , the transformed sequence is strongly convergent. Using (2.3) this requires that if

$$x^{(v)} = x + \varepsilon_v e,$$

where ε_v is a null-sequence and $e = (1, 1, 1, \dots)$, then

$$A x^{(v)} = A x + \varepsilon_v A e = A x + \varepsilon_v \lambda e.$$

Hence we have obtained

(6.5) A $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrix B is strongly continuous if and only if e is a latent vector of B . This is equivalent to: all rows in B have the same sum.

Using (6.5) the following results can be proved easily:

(6.6) Strongly continuous $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrices form a linear subspace of the space of $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ -matrices.

(6.7) Matrices in \mathcal{O} are strongly continuous.

- (6.8) The product of strongly continuous matrices in $|\mathcal{S}^+|$ is strongly continuous.
- (6.9) The convolution of strongly continuous matrices in $|\mathcal{S}^+|$ is strongly continuous.

§ 7. Some open problems

I list here problems which have arisen during the investigations.

- (1) To find a norm for \mathcal{S} (instead of the pseudo norm) that makes a Banach space from \mathcal{S} .
- (2) To decide whether the convolution of two sequences in \mathcal{S}' is in \mathcal{S}' . In other words if the power series of $u(z)$ and $v(z)$ are convergent at the rational points on the unit circle, is the same true for the power series of $u(z)v(z)$? A proof or a counter example were welcome.
- (3) If u is in \mathcal{S}' , i.e. if $u(z) = \sum u_k z^{k-1}$ is convergent at every rational point on the unit circle, is the set of values of $u(z)$ at such points bounded?
- (4) Given a matrix, is it always possible to tell if it is in \mathcal{S}^+ ?
- (5) If A is in \mathcal{S}^+ , is it always possible to find matrices S_1, \dots, S_m in \mathcal{S} whose sum is A ? Is this resolution unique?
- (6) Given a matrix is it always possible to tell if it is in $\mathcal{S}^+ + O$?
- (7) If A is in $\mathcal{S}' + O$, is it always possible to "raise the curtain", i.e. to find a matrix N in O so that $A - N$ is in \mathcal{S}^+ ?
- (8) To prove the main conjecture, i. e. that $\mathcal{S}^+ + O \equiv \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$.
- (9) Is \mathcal{S}^+ a ring? This depends on if the product of two matrices in \mathcal{S} is in \mathcal{S} . The answer is no if the answer to question (2) is no. For if $a_n(z) = u(z)$, $b_n(z) = z^{n-1}v(z)$ for $n = 1, 2, \dots$ and $AB = C$ (which exists), then $c_n(z) = u(z)v(z)$ for each n .
- (10) If A, B are in \mathcal{S} , x in \mathcal{S} , is always $A(Bx) = (AB)x$? If this were true, it would imply (9).
- (11) If A, B, C are in \mathcal{S} , do the triple products $A(BC)$ and $(AB)C$ always exists, and if so, are they equal? (This is true in $|\mathcal{S}|$).
- (12) Inverses and reciprocals of matrices in \mathcal{S}^+ , in $\mathcal{S}^+ + O$, in $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ and in proper subclasses of those.

Section	Space	Page	Definition
2	\mathcal{S}	153	Beginning of section
3	\mathcal{S}'	155	„ „ „
4	Ω	156	„ „ „
5	\mathcal{I}	158	„ „ „
	\mathcal{R}	158	„ „ „
	\mathcal{S}	159	middle of page
	\mathcal{S}^+	159	bottom „ „
	$\mathcal{S}^+ + O$	160	theorem 5. III.
	$ \mathcal{S} $	161	middle of page
	$ \mathcal{S}^+ $	161	„ „ „
			“Strongly continuous”
			after (6.4).

(Received November 9, 1959.)

REFERENCES

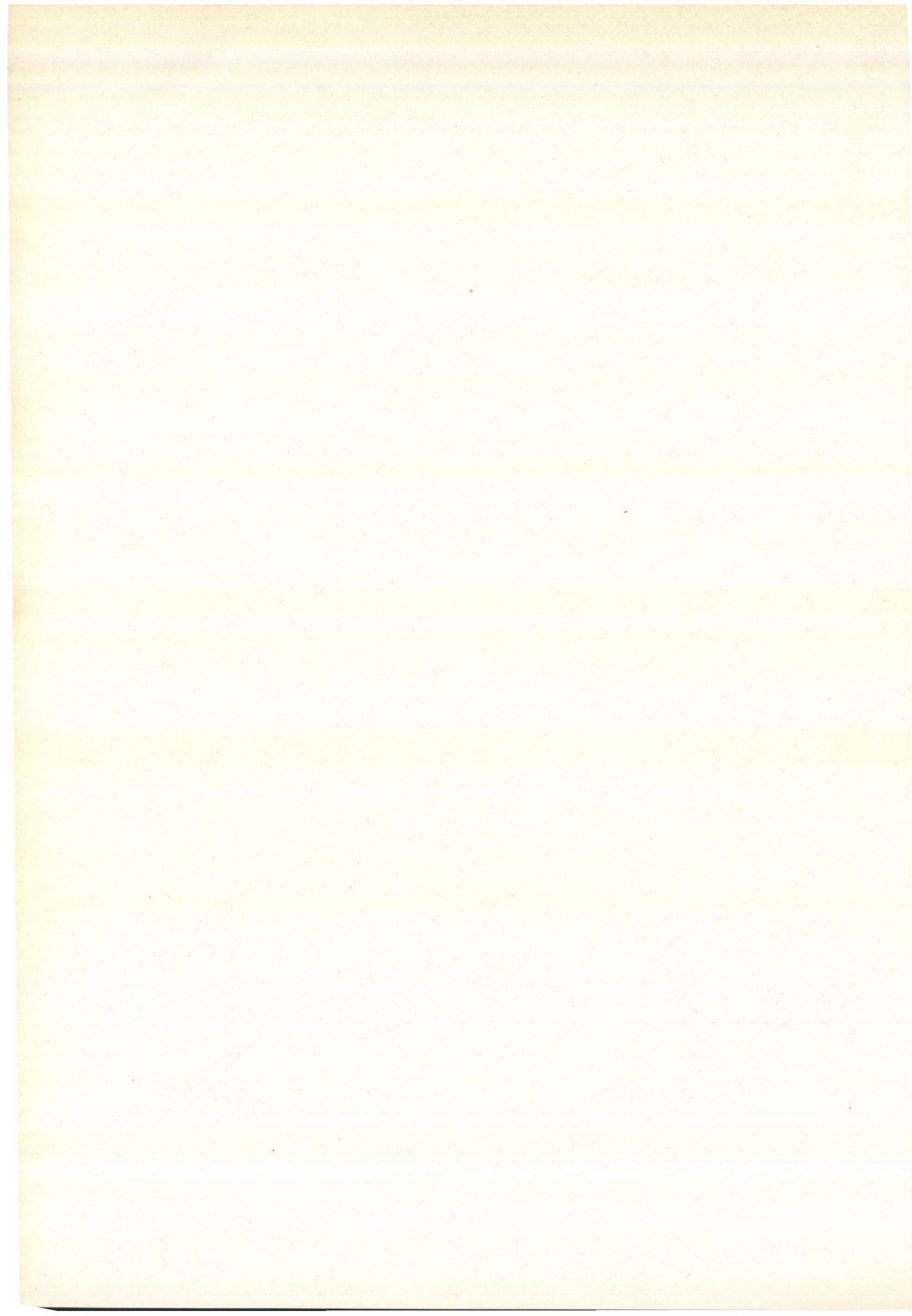
- [1] COOKE, R. G.: *Infinite matrices and sequence spaces*. Macmillan (1950).
- [2] ALLEN, H. S.: „Transformations of sequence spaces”. *Journal London Math. Soc.* **31** (1956) 374—376.
- [3] CHILLINGWORTH, H. R.: „Generalized dual sequence spaces”. *Proc. Kon. Nederl. Akad. v. Wetensch.* **A61** (1959) 307—315.
- [4] KÖTHE, G. and TOEPLITZ, O.: „Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen”. *Journal für Math.* **171** (1934) 294—311.
- [5] MATTHEWS, G.: „Generalized rings of infinite matrices I and II”. *Proc. Kon. Nederl. Akad. v. Wetensch.* **A61** (1958) 298—306 and **A62** (1959) 45—51.
- [6] NEWTON, R. H. O.: „On the summation of periodic sequences I and II”. *Proc. Kon. Nederl. Akad. v. Wetensch.* **A57** (1954) 533—549.
- [7] VERMES, P.: „Convolution of summability methods”. *Journal d'Analyse Mathématique* (Jerusalem) **2** (1952) 160—177.
- [8] VERMES, P.: „Infinite matrices summing every periodic sequence”. *Proc. Kon. Nederl. Akad. v. Wetensch.* **A58** (1955) 627—633.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

P. VERMES

Резюме

Работа занимается такими методами суммирования, которые преобразуют все периодические числовые последовательности в периодические числовые последовательности. Он дает достаточные условия того, чтобы некоторый метод обладал этим свойством и формулирует ряд гипотез. Работа публикует также примеры Eрдős-а и RANIAN-а, и CLUNIE сходящихся в единичном круге степенных рядов, сходящихся к нулю во всех точках единичной окружности, аргументы которых коммензурабельны с 2π .



ON SETS OF DISTANCES OF n POINTS IN EUCLIDEAN SPACE

by
P. ERDŐS

Let $[P_n^{(k)}]$ be the class of all subsets $P_n^{(k)}$ of the k dimensional space consisting of n distinct points and having diameter 1. Denote by $g_k(n, r)$ the maximum number of times a given distance r can occur among n points of a set $P_n^{(k)}$. Put

$$G_k(n) = \max_r g_k(n, r), \quad g_k(n) = g_k(n, 1)$$

(i. e. $g_k(n)$ denotes the maximum number of times the diameter can occur as a distance among n points of k dimensional space and $G_k(n)$ denotes the maximum number of times the same distance can occur between n suitably chosen points in k dimensional space). It is well known [1] that $g_2(n) = n$ and I [2] proved that

$$(1) \quad n^{1+c/\log \log n} < G_2(n) < n^{3/2}.$$

Further I conjectured that $G_2(n) < n^{1+\varepsilon}$ for every $\varepsilon > 0$ if $n > n_0(\varepsilon)$. VÁZSONYI conjectured that $g_3(n) = 2n - 2$ and this was proved simultaneously and independently by GRÜNBAUM [3], HEPPES [4] and STRASZEWICZ [5] (all using similar methods). I am going to prove

$$(2) \quad c_1 \cdot n^{4/3} < G_3(n) < c_2 \cdot n^{5/3}.$$

Perhaps $G_3(n) < n^{4/3+\varepsilon}$ holds for all $n > n(\varepsilon)$.

One could have expected that $G_k(n) = o(n^2)$ and $g_k(n) < c_k \cdot n$ for every k . In 1955 LENZ showed that this is not so. In fact LENZ showed that (LENZ's result is unpublished)

$$(3) \quad g_4(n) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

The proof of LENZ is very simple. Put $s = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ and consider the following n points in four-dimensional space:

$$(x_i, y_i, 0, 0), 1 \leq i \leq s, (0, 0, x_j, y_j), s+1 \leq j \leq n$$

where $0 < x_i, x_j, y_i, y_j < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_i^2 + y_i^2 = \frac{1}{2}$, $x_j^2 + y_j^2 = \frac{1}{2}$. Clearly all the

$s(n-s) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ distances between the points $(x_i, y_i, 0, 0)$ and $(0, 0, x_j, y_j)$ is 1 (and 1 is the diameter of the set $(x_i, y_i, 0, 0); (0, 0, x_j, y_j)$).

By a slight modification of this method LENZ in fact proved that $g_4(n) > \frac{n^2}{4} + c_3 n$ for a certain $c_3 > 0$. LENZ then asked: what is the limit of $g_k(n)/n^2$ as $n \rightarrow \infty$. In this note I am going to prove the following

Theorem. For every $k \geq 4$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_k(n)/n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} G_k(n)/n^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}.$$

Clearly $g_k(n) \leq G_k(n)$ and $g_k(n) \leq g_{k+1}(n)$, $G_k(n) \leq G_{k+1}(n)$. Thus to prove our Theorem it will suffice to show that for every $l \geq 2$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_{2l}(n)/n^2 \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2l}$$

and

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_{2l+1}(n)/n^2 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2l}.$$

The proof of (4) is trivial generalization of the proof of LENZ. For each l , $1 \leq t \leq l$ denote by I_t the group of $\left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor$ points whose first $2t-2$ coordinates are 0 the $2t-1$ -th and $2t$ -th coordinates are x_i, y_i , $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor$, $x_i, y_i > 0$, $x_i^2 + y_i^2 = \frac{1}{2}$ and the remaining $2l-2t$ coordinates are 0. Clearly for any $t_1 \neq t_2$ the distance between any two points of I_{t_1} and I_{t_2} is 1 and the set $\bigcup_{1 \leq t \leq l} I_t$ has diameter 1. Thus

$$g_{2l}(n) \geq \binom{l}{2} \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor^2 = \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{l}\right) + O(n)$$

which clearly implies (4).

Next we prove (5). If (5) is not true then there exists an $\varepsilon > 0$ so that for a certain $l \geq 2$ and infinitely many n_s

$$G_{2l+1}(n_s) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2l} + \varepsilon \right) n_s^2 = A(n_s).$$

In other words there exists a set $P_{n_s}^{(2l+1)}$ in $2l+1$ dimensional space and a distance r which occurs among at least $A(n_s)$ pairs of points of $P_{n_s}^{(2l+1)}$. Connect any two points of $P_{n_s}^{(2l+1)}$ whose distance is r . Thus we obtain a graph

of n_s vertices and $A(n_s)$ edges. By a theorem of A. H. STONE and myself¹ [6] this graph contains for sufficiently large $n_s = n_s(\varepsilon)$ a subgraph of $3(l+1)$ vertices $x_i^{(t)}$ $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq t \leq l+1$ so that any two vertices $x_{i_1}^{(t_1)}$ and $x_{i_2}^{(t_2)}$ are connected by an edge if $t_1 \neq t_2$ (in other words the distance between $x_{i_1}^{(t_1)}$ and $x_{i_2}^{(t_2)}$ is r if $t_1 \neq t_2$). But then a simple geometrical argument shows that the $l+1$ planes $(x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, x_3^{(t)})$, $1 \leq t \leq l+1$ must be mutually perpendicular, which implies that the dimension of the space spanned by the $x_i^{(t)}$ is at least $2l+2$. This contradiction proves (5) and thus the proof of our Theorem is complete.

By a sharpening which I recently obtained of the result of STONE and myself I can prove

$$(6) \quad G_k(n) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \right) n^2 + O(n^{2-\varepsilon_k})$$

where $\varepsilon_k \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. I do not know how close (6) is to the true order of magnitude of $G_k(n)$. Perhaps the result of LENZ

$$(7) \quad G_k(n) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \left\lfloor \frac{l}{k} \right\rfloor} \right) n^2 + c_k n$$

gives the right order of magnitude.

Now we are going to prove (2). First we prove the upper estimate. Let x_1, x_2, \dots, x_n be n points in three dimensional space, assume that there are α_i points at distance r from x_i . Clearly to any three points $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}$ there can be at most two points x_i at distance r . Thus since the total number of triplets $(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3})$ is $\binom{n}{3}$ a simple argument gives

$$\sum_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{3} \leq 2 \binom{n}{3}$$

or

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^3 < c_4 n^3.$$

If $\sum_{i=1}^n \alpha_i^3$ is given $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ is maximal if all the α_i are equal. Thus (8) implies.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i < c_2 n^{5/2}$$

which proves the upper bound in (2).

¹ The theorem in question states as follows: To every ε , $r \geq 2$ and l there exists an $n_0(\varepsilon, r, l)$ so that if $n > n_0(\varepsilon, r, l)$ and G_n is a graph of n vertices and more than $n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(r-1)} + \varepsilon \right)$ edges then G_n contains rl vertices $x_i^{(t)}$ $1 \leq i \leq l$, $1 \leq t \leq r$ so that for every $t_1 \neq t_2$, $x_{i_1}^{(t_1)}$ and $x_{i_2}^{(t_2)}$ are connected by an edge for every $1 \leq i_1, i_2 \leq l$.

To prove the lower bound in (2) consider the points (x, y, z) of integer coordinates $0 \leq x, y, z \leq [n^{1/3}]$. Clearly the number of these points is less than n but is greater than $n(1 - \varepsilon)$. The square of the distance between two of these points is of the form

$$(9) \quad u^2 + v^2 + w^2, \quad 0 \leq u, v, w \leq n^{1/3}$$

The numbers (9) are all less than or equal $3n^{2/3}$ and since there are more than $\binom{n(1 - \varepsilon)}{2}$ such distances, clearly for some r the same distance must occur at least $1/7n^{4/3}$ times, which completes the proof of (2). From deep number theoretic results it follows that for suitable r the same distance occurs more than $c_5 n^{4/3} \log \log n$ times and this is the best lower bound I can get for $G_3(n)$ at the present time.

(Received December 18, 1959.)

REFERENCES

- [1] Aufgabe 167. *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung* **43** (1934) 114.
- [2] ERDŐS, P.: „On sets of distances of n points.” *Amer. Math. Monthly* **53** (1946) 248–250.
- [3] GRÜNBAUM, B.: „A proof of Vázsonyi's conjecture.” *Bull. Research Council of Israel* **6A** (1956) 77–78.
- [4] HEPPES, A.: „Beweis einer Vermutung von A. Vázsonyi.” *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1957) 463–466.
- [5] STRASZEWICZ, S.: „Sur un problème geometrique de P. Erdős.” *Bull. Acad. Poll. Sci. Cl. III.* **5** (1957) 39–40.
- [6] ERDŐS, P. and STONE, A. H.: „On the structure of linear graphs.” *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946) 1087–1091.

О РАССТОЯНИЯХ МЕЖДУ n ТОЧКАМИ ЭВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

P. ERDŐS

Резюме

Пусть $P_n^{(k)}$ есть множество, состоящее из n точек k -мерного пространства, диаметр которого равен 1. Обозначим через $g_k(n, r)$ максимальное число пар точек (x_i, x_j) , для которых расстояние x_i и x_j равно r .

$$G_k(n) = \max_{(r)} g_k(n, r); \quad g_k(n) = g_k(n, 1).$$

Раньше автор доказал, что

$$n^{1-c_1/\log \log n} < G_2(n) < n^{3/2}.$$

Было известно, что $g_2(n) = n$, GRÜNBAUM, HEPPES и STRASZEWICZ доказали гипотезу VÁZSONYI, согласно которой $g_3(n) = 2n - 2$. LENZ доказал, что

$$g_4(n) > \frac{n^2}{4} + c_2 n.$$

В настоящей статье автор доказывает, что

$$c_3 n^{4/3} < G_3(n) < c_4 n^{5/3}$$

и, если $k \geq 4$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_k(n)/n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} G_k(n)/n^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \left[\frac{k}{2} \right]}.$$

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ МАШИНЫ «БЭСМ»-II. (ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ)

Л. А. ЗАК, Т. И. МИЛЬЧЕНКО и В. П. СМЯГИН¹

Общая характеристика машины БЭСМ-II.

Быстродействующая электронная счетная машина БЭСМ-II предназначена для решения широкого круга математических задач.

БЭСМ обладает программным управлением и автоматически решает задачи, сводимые к определенной последовательности арифметических и логических операций.

Программное управление дает возможность автоматического изменения хода выполнения программы в зависимости от результатов вычислений на пройденном этапе. Имеется возможность преобразования программы и многократного циклического выполнения преобразованной программы.

В БЭСМ предусмотрено выполнение арифметических и логических операций над числами и командами, выполнение групповых передач материала между запоминающими устройствами. Кроме того, предусмотрена возможность автоматического введения в ходе вычислений элементарных математических функций при помощи стандартных программ, хранящихся на барабане.

Все эти особенности создают широкие логические возможности в решениях различных математических задач и делают машину универсальной по применению.

БЭСМ построена коллективом инженеров и техников под руководством главного конструктора академика С. А. ЛЕБЕДЕВА.

Основные показатели машины

БЭСМ является универсальной вычислительной машиной с программным управлением, машина трехадресная с плавающей запятой параллельного действия. Система счисления двоичная. Длина слова 39 разрядов.

Разрядность выводимых десятичных чисел — 8 разрядов. Основная частота 400 кГц. Средняя скорость работы 8 тысяч операций в секунду.

Машина собрана конструктивно из 3-х основных стоек, содержащих платы со стандартными блоками. Оперативное запоминающее устройство

¹ Вычислительный центр А. Н. СССР (Москва).



Рис 2.

I — АУ

АУ производит операции с 39-и разрядными двоичными числами, представленными в системе с плавающей запятой.

Распределение разрядов: 1—32 — цифровая часть — мантисса

33-й разряд — знак числа,

34—38 разряды — порядок

39-ый разряд — знак порядка.

Отрицательные числа представляются: в дополнительном коде — порядок числа, а мантисса всегда в прямом коде. Необходимость или отсутствие нормализации указываются в коде операций (39-ый разряд).

АУ выполнено на статических ламповых триггерах ячейках. Тип АУ — параллельный.

В связи с системой с плав. запятой АУ состоит из 2-х частей АУЧ и АУП.

Цифровая | порядок
часть

АУЧ имеет 2 регистра и I сумматор (регистр с переносом и счетными

входами у триггеров). На II-м регистре и сумматоре имеется цепь сдвига влево и вправо.

АУП имеет аналогичное устройство, но сдвиг есть только на одном из регистров. (I-м).

Непосредственно к АУ примыкает дополнительный контрольный регистр — ТКЗУ, в него поступает результат каждой операции (параллельно с передачей в МОЗУ).

II — УУ.

УУ вырабатывает определенную последовательность импульсов и потенциалов, которая обеспечивает выполнение элементарных действий (передача числа, сложение, сдвиг и т. п.) при каждой операции.

Система команд — трехадресная. Структура команды :

1 — 11 — разр. 3-й адрес A_3

12 — 22 — разр. 2-й адрес A_2

23 — 33 — разр. 1-й адрес A_1

34 — 38 — разр. код операции АОП

39 разряд, как правило, — признак необходимости нормализовать результат.

Команда выполняется за один цикл (кроме отдельных случ.). Так, при сложении считывается из МОЗУ I-е слагаемое по A_1 , II-ое слагаемое по A_2 , результат операции поступает в ячейку с A_3 , наконец, по адресу, номер которого стоит на счетчике команд, считывается и поступает на регистр команды следующая команда.

Некоторые команды выполняются с меньшим количеством обращений к МОЗУ.

III — МОЗУ

МОЗУ хранит 2047 39-и разрядных двоичных чисел, кроме того, по «нулевому» адресу хранится «пустое» число.

Время выборки — 10 микросекунд. Средняя частота обращений к МОЗУ при работе машины около 40 000 в сек.

IV — МЗУ

МЗУ состоит из 2-х независимых устройств :

МБ — магнитные барабаны,

МЛ — магнитофоны (магн. лента).

1. МБ — 2 магнитных барабана, емкостью по 6144 каждый.

Таким образом одной парой команд Ма и Мб можно передать в МОЗУ или принять из него не более 2048 чисел.

Кроме того на барабанах хранятся постоянные подпрограммы и тесты для проверки машины.

Время ожидания — 40 миллисекунд (при 750 об/мин.).

Скорость считывания 800 чисел/сек.

2. 4 магнитофона обеспечивают хранение по 25—40 тысяч чисел каждый. Так как боббины можно менять по ходу вычисления, практически емкость лент не ограничена.

Скорость считывания 200 чисел в секунду.

V — УВВ

Входное устройство — ввод с перфоленты (бумажной). Перфолента — узкая (однодорожечная). Скорость ввода около 15 чисел в сек.

Перфоратор пробивает числа в шестнадцатиричной (либо двоично-десятичной) системе.

Выходное устройство — цифропечатающее устройство со скоростью около 15 чисел в сек., 12 разрядов.

Возможна печать шестнадцатиричных чисел.

Взаимодействие отдельных устройств БЭСМ-II

I. Устройство ввода данных — перфолента работает аналогично магнитофону (по схеме управления), поэтому ввод осуществляется двумя командами (Ма и Мб).

В первой команде указывается признак «перфолента» и место в оперативной памяти, куда надо поместить первое число. Во второй команде (Мб) указывается количество вводимой информации.

Числа поступают последовательно на один из регистров АУ (имеющий сдвиг) и преобразованные на нем в параллельный код выдаются в МОЗУ.

II. После того, как все данные заполнили МОЗУ (или вообще поступили в МОЗУ) их можно передать в МЗУ — на барабан или ленту. При этом в МОЗУ информация не пропадает.

Этот обмен кодами также осуществляется через АУ (тот же сдвиговый регистр), но в обратной последовательности: параллельный код выдается из МОЗУ на регистр, а затем последовательно сдвигается в МЗУ.

В процессе работы производится передача информации из МЗУ в оперативную память — аналогично вводу с перфоленты.

III. Непосредственно при счете числа берутся только из МОЗУ.

При необходимости использовать дополнительные клавишные регистры пульта используется команда № 12 ПЧ $A_1A_2A_3$, где A_1 — «пустой», а в A_2 указан номер регистра (1 или 2), содержимое которого передается в МОЗУ по 3-му адресу.

IV. Вывод результата на печать производится командой ПЧ A_1 и A_3 .

A_1 — адрес ячейки в МОЗУ, где хранится результат — признак «1» 10 р. A_2), а A_3 — ячейка, куда можно передать результат одновременно с печатью.

В A_1 результат сохраняется.

СИСТЕМА КОМАНД ЭЛЕКТРОННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ БЭСМ-2

№. №. п. п.	№ кода операции	Обозначен.	Назначение	Количество тысяч операц. в сек.	
				мин	макс
1.	2.	3.	4.	5.	6.
1.	00(40)		Передача содержимого A_1 в ячейку A_3 или очистка A_3	—	15
2.	01	+	Сложение содержимого A_1 с A_2 . Результат по- ступает в A_3	4,4	15
3.	02	—	Вычитание из A_1 содержимого A_2 . Результат поступает в A_3	4,4	15
4.	03	x	Умножение содержимого A_1 на A_2 . Результат поступает в A_3	—	4,2
5.	04	:	Деление содержимого A_1 на A_2 . Результат поступает в A_3	—	4,2
6.	05	+П	Сложение порядка A_1 с порядком A_2 . Мантисса результата — из A_1	7	15
7.	06	—П	Вычитание порядка A_2 из A_1 . Мантисса резуль- тата — из A_1	7	15
8.	07	(ПП)	Порядок A_1 из дополнительного кода преобра- зуется в прямой и поступает в A_3 как норм. число	7	15
9.	10	Ха	Умножение A_1 на A_2 без округления. В A_3 по- ступают старшие разряды	—	4,2
10.	11	Хб	Выдача младших разрядов (хвоста результата Ха)	—	15
11.	12	:a	Деление с выводом остатка, в A_3 поступает частное без округления	—	4,2
12.	13	:б	Мантисса результата является остатком от деления: a (знак из A_1)	—	15
13.	14	Е	Выделение целой части из A_1 в A_3 и дробной без нормализации в A_2	4,4	15
14.	15	ПЧ+	Передача числа из A_1 в A_3 со знаком числа из A_2	7	15
15.	16	У	Логическое поразрядное сложение A_1 и A_2 (типа формирования) в A_3	—	15
16.	17	Л	Логическое поразрядное умножение содержи- мого A_1 на A_2 в A_3	—	15
17.	20	Э	Сложение по модулю 2 (поразрядное сложение без переноса)	—	15
18.	21	(ЦС)	Циклическое сложение-суммирование с кру- говым переносом в младшей разряд	—	15
19.	22	СК	Сложение команд без нормализации и вырав- нивания порядка. Порядок A_1 в A_3	—	15
20.	23	—			
21.	24	—			
22.	25	ИП	Изменение порядка A_1 на величину из A_2 . Результат и посылается в A_3	7	15
23.	26	Полный сдвиг	Сдвиг содержимого A_1 на величину из A_2 . Ре- зультат — в A_3	6,5	15
24.	66	Неполн. сдвиг	Цифровая часть A_1 сдвигается на величину из A_2 . Порядок результата — нуль	7	15
25.	27	Пульт	Для ввода параметров с 1-го или 2-го регистров пульта (A_2) в ячейку A_3 (и некоторых дру- гих данных)	—	15
26.	30 *	Ма)	Обращение к МЗУ	—	15
27.	31	Мб)		—	—
28.	32	Печать	Печатается одно число из A_1 , оно же засыла- ется в A_3	—	—

№. №. п. п.	№ кода операции	Обозначен.	Назначение	Количество тысяч операцион. в сек.	
				мин	макс
1.	2.	3.	4.	5.	6.
29.	33	стоп	Безусловный останов	—	—
30.	34	ИЦУК	Изменение номера команды на ЦУКе и переход на ЦУК с возвратом	—	15
31.	73	Стоп усл.	Останавливает машину при включенном тумблере «условный стоп»	—	—
32.	35	=	При $(A_1) = (A_2)$ управление переходит на A_3 , если нет, то на следующую	—	15
33.	75	\neq	Передача на команду A_3 , если $(A_1) + (A_2)$ (и на следующую, если $(A_1) = (A_2)$)	—	15
34.	36	<	Передача на команду A_3 , если $(A_1) < (A_2)$ (если нет — на следующую)	—	15
35.	76	$ < $	Передача на команду A_3 , если $ A_1 < A_2 $ (если нет — на следующую)	—	15
36.	37	ПЦУК	Переход управления на ЦУК и прибавление к счетчику ЦУК «I»	—	15
37.	77	ИМУК	Переход управления на МУК по 3-му адресу	—	15
38.	74	ИЦУК	Переход на A_3 с гашением адреса A_2	—	15

* Ма — в A_1 указываются признаки: барабан, лента, перфолента, запись или считывание,

в A_2 указывается начало группы на барабане или номер зоны на ленте.

в A_3 — начало группы в МОЗУ.

Мб в A_2 указывается конец группы чисел на МБ или количество кодов на МЛ.

в A_3 указывается номер ячейки, куда надо послать контрольную сумму.

(Поступила 11 декабря 1959 г.)

A SHORT DESCRIPTION OF THE MOST IMPORTANT PARAMETERS OF THE COMPUTER BESM-II

A. A. ZAK, T. I. MILTSENKO and V. P. SMIRJAGIN²

Abstract

The authors describe the new soviet digital computer BESM-II, built under the direction of Academician S. A. LEBEDEV.

The BESM-II is a stored-program, universal three-address digital computer, with a word-length of 39 binary digits. It has a floating-point, parallel arithmetic unit. The high-speed working memory is made of ferrit-cores and has a capacity of 2048 words. The medium-speed memory consists of two magnetic drums, with a total capacity of 12 288 words, which are backed

² Computing Center of the Academy of the USSR.

up by four magnetic tape-units, with a total capacity of about 160,000 words. The input is from perforated tapes with a speed of 15—20 words per seconds; the output is a line-printer with a speed of 15 eight-decimal numbers per second. The average speed of the machine proper is about 8000 three-adress operations per second. The tube complement is about 3500, the power-consumption about 50 kW.

The authors are giving also the block-diagram and a photograph of the machine as well, as the detailed order-code.

ÜBER EIN PROBLEM DER GASDYNAMIK (CHARAKTERISTISCHE RANDWERTAUFGABE MIT UNSTETIGKEITEN IN DEN RANDWERTEN)

VON

IMRE BIHARI¹, TAMÁS FREY¹ und ÁRPÁD PETHŐ²

§ 1. Über das chemisch-physikalische Problem

1.1. Es sind in der Chemie mehrere Verfahren zur Trennung von Gemischen bekannt, die mit Materialtransportprozessen zwischen bewegten Phasen in Beziehung stehen. Unter diesen rief der als »Gas-Chromatographie« bezeichnete Prozeß in den vergangenen Jahren ein großes Interesse hervor [1]. Im folgenden wollen wir dieses Verfahren quantitativ behandeln, unter zahlreichen Vereinfachungen des wirklichen physikalischen Bildes. Dieses vereinfachte Modell soll durch die Kriterien beschrieben werden:

I. Ein Gasgemisch, das eine einzige (ad- oder ab-)sorbierbare Komponente enthält, strömt neben der ruhenden Phase (die die Rolle des Ad- bzw. Absorbens spielt) in einem (in der einen Richtung als unendlich lang vorausgesetzten) Rohr;

II. Das Verhältnis der Volumina der sich bewegenden und ruhenden Phase ist längs des Strömungsrohres unverändert;

III. Es tritt kein Konzentrationsgradient in der Gas- und Sorptionsphase senkrecht zur Strömungsrichtung auf;

IV. Die Diffusionsprozesse in der Strömungsrichtung werden vernachlässigt;

V. Die Geschwindigkeit des Sorptionsvorganges hängt linear von den Konzentrationen in der sich bewegenden bzw. ruhenden Phase (s. weiter unten) ab;

VI. Die Vorgänge verlaufen unter isothermen und isobaren Verhältnissen.³

Nun sind die Konzentrationen der sorbierbaren Komponente in der Gasphase bzw. im Sorbens und die Geschwindigkeit des Gasstromes als Funktion von Ort und Zeit zu berechnen. Zwecks Aufstellung der Differentialgleichungen werden zunächst die folgenden Begriffe eingeführt:

x : die Ortskoordinate [cm];

y : die Zeit [sec];

$u(x, y)$: das im Sorbens gebundene Gasvolumen geteilt durch das Volumen der Gasphase, beide auf die Längeneinheit des Rohres bezogen [1];

¹ Technische Hochschule, Budapest.

² Zentralforschungsinstitut für Chemie, Budapest.

³ Bezüglich einigermaßen ähnlicher Systeme siehe [2].

$v(x, y)$: der Volumenbruch der sorbierbaren Komponente in der Gasphase [1];
 $c(x, y)$: die Geschwindigkeit des Gasstromes [cm sec⁻¹];
 k_1 und k_2 : Geschwindigkeitskonstanten der Sorption [sec⁻¹].

Betrachten wir nun einen Abschnitt des Rohres, der vom Nullpunkt bis zur Koordinate x reicht und eine Zeitdauer vom Zeitpunkt 0 bis y , dann lassen sich die Kontinuitätsgleichungen für die gegebenen Intervalle und die sorbierbare bzw. andere (nicht sorbierbare) Komponente des Gasgemisches folgendermaßen aufschreiben:

$$(1) \quad \int_0^y c(x, \eta) v(x, \eta) d\eta + \int_0^x [u(\xi, y) + v(\xi, y)] d\xi = \\ = \int_0^y c(0, \eta) v(0, \eta) d\eta + \int_0^x [u(\xi, 0) + v(\xi, 0)] d\xi,$$

$$(2) \quad \int_0^y c(x, \eta) [1 - v(x, \eta)] d\eta + \int_0^x [1 - v(\xi, y)] d\xi = \\ = \int_0^y c(0, \eta) [1 - v(0, \eta)] d\eta + \int_0^x [1 - v(\xi, 0)] d\xi.$$

Differenzieren der Gleichungen (1) und (2) nach x und y ergibt (die Indizes x und y bedeuten Ableitungen):

$$(3) \quad (cv)_x + u_y + v_y = 0$$

$$(4) \quad -(cv)_x + c_x - v_y = 0.$$

Zu diesen Kontinuitätsgleichungen ist noch die Gleichung der Sorption nach VI. hinzuzufügen:

$$(5) \quad u_y = k_1 v - k_2 u$$

oder

$$(6) \quad u_y = k_1 \left(v - \frac{k_2}{k_1} u \right).$$

Werden die Bezeichnungen

$$(7) \quad t = k_1 y$$

$$(8) \quad w = \frac{c}{k_1}$$

$$(9) \quad l = \frac{k_2}{k_1}$$

ins Gleichungssystem (3)—(4)—(6) eingeführt (die funktionellen Beziehungen werden wiederum durch $u(x, t)$, $v(x, t)$, $w(x, t)$ bezeichnet), so erhält man

(statt (4) sei die Summe von (3) und (4) genommen):

$$(10) \quad (wv)_x + u_t + v_t = 0$$

$$(11) \quad u_t + w_x = 0$$

$$(12) \quad u_t + lu - v = 0.$$

Nach den Gleichungen (1) und (2) können folgende Funktionen als Rand- und Anfangsbedingungen vorgeschrieben werden (unter Berücksichtigung von (7) und (8)):

$$(13) \quad v(0, t) = v_0(t)$$

$$(14) \quad w(0, t) = w_0(t)$$

$$(15) \quad u(x, 0) = u^0(x)$$

$$(16) \quad v(x, 0) = v^0(x).$$

Aus der physikalischen Natur des Problems folgt aber unmittelbar, dass gewisse Einschränkungen für diese Funktionen gelten; nach der Definition von v bzw. w bestehen die Ungleichungen:

$$0 \leq v_0(t) \leq 1, \quad 0 \leq v^0(x) \leq 1, \quad w_0(t) > 0;$$

ferner wird in der Praxis immer angenommen, daß sich die Phasen anfangs im Gleichgewicht befinden, d. h. $u_t = 0$ ($t = 0$), daher sind $u^0(x)$ und $v^0(x)$ gemäß (12) voneinander abhängig:

$$0 \leq u^0(x) = \frac{v^0(x)}{l} \leq \frac{1}{l}.$$

12. Anstatt des vorangehenden Problems sei nun das einfachere (welches auch dem physikalischen Bild vollkommen entspricht) wie folgt betrachtet: Es ist das Gleichungssystem (10)–(11)–(12) mit den Rand- und Anfangswerten zu lösen:

$$(1') \text{ Problem »A«: } 0 \leq v_0(t) \leq 1, \quad w_0(t) = w_0 = \text{const.}, \quad u^0(x) = v^0(x) = 0$$

bzw.

$$(2') \text{ Problem »B«: } v_0(t) = 0, \quad w_0(t) = w_0 = \text{const.}, \quad 0 \leq u^0(x) = \frac{v^0(x)}{l} \leq \frac{1}{l}.$$

Im weiteren wollen wir uns mit der Lösung des Problems »A« befassen. Sei $v_0(t)$ in der Gestalt

$$(3') \quad v_0(t) = M \tau(t), \quad 0 \leq M = \max v_0(t) \leq 1.$$

dargestellt. Versuchen wir nun die Lösung des Problems »A« so darzustellen, daß wir die Funktionen u , v , w und die Anfangs- und Randbedingungen nach Potenzen von M entwickeln

$$(4') \quad u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, t) M^k, \quad v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t) M^k, \quad w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, t) M^k$$

$$(5') \quad v_k(0, t) = \begin{cases} 0, & k = 0, 2, 3, \dots \\ \tau(t), & k = 1 \end{cases}; \quad w_k(0, t) = \begin{cases} w_0, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots \end{cases}; \quad u_k(x, 0) = v_k(x, 0) = 0.$$

Nun sind die Beiwerte u_k , v_k , w_k zu bestimmen.

Für $k = 0$ besteht nach (10)–(11)–(12):

$$(6') \quad \begin{aligned} (w_0 v_0)_x + (v_0)_t + (u_0)_t &= 0 & v_0(0, t) &= 0 \\ (u_0)_t + (w_0)_x &= 0 & ; & w_0(0, t) = w_0 \\ (u_0)_t + l u_0 - v_0 &= 0 & u_0(x, 0) &= v_0(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Problems ist offenbar

$$(7') \quad u_0(x, t) = 0, \quad v_0(x, t) = 0, \quad w_0(x, t) = w_0,$$

Für $k = 1$ besteht nach (10)–(11)–(12), unter Berücksichtigung von (7')

$$(8') \quad w_0(v_1)_x + (v_1)_t + (u_1)_t = 0$$

$$(9') \quad (u_1)_t + (w_1)_x = 0$$

$$(10') \quad (u_1)_t + l u_1 - v_1 = 0$$

$$(11') \quad v_1(0, t) = \tau(t), \quad w_1(0, t) = 0, \quad u_1(x, 0) = v_1(x, 0) = 0.$$

Die Lösung des linearen partiellen Gleichungssystems mit konstanten Koeffizienten (8')–(10') wird auch in der Literatur behandelt [3, 4, 5], und in Kenntnis von u_1 ergibt sich auch w_1 durch Integration. Für $k = 2, 3, \dots$ besteht das folgende lineare partielle Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$(12') \quad \begin{aligned} w_0(v_k)_x + (v_k)_t + (u_k)_t &= -(w_1 v_{k-1} + \dots + w_{k-1} v_1) \equiv f_k(x, t) \\ (u_k)_t + (w_k)_x &= 0 \\ (u_k)_t + l u_k - v_k &= 0 \\ v_k(0, t) = w_k(0, t) &= u_k(x, 0) = v_k(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Demgemäß, da für $k = 2$ $f_2(x, t)$ nach dem Vorangehenden schon bekannt ist, lassen sich die Lösungen u_2, v_2, w_2 bestimmen und im allgemeinen: im k -ten Schritt der Iteration ist schon $f_{k-1}(x, t)$ bekannt worden, wodurch sich die Lösungen u_k, v_k, w_k angeben lassen. Somit können die Beiwerte der Reihenentwicklungen (4'), also auch die gesuchten Funktionen u, v, w dargestellt werden.

Bei der Lösung des Problems »B« setzt man (im allgemeinen werden keine neuen Bezeichnungen gebraucht)

$$(13') \quad v^0(x) = M \xi(x), \quad 0 \leq M = \max v^0(x) \leq 1$$

und zieht die Reihenentwicklungen (4') heran. Jetzt gilt:

$$(14') \quad \begin{aligned} v_k(0, t) = 0; \quad w_k(0, t) &= \begin{cases} w_0, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots \end{cases}; \\ u_k(x, 0) = \frac{v_k(x, 0)}{l} &= \begin{cases} 0, & k = 0, 2, 3, \dots \\ \frac{\xi(x)}{l}, & k = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Beiwerte u_k, v_k, w_k können ähnlich wie die im Problem »A« bestimmt werden: (6') bzw. (7') bleiben ungeändert, neben (8')–(9')–(10') sind jetzt die Bedingungen gültig:

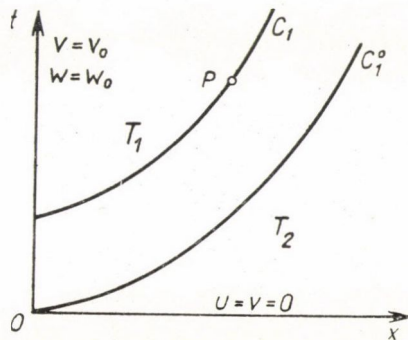
$$(15') \quad \begin{aligned} v_1(0, t) &= w_1(0, t) = 0 \\ u_1(x, 0) &= \frac{v_1(x, 0)}{l} = \frac{\xi(x)}{l}, \end{aligned}$$

und (12') bleibt ebenso ungeändert.

§ 2. Die Lösung des Problems in einem einfachen Falle mit der Methode der Charakteristiken

21. Nach einigen Umformungen lauten unsere Gleichungen (10)—(11)—(12):

$$(17) \quad \begin{cases} v_t + [(v-1)w]_x = 0 \\ u_t + w_x = 0 \\ u_t + lu - v = 0. \end{cases}$$



Figur 1.

Wir nehmen erstens die folgenden einfachen Nebenbedingungen an:

$$(18) \quad \begin{cases} v(0, t) = v_0, & w(0, t) = w_0 & (0 < v_0 = \text{const.} \leq 1, w_0 = \text{const.} > 0) \\ v(x, 0) = u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Die Funktion $v(x, t)$ hat einen Sprung im Anfangspunkt, folglich kann die Aufgabe für alle drei Funktionen u, v, w keine stetigen Lösungen besitzen.

Doch zeigen wir, daß eine Lösung im Teil $T: x \geq 0, t \geq 0$ der Ebene existiert, die bis auf eine aus dem Nullpunkt ausgehende Kurve C_1^0 stetig und einmal stetig differenzierbar ist, wo (d. h. längs C_1^0) die Funktion v (beim Durchschritt) samt mit gewissen Ableitungen (s. (17) und die letzten Zeilen des Punktes 23.) einen Sprung hat, dagegen die Funktionen u und w stetig bleiben.

Die Kurve C_1^0 trennt das Gebiet T in zwei Gebiete: T_1, T_2 . (Der obere sei T_1 , s. Fig. 1). Die genauere Begrenzung dieser wird später (in 24.) behandelt werden.

22. Vorläufig nur die Existenz einer solchen Lösung angenommen, leiten wir ein mit (17) gleichwertiges Gleichungssystem der gleichen Art für zwei Funktionen ab. — Es folgt aus (17)

$$u_{tt} = -w_{xt} = v_t - lu_t = -[(v-1)w]_x + lw_x.$$

Die zweiten Ableitungen u_{tt} und w_{xt} existieren und sind nach unseren Voraussetzungen und nach (17) sowohl im Innern von T_1 , als im Innern von T_2

(aber nicht auf C_1^0) stetig. — So gilt in T_1 und T_2 (nicht aber auf C_1^0)

$$-w_{xt} = -w_{tx} = -[(v-1)w]_x + lw_x,$$

also durch Integrieren nach x

$$(19) \quad w_t = (v-1-l)w + C(t).$$

Im Grundsatz kann $C(t)$ in T_1 und in T_2 verschiedene Formen, d. h. längs C_1^0 einen Sprung haben, doch liegt dieser Fall nicht vor, wie wir es sofort zeigen. Aus (17) folgt

$$v = u_t + lu = -w_x + lu.$$

Setzen wir dies in (19) ein, so erhalten wir

$$(20) \quad w_t + ww_x = (lu - 1 - l)w + C(t).$$

Es sei die Kurvenschar mit der Gleichung $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{w(x,t)}$ (oder $\frac{dx}{dt} = w(x,t)$) mit C_1 bezeichnet. Nach unseren Annahmen über $w (> 0)$ werden T_1 und T_2 einfach von ihr bedeckt. Sei \bar{C}_1^0 das durch 0 gehende Glied von C_1 . Später (im Punkt 24.) werden wir zeigen, dass $\bar{C}_1^0 \equiv C_1^0$ besteht. Vorläufig soll dies angenommen werden und wir schreiben im folgenden C_1^0 statt \bar{C}_1^0 .

Der Ausdruck $w_t + ww_x$ bedeutet die (innere) Ableitung von $w(x, t)$ längs C_1 (mit C_1 soll auch das Glied der Schar C_1 durch irgendeinen Punkt P bezeichnet werden, s. Fig. 1.). So haben wir

$$(20') \quad \frac{dw}{dt} = w_t + ww_x = (lu - 1 - l)w + C(t).$$

Bezeichnen wir mit $[p]$ den Sprung einer Funktion $p(x, t)$ längs C_1^0 , dann ist nach (20') (da u und w keine Sprünge haben)

$$\left[\frac{dw}{dt} \right] = [C(t)],$$

Die innere Ableitung $\frac{dw}{dt}$ hat aber längs C_1^0 keinen Sprung, denn $w(x, t)$ ist überall stetig, also $[C(t)] = 0$, was zu beweisen war. — So hat die Funktion $C(t)$ dieselbe Form in beiden Gebieten T_1 und T_2 . Ihr Wert in T_1 ergibt sich unmittelbar, wenn man in (19) $x = 0$ setzt: $C(t) = -(v_0 - l - 1)w_0$. In unserem Fall ist speziell $C(t) = \text{const.}$ Aus (17) und (19)

$$[w(v-1)]_t + w[w(v-1)]_x = w_t(v-1) = (v-1)[(v-1-l)w + C(t)].$$

Benützt man die Bezeichnung $w(v-1) = z$ in der obigen Gleichung bzw. in (19), so erhalten wir

$$(21) \quad \begin{cases} z_t + wz_x = \frac{z}{w}(z - lw + C(t)), \\ w_t = z - lw + C(t), \end{cases}$$

d. h. ein System ähnlich (17), aber nur mit zwei Funktionen $z(x, t)$ und $w(x, t)$. Die Nebenbedingungen lauten hier wie folgt:

$$[z(0, t) = w_0(v_0 - 1), \quad w(0, t) = w_0, \quad z(x, 0) = -w(x, 0) = -w_0$$

(da nach (17) $w_x(x, 0) = -u_t(x, 0) = 0$ und $w(0, 0) = w_0$ gelten).

Die mit (21) verknüpfte Randwertaufgabe ist mit der ursprünglichen in dem Sinne gleichwertig, daß man aus irgendeiner Lösung der einen eine Lösung für die andere Aufgabe konstruieren kann.

Das hyperbolische quasilineare System (21) besitzt zwei Scharen von Charakteristiken. Die eine ist die oben definierte Schar C_1 . Die Geraden, parallel mit Achse t bilden die andere Schar: C_2 . Die Ausdrücke $z_t + wz_x$ bzw. w_t sind ja innere Ableitungen längs dieser Scharen. Der Rand $x=0$ ist selbst auch eine Charakteristik, der Rand $t=0$ aber keine.

23. Bestimmen wir die „Hauptcharakteristik“ C_1^0 und unsere Funktionen längs dieser, d. h. die sog. „Wellenfront“.

Wir zeigen in 29. I., daß längs C_1^0 $u = 0$ ist. Dann folgt aus (20') (die Werte längs C_1^0 werden mit einem oberen Index $^\circ$ bezeichnet)

$$(22) \quad \frac{dw^0}{dt} = C(t) - (l+1)w^0,$$

also eine gewöhnliche Differentialgleichung für $w^\circ = w^\circ(t)$. Betrachten wir z. B. den Fall $v_0 = \text{const.}$, folglich $C(t) = (1+l-v_0)w_0 = \text{const.}$; $w^\circ(0) = w_0$ wegen bekommen wir

$$(23) \quad w^0 = w^0(t) = \frac{w_0(l+1-v_0)}{l+1} + \frac{w_0 v_0}{l+1} e^{-(l+1)t}.$$

Da $\frac{dx}{dt} = w^0(t)$ ist, lautet die Gleichung von C_1^0

$$(24) \quad x = \frac{w_0(l+1-v_0)}{l+1} t - \frac{w_0 v_0}{(l+1)^2} e^{-(l+1)t} + \frac{w_0 v_0}{(l+1)^2}.$$

Gemäß (17) gilt

$$v_t + w_x(v-1) + wv_x = v_t + wv_x + (v-1)(lu-v) = 0,$$

also längs C_1^0 (wo $u = u^\circ = 0$)

$$(25) \quad \frac{dv^0}{dt} = (v_t + wv_x)^0 = (v^0 - 1)v^0,$$

woraus folgt

$$v^0 = v^0(t) = \frac{v_0}{v_0 + (1-v_0)e^t}.$$

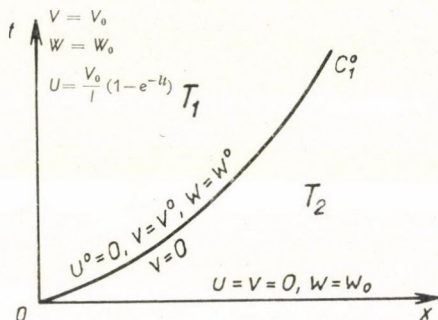
Wie wir es in 24. sehen werden, ist dies der Grenzwert von v bei einer Annäherung zu C_1^0 von der Seite von T_1 her. In demselben Sinne gibt (25) den Wert

von $u_t = -w_x$, (19) aber denjenigen von w_t längs C_1^0 . Es gelten ferner längs C_1^0 die Gleichungen: $u = 0$, $\frac{du}{dt} = u_t + wu_x = 0$ und so $u_x = -\frac{1}{w}u_t$.

24. Jetzt trennt sich unser Ausgangsproblem I. in die folgenden (II. und III.):

II. Es soll das auf T_2 und (21) bezügliche Cauchy'sche, *nicht charakteristische* Anfangswertaufgabe gelöst werden, wo die Anfangslinie die nicht charakteristische Achse x ist;

III. Es soll die auf T_2 bezügliche Aufgabe gelöst werden, aber die Anfangslinien (die Achse t und die Kurve C_1^0) sind hier Charakteristiken. Wir haben



Figur 2.

also mit einer *charakteristischen* Anfangswertaufgabe zu tun. Die Randwerte (die Belegungen) sind von Fig. 2. ablesbar.

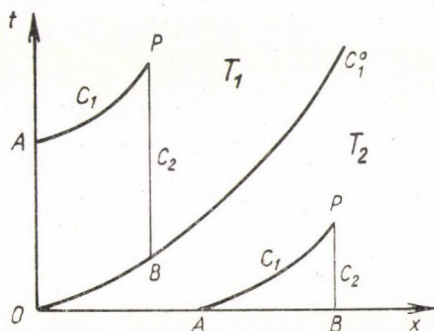
Wie bekannt (s. [6]), besitzen beide Aufgaben genau je eine Lösung, die stetig differenzierbar sind und stetige gemischte zweite Ableitungen haben, d. h. die vereinigten Lösungen von II. und III. geben genau die *einzige* Lösung der Aufgabe I., die stetig von den Anfangs- und Randwerten abhängt. Von der Gestalt und Größe von T_2 wissen wir nur soviel, dass T_2 sich auf eine gewisse Umgebung der Achse x — gelegentlich auf den ganzen Teil $x \geq 0$, $t \geq 0$ der Ebene x, t unter C_1^0 — ausbreitet (s. [7]). Das Gebiet T_1 ist dagegen ein von Charakteristiken begrenztes Viereck. Das Abhängigkeitsgebiet eines Punktes P wird in beiden Fällen durch die durch P gehenden Charakteristiken aus den Anfangslinien ausgeschnitten. Die erhaltene Lösung genügt allen unseren Bedingungen, ist einzig und stabil, folglich ist *die* Lösung des Problems. Der Sprung von v längs C_1^0 tritt tatsächlich auf (s. in 29. I.) und nur hier, womit die behauptete Identität $\bar{C}_1^0 = C_1^0$ bewiesen ist. Dagegen sind die Funktionen u und w im ganzen Gebiet T stetig (s. an derselben Stelle). — Da $w^0(t)$ mit $t \rightarrow +\infty$ endlich bleibt, ist die Lösung über alle Grenzen fortsetzbar (also für das ganze Gebiet T). In den einigen Teilgebieten der Figur können die Lösungen der Reihe nach (s. die Numerierung der Fig. 4.) bestimmt werden.

25. Für die Gewinnung von angenäherten Lösungen kann die Gitterpunktmethode von H. LEWY, oder die Iterationsmethode von R. COURANT dienen, aber die erste gibt keine Näherungsformeln, die andere führt auf einen Iterationsprozeß mit 12 Integralen (zwischen denen 4 zweifache Integrale).

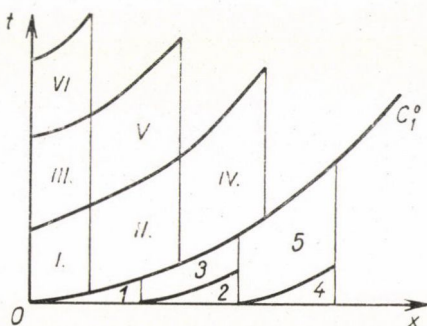
Viel einfacher ist eine andere von R. COURANT und P. LAX stammende Methode [7]:

Durch Integration der Gleichungen (21) längs der entsprechenden Charakteristiken bekommen wir die folgenden Integralgleichungen (s. Fig. 3.).

$$(26) \quad \begin{cases} z(P) = z(A) + \int_{\widehat{AP}} \frac{z}{w} (z - lw + C) dt = z(A) + \int_{\widehat{AP}} \frac{z}{w^2} (z - lw + C) dx, \\ w(P) = w(B) + \int_{\widehat{BP}} (z - lw + C) dt. \end{cases}$$



Figur 3.



Figur 4.

Für nicht charakteristische Anfangswertaufgaben haben COURANT und LAX gezeigt, daß die auf Grund von (26) durchgeführte Iteration — in einem gewissen Gebiet — gleichmäßig gegen einer — der Funktionenklasse $C_1 + \text{Lip}(1)$ angehörigen — Lösung konvergiert, wenn die Anfangs- und Randwerte — wie jetzt — auch hierher gehören. Bei der Anwendung der Methode bestimmen sich die Charakteristiken C_1 auch durch dieselbe Iteration (s. in 29. II.) mit.

Unsere Aufgabe ist charakteristisch in T_1 , nicht aber in T_2 . Der genannte Prozess ist also für T_2 unmittelbar anwendbar. Wir machen davon auch in T_1 Gebrauch, doch verschieben wir die Behandlung der Konvergenz zu § 4.

Natürlich gilt dies alles erstens nur auf ein kleines Gebiet in der Nähe der Anfangslinien, dann kann aber die Lösung stetig fortgesetzt werden, wie oben bemerkt wurde.

Wir bestimmen unsere Näherungswerte aber nicht mit Hilfe von (21) und (26), denn eine noch einfachere, unmittelbare Methode wird dafür dargestellt werden (s. den Punkt 28.).

26. Wir geben aber erst noch eine weitere Methode an.

Den Gleichungen (17₁)—(17₂) gemäss gibt es zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen $\varphi = \varphi(x, t)$ und $\psi = \psi(x, t)$, für die

$$(27) \quad \begin{cases} \varphi_x = v, & \varphi_t = -(v - 1)w \\ \psi_x = u, & \psi_t = -w \end{cases}$$

gelten. Diese in (17₃) gesetzt erhält man

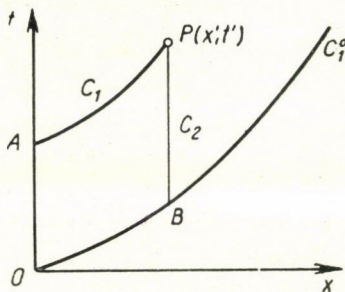
$$(28) \quad \psi_{xt} = \psi_{tx} = \varphi_x - l\psi_x, \text{ bzw. } \psi_t = \varphi - l\psi + C(t), \quad C(t) = (v_0 - l - 1)w_0 t + c$$

Aus (27)–(28)

$$\varphi_t = (\varphi_x - 1) \psi_t \quad \text{bzw.} \quad \varphi_x + \frac{1}{-\psi_t} \varphi_t = 1.$$

Somit ergibt sich folgendes System für φ und ψ

$$(29) \quad \begin{cases} \varphi_x + \frac{1}{l\psi - \varphi - C(t)} \varphi_t = 1, \\ \psi_t = \varphi - l\psi + C(t). \end{cases}$$



Figur 5.

Die Gleichung der einen charakteristischen Schar (C_1) ist $\frac{dx}{dt} = l\psi - \varphi - C(t) = w$, die Parallelen der Achse t bilden die andere Schar (C_2), d. h. die beiden Scharen stimmen mit denen des schon betrachteten Falles überein. Die Integralgleichungen sind als *lineare* — doch einfacher:

$$(30) \quad \begin{cases} \varphi(P) = \varphi(A) + \int_{\overline{AP}} dx = \varphi(A) + x', \\ \psi(P) = \psi(B) + \int_{\overline{BP}} (\varphi - l\psi + C(t)) dt. \end{cases}$$

Die Konstante c von $C(t)$ kann bestimmt werden, wenn wir die Differentialgleichung von C_1^0 mit ihrer durch den vorigen Weg gewonnenen Gleichung vergleichen. So hat man $c = -w_0$. Aus (27) (die Integrationskonstante sei als 0 gewählt) ergeben sich die Nebenbedingungen für φ und ψ :

$$\varphi(x, 0) = \psi(x, 0) = 0, \quad \varphi(0, t) = -(v_0 - 1)w_0 t, \quad \psi(0, t) = -w_0 t.$$

Aus (30₁) haben wir $\varphi^0 = \varphi^0(x) = x$ und aus (23), (27), (28) $\psi^0 = \psi^0(x) = -x$.

Die auf Grund von (30) durchgeführte Iteration gibt gute Näherungswerte nicht rasch, da sich u , v , w aus Annäherungen von φ , ψ durch Differenzieren erhalten lassen.

27. Diese Methode der Einführung der Potenzialfunktionen φ und ψ kann auch zur Gewinnung von Lösungen in geschlossener Form verwendet werden, die von einer Konstante und von einer willkürlichen Funktion abhängen.

Es sei

(α)

$$\varphi + C(t) = D(x),$$

wo $D(x)$ eine willkürliche Funktion von x ist. Aus (28)

$$\psi_t + l\psi = D(x), \quad \text{d. h.} \quad \psi_{tt} + l\psi_t = 0$$

und so

$$(\beta) \quad -w = \psi_t = E(x) e^{-lt}$$

($E(x)$ ist eine willk. F. von x).

Hieraus

$$(\beta') \quad \psi = -\frac{E(x)}{l} e^{-lt} + F(x)$$

($F(x)$ ist eine willk. F. von x)
und

$$(\gamma) \quad u = \psi_x = -\frac{E'(x)}{l} e^{-lt} + F'(x).$$

Aus (a)

$$\varphi_x = D'(x), \quad \varphi_t = -C'(t),$$

folglich mit Hilfe von (27) und (β)

$$(\delta) \quad v = D'(x), \quad w(1-v) = -C'(t)$$

bzw.

$$-E(x) e^{-lt} [1 - D'(x)] = -C'(t).$$

Durch Trennung der Variablen erhalten wir

$$E(x) [1 - D'(x)] = C'(t) e^{lt} = K = \text{const.}$$

also

$$v = D'(x) = 1 - \frac{K}{E(x)}, \quad C'(t) = K e^{-lt}.$$

(17₃), (γ), (δ) gemäß

$$E'(x) e^{-lt} = 1 - \frac{K}{E(x)} + E'(x) e^{-lt} - l F'(x)$$

und so

$$F'(x) = \frac{1}{l} \left(1 - \frac{K}{E(x)} \right).$$

Als Endresultat bekommen wir

$$(\varepsilon) \quad \begin{cases} v(x, t) = 1 - \frac{K}{E(x)}, \\ w(x, t) = -E(x) e^{-lt} \\ u(x, t) = -\frac{1}{l} E'(x) e^{-lt} + \frac{1}{l} \left(1 - \frac{K}{E(x)} \right), \end{cases}$$

eine Lösung in geschlossener Form — (ε) erfüllt (17) in der Tat — die aber bei keiner Wahl der willkürlichen Konstanten K und der Funktion $E(x)$ allen Nebenbedingungen

genügt. Diese Lösung kann z. B. bei einer Rand- und Anfangswertaufgabe benutzt werden, wo $u(x, 0) = 0$ ist. Diese führt zu der Gleichung

$$E'(x) + \frac{K}{E(x)} - 1 = 0,$$

die für $E(x)$ leicht gelöst werden kann. Die Lösung enthält neben K noch eine Konstante so, dass zwei weitere über u, v, w gestellte Bedingungen erfüllt werden können. Ähnlicherweise gelangen wir mit der Annahme $\varphi + C(t) = D(x)t$ statt (a) zu Lösungen ganz anderer Art, die (18) nicht genügen. Auf diese Fragen wird hier nicht eingegangen.

28. Es ist eine sehr durchsichtige und auf viel bessere Näherungswerte führende Methode, bei der man (17) in seine charakteristische Form, also in ein System von drei Gleichungen für u, v, w überführt, indem jede Gleichung nur in einer Richtung genommene Ableitungen enthält. Das wird auf folgende Weise erreicht. Aus (17)

$$v_t + wv_x = w_x(1 - v) = -u_t(1 - v) = (lu - v)(1 - v),$$

mithin hat man das System

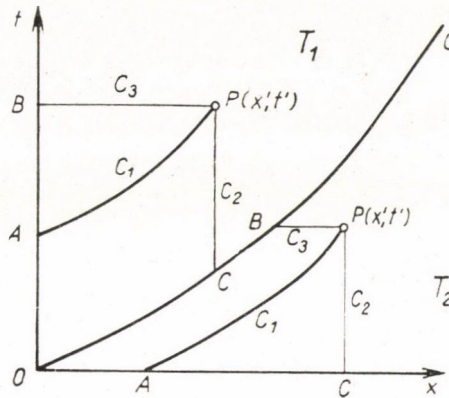
$$(31) \quad \begin{cases} v_t + wv_x = (lu - v)(1 - v), \\ w_x = lu - v, \\ u_t = v - lu. \end{cases}$$

Die charakteristischen Scharen sind genau die vorigen Scharen, aber es gibt noch eine dritte C_3 : die Schar der x Achse parallelen Geraden. Es gehören zu jedem Punkt 3 verschiedene charakteristische Richtungen (da $w > 0$ und beschränkt ist); darum ist (17) hyperbolisch und (31) charakteristisch (jede Gleichung enthält Ableitung nur nach einer Richtung). Die Integralgleichungsformen unserer Gleichungen sind

$$(32) \quad \begin{cases} v(P) = v(A) + \int_{\widehat{AP}} (lu - v)(1 - v) dt = \\ \quad = v(A) + \int_{\widehat{AP}} (lu - v)(1 - v) \frac{1}{w} dx, \\ w(P) = w(B) + \int_{\widehat{BP}} (lu - v) dx, \\ u(P) = u(C) + \int_{\widehat{CP}} (v - lu) dt. \end{cases}$$

Die Anfangslinien — die Achse x und t — sind jetzt beide Charakteristiken (charakteristische Anfangswertprobleme). Da (31) mit (17) und diese z. B. mit (21) gleichwertig ist und für (21) die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gesichert sind, können wir dasselbe auch über (31) behaupten, ferner zeigen wir (s. § 4.), (wie oben bei zweigliedrigen Systemen), dass die Lösung auch hier mit Iteration und zwar auf Grund von (32) gewonnen werden kann.

Dieselbe Tatsache hat für die *nicht* charakteristische Aufgabe und auch mehr als zwei Gleichungen einen unmittelbaren Beweis (s. z. B. [7]). Im § 4. werden die Existenz, Einzigkeit der Lösung, die Konvergenz der Iteration auch für den charakteristischen Fall gezeigt. Das ist von Wichtigkeit, denn sich das System nicht immer in ein zweigliedriges überführen lässt.



Figur 6.

29. Die Iteration vollzieht sich nach den Formeln

$$(33) \quad \begin{cases} v_{(n+1)}(P) = v_{(n)}(A) + \int_{C_{1(n)}} (lu_{(n)} - v_{(n)}) (1 - v_{(n)}) dt, \\ w_{(n+1)}(P) = w_{(n)}(B) + \int_{\overline{BC}} (lu_{(n)} - v_{(n)}) dx, \\ u_{(n+1)}(P) = u_{(n)}(C) + \int_{\overline{CP}} (v_{(n)} - lu_{(n)}) dt, \end{cases}$$

wo $u_{(n)}$, $v_{(n)}$, $w_{(n)}$, $C_{1(n)}$ die n -ten Näherungen von u , v , w , C_1 bedeuten. Folglich ist $C_{1(n)}$ die durch $P(x', t')$ gehende Integralkurve der Gleichung $\frac{dx}{dt} = w_{(n)}(x, t)$.

I. Im Gebiet T_2 (unter C_1^0) nehmen wir für 0-te Näherungen die Werte (s. Fig. 6)

$$v_{(0)}(P) = v(A) = 0, \quad w_{(0)}(P) = w(B) = w^0(B), \quad u_{(0)}(P) = u(C) = 0.$$

Dadurch ergibt die Iteration

$$v_{(n)}(P) = u_{(n)}(P) = 0, \quad w_{(n)}(P) = w^0(B) = w^0(t').$$

Die Grenzfunktionen dieser werden die Lösungen in T_2 sein, d. h. in T_2 (s. Fig. 6)

$$v(P) = u(P) = 0, \quad w(P) = w^0(t') = \frac{w_0(l+1-v_0)}{l+1} + \frac{w_0 v}{l+1} e^{-(l+1)t'}.$$

Diese erfüllen (17), ferner die Anfangsbedingungen in der Tat und — da gibt es keine andere zu $C_1 + Lip(1)$ gehörige Lösung des Problems — das ist die Lösung in T_2 .

II. Im Gebiete T_1 (oberhalb C_1^0) müssten die aufeinanderfolgenden Näherungen die auf dem Rande C_1^0 und $x=0$ vorgeschriebenen Werte eigentlich genau aufnehmen. Wäre die Gleichung von C_1^0 in der Form $t = t^0(x)$ bekannt, dann könnten v^0 , w^0 als

Funktionen von x in den Formen $v^0 = v^0(x)$, $w^0 = w^0(x)$ geschrieben und als 0-te Näherungen die Werte

$$v_{(0)}(x, t) = v^0(x), \quad w_{(0)}(x, t) = w^0(x), \quad u_{(0)}(x, t) = \frac{v_0}{l} (1 - e^{-(t-t^0(x))})$$

gewählt werden, die am Rande stetigerweise in die vorgeschriebenen Werte übergehen. Im vorliegenden Falle können — wegen der Mangel der expliziten Formel $t = t^0(x)$ — nur solche erste, zweite, ..., Näherungen gewonnen werden, die die Randwerte nur näherungsweise aufnehmen, während selbst der eine Rand (C_1^0) mit seiner Näherungsgleichung ersetzt wird. Eine erste Näherung der geschilderten Art gewinnen wir, wie folgt:

Nehmen wir in (33₁) längs $C_{1(0)}$

$$v_{(0)} = v(A) = v_0, \quad w_{(0)} = w(A) = w_0, \quad u_{(0)} = u(A) = \frac{v_0}{l} (1 - e^{-lt_A}).$$

(Der letzte Wert wurde aus (17₃) durch Integration längs der Linie $x = 0$ mit dem Anfangswert $u(0, 0) = 0$ erhalten.)

Ebenso sei es in (33₂) längs \overline{BP}

$$v_{(0)} = v(B) = v_0, \quad w_{(0)} = w(B) = w_0, \quad u_{(0)} = u(B) = \frac{v_0}{l} (1 - e^{-lt'}),$$

und bei (33₃) längs \overline{CP}

$$v_{(0)} = v(C) = v^0(x'), \quad w_{(0)} = w(C) = w^0(x'), \quad u_{(0)} = u(C) = 0.$$

Die 0-te Näherung der sich durch $P(x', t')$ ziehenden Charakteristik C_1 sei $t = t' + \frac{1}{w_0}(x - x')$, woraus $t_A = t' - \frac{x'}{w_0}$.

Diese Näherungswerte längs der entsprechenden Charakteristiken bilden zusammen noch *keine* (0-te) Näherungsfunktionen für das ganze Gebiet T_1 , nur dienen zur Bestimmung einer im früheren Sinne für das ganze T_1 eindeutig definierten *ersten Näherung*, die lautet

$$v_{(1)}(P) = v_{(1)}(x', t') = v_0 + \frac{v_0}{w_0} (v_0 - 1) x' e^{-l\left(t' - \frac{x'}{w_0}\right)},$$

$$w_{(1)}(P) = w_{(1)}(x', t') = w_0 - v_0 x' e^{-lt'},$$

$$u_{(1)}(P) = u_{(1)}(x', t') = v^0(x') [t' - t^0(x')].$$

Statt der unbekannten Funktion $t = t^0(x)$ nehmen wir als ihre 0-te Näherung $t = \frac{1}{w_0}x$. Mit Hilfe von (25') haben wir dann

$$u_{(1)}(P) = u_{(1)}(x', t') = \frac{v_0}{v_0 + (1 - v_0) e^{x'/w_0}} \left(t' - \frac{1}{w_0} x' \right).$$

Zwecks der Gewinnung der zweiten Näherung bestimmen wir jetzt die erste Näherung von C_1 aus der Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = w_{(1)}(x, t) = w_0 - v_0 x e^{-lt}.$$

Sie kann geschrieben werden:

$$dx + (v_0 x e^{-lt} - w_0) dt = 0$$

und wird nach Multiplikation mit $e^{-\frac{v_0}{l}t}$ zu einer exakten Gleichung, deren Integration ergibt

$$x e^{-\frac{v_0}{l}t} - w_0 \int_0^t e^{-\frac{v_0}{l}t_1} dt_1 = \text{const.}$$

Das ist die erste Näherung der Schar C_1 . Das sich durch $P(x', t')$ ziehende Glied von C_1 ist

$$(34) \quad x e^{-\frac{v_0}{l} e^{-u}} - x' e^{-\frac{v_0}{l} e^{-u'}} - w_0 \int_{t'}^t e^{-\frac{v_0}{l} e^{-u_1}} dt_1 = 0.$$

Setzt man hier $x = 0$, so haben wir die Gleichung für t_A

$$\int_{t'}^{t_A} e^{-\frac{v_0}{l} e^{-u_1}} dt_1 = -\frac{1}{w_0} x' e^{-\frac{v_0}{l} e^{-u'}},$$

die nur näherungsweise auf lösbar ist. Auch aus (34) gewinnen wir die Gleichung von C_1 in der expliziten Form

$$(35) \quad x = x' e^{\frac{v_0}{l} (e^{-u} - e^{-u'})} + w_0 \int_{t'}^t e^{\frac{v_0}{l} (e^{-u} - e^{-u_1})} dt_1 = f_1(t).$$

Die zweite Näherung ist dann

$$v_{(2)}(x', t') = v_0 + \int_{t_A}^{t'} [lu_{(1)}(f_1(t), t) - v_{(1)}(f_1(t), t)] [1 - v_{(1)}(f_1(t), t)] dt.$$

Bei der Bestimmung von $w_{(2)}$:

$$\begin{aligned} w_{(2)}(x', t') &= w_0 + \int_0^{x'} [lu_{(1)}(x, t') - v_{(1)}(x, t')] dx = \\ &= w_0 + \int_0^{x'} \left[\frac{lv_0}{v_0 + (1 - v_0) e^{x'/w_0}} \left(t' - \frac{x}{w_0} \right) - v_0 - \frac{v_0}{w_0} (v_0 - 1) x e^{-l \left(t' - \frac{x}{w_0} \right)} \right] dx, \end{aligned}$$

verursacht nur der Typ $\int \frac{x dx}{A + B e^{kx}}$ einige Schwierigkeiten. Endlich ist

$$\begin{aligned} u_{(2)}(x', t') &= \int_{t^0(x')}^{t'} [v_{(1)}(x', t) - lu_{(1)}(x', t)] dt = \\ &= \int_{t^0(x')}^{t'} \left[v_0 + v_0(v_0 - 1) \frac{1}{w_0} x' e^{-l \left(t - \frac{x'}{w_0} \right)} - \frac{lv_0}{v_0 + (1 - v_0) e^{x'/w_0}} \left(t - \frac{x'}{w_0} \right) \right] dt. \end{aligned}$$

In (35) $x' = t' = 0$ gesetzt, bekommen wir die erste Näherung von C_1^0 . Sie ist

$$x = w_0 \int_0^t e^{\frac{v_0}{l} (e^{-u} - e^{-u_1})} dt_1 = f_1^0(t)$$

und ihre Inverse sei $t = g_1^0(x)$. Dann gilt in der Formel von $u_{(2)}(x', t') : t^0(x') = g_1^0(x')$. Die hier auftretenden unbestimmten Integrale sind leicht bestimmbar.

Die zweite Näherung kann noch durchgeführt werden, wenn auch mit viel Rechnung. Die Rechnung der dritten und höheren Näherungen stösst auf ernste Schwierigkeiten und kann praktisch kaum vollzogen werden.

§ 3. Existenz-, Eindeutigkeit- und Stabilitätssätze im Allgemeinen

Schreiben wir das Gleichungssystem (10—12) in die Form

$$(36) \quad u_t + w_x = 0$$

$$(37) \quad u_t + lu - v = 0$$

$$(38) \quad v_t + [(v-1)w]_x = 0$$

und betrachten dabei die Nebenbedingungen

$$(39) \quad u(x, 0) = u^0(x) \geq 0$$

$$(40) \quad v(x, 0) = v^0(x) \geq 0$$

$$(41) \quad v(0, t) = v_0(t) \geq 0$$

$$(42) \quad w(0, t) = w_0(t) > 0.$$

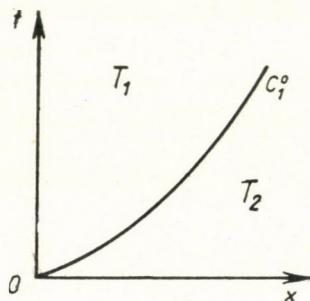
31. Es sei nun erst vorausgesetzt, dass alle vier Funktionen: u^0 , v^0 , v_0 und w_0 stetig und in $x \geq 0$, bzw. $t \geq 0$ stetig differenzierbar sind, nicht aber, dass die Grenzwerte

$$v^0(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} v(x, 0) \quad \text{und} \quad v_0(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} v(0, t)$$

übereinstimmen. Wir beweisen nun erst, dass das System (36—38) mit den Nebenbedingungen (39—42) ein und nur ein stetiges und stetig differenzierbares Lösungssystem in T ($x \geq 0$, $t \geq 0$) besitzt, falls

$$v^0(0) = v_0(0)$$

gilt, sogar beweisen wir auch im Falle $v^0(0) \neq v_0(0)$, dass es eine vom Nullpunkt ausgehende, den Bereich T in zwei Teile ($T = T_2 \cup T_1$, s. Fig. 7.) zerschneidende Kurve C_1^0 und ein Lösungssystem des Problems gibt, welches



Figur 7.

in den offenen Gebieten T_2 und T_1 stetig und stetig differenzierbar ist (kurz: zu C_1 gehört), weiter u und w im ganzen T stetig sind, dagegen v längs C_1^0 einen Sprung besitzt. Wir zeigen ferner, dass dieses Lösungssystem in beiden Fällen stetig von den Randwerten u^0 , v^0 , v_0 , w_0 abhängt. Es sei ja erst bemerkt, dass der Fall $v^0(0) = v_0(0)$ einen Spezialfall des allgemeineren Problems $v^0(0) \neq v_0(0)$ darstellt. Da wir ferner nur in T_2 bzw. in T_1 stetig differenzierbares Lösungssystem betrachten, so gilt nach (37), dass in beiden Bereichen auch u_{tx} und u_{tt} , also nach (36) auch w_{xt} und w_{xx} , also nach (38) auch v_{tx} stetig sind. Nach dem

Schwarz'schem Theorem gilt also in T_2 bzw. in T_1

$$(43) \quad u_{xt} = u_{tx}, \quad v_{xt} = v_{tx}, \quad w_{xt} = w_{tx}.$$

Aus (37) und (36) folgt also für T_2 einerseits, für T_1 andererseits, dass

$$v_t = lu_t + u_{tt} = -(lw_x + w_{xt}) = -(lw + w_t)_x,$$

also dass

$$-(lw + w_t)_x + [(v - 1)w]_x = 0$$

gültig ist. Durch Integration bekommt man

$$(44) \quad -(lw + w_t) + (v - 1)w = \begin{cases} C^{**}(t), & \text{falls } P(x, t) \in T_2 \\ C^*(t), & \text{falls } P(x, t) \in T_1 \end{cases}$$

d. h.

$$(45) \quad -(lw + w_t) + (lu + u_t - 1)w = \begin{cases} C^{**}(t) \\ C^*(t) \end{cases}.$$

Es sei

$$-C^*(t) = c^*; \quad -C^{**}(t) = c^{**}.$$

Nach (36) gilt also endlich

$$(46) \quad w_t + ww_x = [lu - (1 + l)]w + \begin{cases} c^{**} \\ c^* \end{cases}$$

Es sei nun C_1^0 eingebettet in einer Kurvenschar C_1 , durch die Differentialgleichung

$$(47) \quad \frac{dx}{dt} = w(x, t)$$

definiert. (46) kann man jetzt auch in der Form

$$(48) \quad \frac{dw}{dt} = [lu - (1 + l)]w + \begin{cases} c^{**} \\ c^* \end{cases}$$

schreiben, wo also unter $\frac{dw}{dt}$ die (innere) Ableitung von w längs der Schar zu verstehen ist. Wir beweisen nun, dass

$$(49) \quad c^* = c^{**} = c$$

gilt. C_1^0 ist ja durch (47) und die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ definiert. Da u und w stetig in T sind, besitzt die innere Ableitung längs C_1^0 eine hebbare Singularität; mit u und w und mit der eindeutig bestimmten Kurve C_1^0 hat nämlich auch $\frac{dw}{dt}$ dieselben Randwerte längs C_1^0 von beiden Seiten her. So folgt aber nach (48), dass c^* und c^{**} längs C_1^0 ebenso in T_2 wie in T_1 auch dieselben Randwerte besitzen, also, da sie beide nur von t abhängen, sind sie identisch, d. h.

$$(50) \quad c^* = c^{**} = c(t).$$

Mit Hilfe von (37), (41) und (39) kann man auch den Randwert

$$(51) \quad u(0, t) = u_0(t)$$

und ebenso mit Hilfe von (36)—(37) und (39)—(40) auch

$$(52) \quad w(x, 0) = w^0(x)$$

bestimmen; dann ist aber aus (44) auch $c^* = c^{**} = c(t)$ bestimmbar. Mit dem Problem (36—42) ist also das Problem

$$(36^*) \quad u_t + w_x = 0$$

$$(46^*) \quad w_t + ww_x = [lu - (1 + l)]w + c(t)$$

$$(39^*) \quad u(x, 0) = u^0(x) \geq 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} u(x, 0) = u^0(x) \geq 0 \\ u(0, t) = u_0(t) \geq 0 \end{matrix}} \right\} u^0(0) = u_0(0)$$

$$(51^*) \quad u(0, t) = u_0(t) \geq 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} u(x, 0) = u^0(x) \geq 0 \\ u(0, t) = u_0(t) \geq 0 \end{matrix}} \right\} u^0(0) = u_0(0)$$

$$(52^*) \quad w(x, 0) = w^0(x) \geq 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} w(x, 0) = w^0(x) \geq 0 \\ w(0, t) = w_0(t) > 0 \end{matrix}} \right\} w^0(0) = w_0(0)$$

$$(42^*) \quad w(0, t) = w_0(t) > 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} w(x, 0) = w^0(x) \geq 0 \\ w(0, t) = w_0(t) > 0 \end{matrix}} \right\} w^0(0) = w_0(0)$$

gleichwertig, falls wir nur die Lösungen betrachten, die in T_2 und in T_1 stetig und stetig differenzierbar, in T aber nur stetig sind.

Das hyperbolische, quasilineare System (36*) — (46*) — ... — (42*) besitzt nun zwei charakteristische Scharen von Kurven, nämlich die Schar, definiert durch (47) und die, definiert durch

$$(53) \quad x = \text{const.}$$

(36*)—(46*)—(39*)—(52*) ist also in T_2 eine gewöhnliche Anfangswertaufgabe mit zwei Veränderlichen, die — wie schon in § 2. bemerkt — in jedem endlichen Teile von T_2 ein und nur ein stabiles Lösungssystem besitzt, sogar auch im ganzen T_2 , falls $w^0(x)$ beschränkt ist. Wurde diese Aufgabe gelöst, so kennt man die Werte von u und w längs C_0^1 in T_1 , hat man also in T_1 ein charakteristisches Problem zu lösen. Nach [6] bzw. nach § 2. ist es schon bekannt, dass das Problem (36*)—(46*)—...—(42*) ein und nur ein stabiles Lösungssystem (mit positivem u und w) in T besitzt, was aber in T vielleicht nur schrittweise (s. § 2.) zu zeigen, bzw. zu rechnen ist. Dasselbe folgt aber dann auch für das ursprüngliche Problem (36—42), w. z. b. w.

32. Betrachten wir nun den Fall, wo — dem vorigen Punkt gegenüber — die Funktion $v_0(t)$ nicht mehr stetig ist; übrigens ist dieser Fall von praktischer Bedeutung:

$$(54) \quad u(x, 0) = u^0(x) = 0$$

$$(55) \quad v(x, 0) = v^0(x) = 0$$

$$(56) \quad v(0, t) = v_0(t) = \begin{cases} \frac{v_0}{\varepsilon} > 0, & \text{falls } 0 \leq t < \varepsilon \\ 0, & \text{falls } \varepsilon < t \end{cases}$$

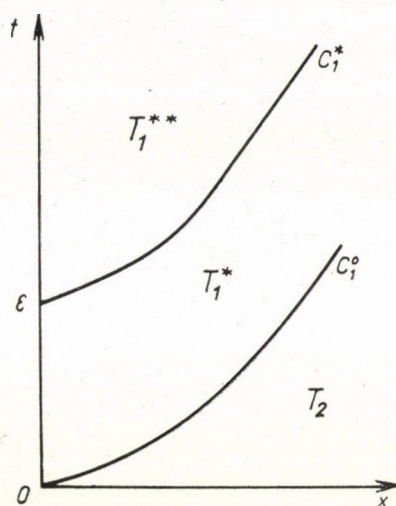
$$(57) \quad w(0, t) = w_0(t) = w_0 = \text{const.} > 0$$

bzw. ein solches Lösungssystem des Problems (36—38) bzw. (54—57), für welches u und w stetig in \bar{T} , ferner u , v und w stetig und stetig differenzierbar

in T_2 , T_1^* und T_1^{**} sind (s. Fig. 8.). C_1^* ist ja die Kurve der Schar (47), welche durch die Anfangsbedingung

$$(58) \quad x(\varepsilon) = 0$$

definiert ist. Nach den obigen Überlegungen folgt auch jetzt, dass das betrachtete Problem mit einem (36*)—(46*)—...—(42*) ähnlichen äquivalent ist, also dass es ein und nur ein — den vorangehenden entsprechendes — Lösungs-



Figur 8.

system besitzt, welches stetig von den Randwerten abhängt. Die fehlenden Randwerte und die Werte längs C_1^0 werden in dem folgenden festgestellt; es sei aber erst bemerkt, dass — wie die Gleichungen (36—38) zeigen, — das einzige, den Bedingungen entsprechende Lösungssystem in T_2 das System

$$(59) \quad v(x, t) = u(x, t) = 0 \quad \text{und} \quad w(x, t) = \bar{w}(t)$$

darstellt, wo mit $\bar{w}(t)$ der Wert von w als Funktion von t auf C_1^0 bezeichnet wird. Dieses System ist ferner — wie es schon bemerkt — eindeutig bestimmt und stabil. Bezeichnen wir dieses mit $u_\varepsilon(x, t)$, $v_\varepsilon(x, t)$, $w_\varepsilon(x, t)$.

Die Randwerte in T_2 und in T_1 bzw. auf C_1^0 ergeben sich durch einfache Rechnung; unter Berücksichtigung von (37), (39*), (51*) bzw. (56) bekommt man

$$(60) \quad u_0(t) = \int_0^t v_0(\tau) e^{-l(t-\tau)} d\tau = \begin{cases} \frac{v_0}{l\varepsilon} (1 - e^{-lt}), & \text{falls } t \leq \varepsilon \\ v_0 e^{-lt} \frac{e^{l\varepsilon} - 1}{l\varepsilon}, & \text{falls } t \geq \varepsilon \end{cases};$$

die Funktion $c(t)$ wird aus (44) bestimmt, wenn man in (44) $x = 0$ einsetzt:

$$(61) \quad c(t) = w_0 [1 + l - v_0(t)];$$

aus (46), (61) und (59):

$$(62) \quad \frac{d\bar{w}}{dt} + (1+l)\bar{w} = w_0[1+l-v_0(t)],$$

oder integriert mit der Bedingung $\bar{w}(0) = w_0$ und wegen (56):

$$(63) \quad \bar{w}(t) = w_0 \left[1 - \int_0^t v_0(\tau) e^{-(1+l)(t-\tau)} d\tau \right] = \begin{cases} w_0 \left[1 - \frac{v_0}{\varepsilon(1+l)} (1 - e^{-(1+l)t}) \right], & t \leq \varepsilon \\ w_0 \left[k - v_0 e^{-(1+l)t} \frac{e^{(1+l)\varepsilon} - 1}{\varepsilon(1+l)} \right], & t \geq \varepsilon; \end{cases}$$

endlich wird die Gleichung von C_1^0 aus (47) und (63) wie folgt gewonnen:

$$(64) \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = w_0 \left[1 - \int_0^t v_0(\tau) e^{-(1+l)(t-\tau)} d\tau \right],$$

$$(65) \quad \bar{x}(t) = w_0 \left\{ \varepsilon - \frac{v_0}{\varepsilon(1+l)} \left[\varepsilon + (e^{-(1+l)\varepsilon} - 1) \right] + \right. \\ \left. + t - \varepsilon + \frac{v_0}{1+l} [e^{-(1+l)t} - e^{-(1+l)\varepsilon}] \frac{e^{(1+l)\varepsilon} - 1}{\varepsilon(1+l)} \right\} (t \geq \varepsilon).$$

Ähnlicherweise erhalten wir auf Grund von (25) und $v_\varepsilon(0, 0) = \frac{v_0}{\varepsilon}$:

$$\bar{v}(t) = \frac{v_0}{v_0 - (v_0 - \varepsilon) e^t}.$$

Die Funktionen $v_0(t)$, $u_0(t)$, $c(t)$, $\bar{w}(t)$, $\bar{x}(t)$ und $\bar{v}(t)$ besitzen nun folgende Grenzwerte, falls ε nach Null strebt ($\delta(t)$ bezeichnet Dirac-Distribution):

$$(66) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_0(t) = v_0 \delta(t)$$

$$(67) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_0(t) = v_0 e^{-lt}$$

$$(68) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(t) = w_0 [1+l-v_0 \delta(t)]$$

$$(69) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{w}(t) = w_0 [1 - v_0 e^{-(1+l)t}]$$

$$(70) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{x}(t) = w_0 \left[t - \frac{v_0}{1+l} (1 - e^{-(1+l)t}) \right]$$

$$(70') \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{v}(t) = \frac{1}{1 - e^t}.$$

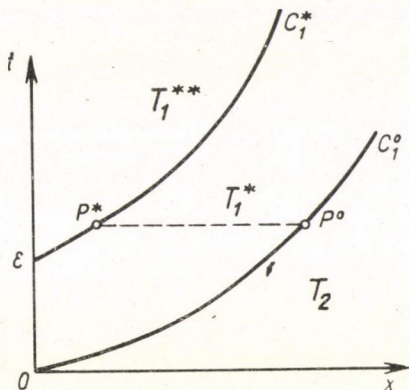
C_1^0 besitzt also die Grenzstelle, definiert durch die Gleichung

$$(71) \quad \bar{x}(t) = w_0 \left[t - \frac{v_0}{1+l} (1 - e^{-(1+l)}) \right].$$

Wir zeigen noch, dass auch C_1^* eine Grenzstelle besitzt, falls $\varepsilon \rightarrow 0$, und zwar fällt sie dann mit C_1^0 zusammen. Daraus folgt aber, dass das Problem (36–38) mit den Nebenbedingungen

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = \delta(t), \quad w(0, t) = w_0 = \text{const.} > 0$$

als einzige Lösung $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon$ hat.



Figur 9.

Um nun zu zeigen, dass C_1^* eine Grenzstelle besitzt, betrachten wir Fig. 9. Nach (60) und (59) sind längs C_1^0 bzw. längs $x = 0$ in T_1^*

$$(73) \quad u_t > 0 \quad \text{und} \quad \text{folglich} \quad w_x < 0$$

gültig, und da das Lösungssystem in T_1^* stetig differenzierbar ist, gilt (73) auch noch in einer Umgebung der obigen Randkurven. Also gilt die Ungleichung

$$(74) \quad w(x + \Delta x, t) < w(x, t).$$

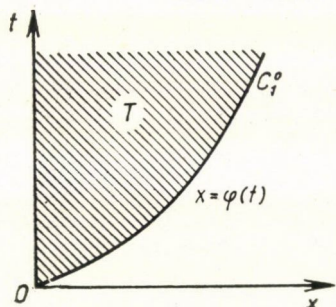
Somit folgt — für genügend kleine ε — dass C_1^* im Punkte $P^*(x^*, t)$ einen kleineren Richtungskoeffizienten $\left(\frac{1}{w(P^*)} \right)$, als C_1^0 im Punkte $P^0(x, t)$ mit gleichem t besitzt. C_1^* strebt also gegen C_1^0 , falls $\varepsilon \rightarrow 0$, w. z. b. w.

Doch hat die mit dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ gewonnene Lösung für das physikalische Problem keine Bedeutung mehr, da $0 \leq v_0(t) \leq 1$ ständig gelten muss, was hier nicht erfüllt ist, wie es (70') zeigt.

§ 4. Ergänzung zu dem charakteristischen Problem. Frage der Existenz, Eindeutigkeit, Stabilität und Möglichkeit der Iteration

Wir behandeln z. B. den Fall des dreigliedrigen Systems (17) im Bereich $T: x \geq 0, t \geq \varphi(t)$ (wo $x = \varphi(t) = x^0(t)$ die Gleichung der Hauptcharakteristik ist) mit den Randwerten von § 2. längs $x = \varphi(t)$ und $x = 0$, die samt mit $\varphi(t)$ zu $C_1 + \text{Lip}(1)$ gehören, sich im Punkt 0 aneinander stetig anknüpfen

(dabei ist $\varphi'(t) > 0$, $\varphi(0) = 0$). Die Kurven $x = \varphi(t)$ und $x = 0$ sind Charakteristiken. — Wir suchen eine zu $C_1 + \text{Lip}(1)$ gehörige Lösung der Aufgabe, für die noch $u \geq 0$, $v \geq 0$, $w > 0$ gilt (Problem I.).



Figur 10.

Das Gebiet T geht mit der ein-eindeutigen Transformation $\xi = x$, $\tau = \varphi(t) - x$ in das Viertel $\xi \geq 0$, $\tau \geq 0$ der Ebene (ξ, τ) über. Gleichzeitig gehen C_1^0 in die Achse ξ , Achse t in die Achse τ , die Geraden $x = \text{const.}$ in $\xi = \text{const.}$, schliesslich die Geraden $t = \text{const.}$ in die der Gerade $\tau = -\xi$ parallelen Geraden über und ändert sich damit der Charakter $C_1 + \text{Lip}(1)$ von (17) nicht. So ist das Problem I. mit dem folgenden Problem II. gleichwertig (wir schreiben $\varphi'(t) = \psi(\xi, \tau)$ und dann x , t statt ξ , τ):

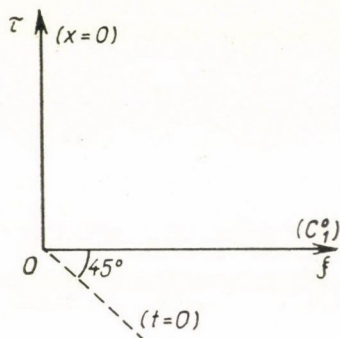
$$(75) \quad \begin{cases} \psi v_t + [(v-1)w]_x - [(v-1)w]_t = 0, \\ \psi u_t + w_x - w_t = 0, \\ \psi u_t = v - lu. \end{cases}$$

Der Rand besteht jetzt aus den Achsen x und t .

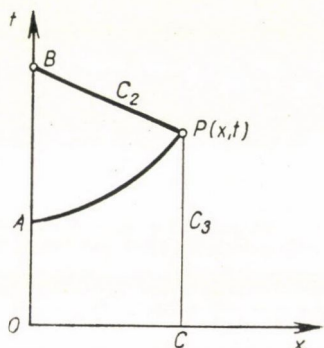
Die charakteristische Form dieses Systems ist

$$(76) \quad \begin{cases} v_t + \frac{w}{\psi - w} v_x = \frac{(1-v)(lu-v)}{\psi - w}, \text{ oder } \frac{\psi - w}{w} v_t + v_x = \frac{(1-v)(lu-v)}{v}, \\ w_t - w_x = v - lu, \\ u_t = \frac{v - lu}{\psi}. \end{cases}$$

Die drei Scharen von Charakteristiken sind: die Schar mit der Gleichung $\frac{dt}{dx} = \frac{\psi - w}{w}$, oder $\frac{dx}{dt} = \frac{w}{\psi - w}$ (wozu auch die Achse x gehört), die Schar C_2 der $t = -x$ parallelen Geraden, die Schar C_3 der Geraden $x = \text{const.}$



Figur 11.



Figur 12.

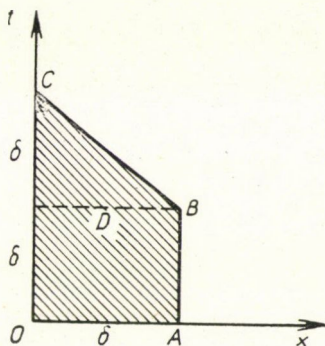
Durch jeden Punkt von $x \geq 0, t \geq 0$ zieht sich je ein Glied der drei Scharen. Die Glieder von C_1 schneiden alle die Achse t , aber die Achse x nicht, da die Lösung der Gleichung $\frac{dt}{dx} = \frac{\psi - w}{w}$ — nach unseren Annahmen — mit den Anfangswerten eindeutig bestimmt ist.

Jetzt zeigen wir, dass Problem II. genau eine Lösung hat, die stabil ist und mit Iteration gewonnen werden kann. — Existiert die verlangte Lösung, dann kann (76) in die Integralgleichungsform

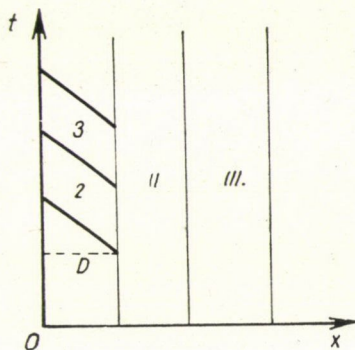
$$(77) \quad \begin{cases} v(P) = v(A) + \int_{\widehat{AP}} \frac{(1-v)(lu-v)}{\psi-w} dt = v(A) + \int_{\widehat{AP}} \frac{(1-v)(lu-v)}{w} dx, \\ w(P) = w(B) + \int_{\widehat{BP}} (v-lu) dt, \\ u(P) = u(C) + \int_{\widehat{CP}} \frac{v-lu}{\psi} dt \end{cases}$$

geschrieben werden, die mit (76) gleichwertig ist. Durch Einsetzen einer n -ten Näherung in die rechten Seiten, gewinnt man die $n+1$ -te. Zu einer ersten Näherung gelangt man z. B. dadurch, wenn man in allen rechten Seiten die Werte von u, v, w mit ihren Werten in den Punkten A, B und C (s. Fig. 12.) ersetzt. So wird keine erste Näherung geliefert, doch die mit deren Hilfe gewonnenen Funktionen u_1, v_1, w_1 sind alle Forderungen erfüllende erste Näherungen (z. B. nehmen sie am Rand die vorgeschriebenen Werte an).

Zeichnet man in der Ebene x, t ein Gebiet D , welches durch eine Trapez $OABC$ begrenzt wird (s. Fig. 13.), so kann der Courant-Laxsche Beweis [7] für D auch in diesem Fall vollständig durchgeführt werden. — Man sieht aus (77), wie wesentlich es ist, dass am Rande $x=0, t=0$ überall $w > 0$ (im vorliegenden Fall $w = w_0 = \text{const.} > 0$) und $\varphi'(t) > 0$ gelten und $\varphi'(t)$ immer über einen positiven Wert bleibt. Der Beweis gilt erst nur für eine genügend kleine $\delta > 0$, aber — da diese Eigenschaften der ursprünglichen Randwerte für die neuen Randwerte übrigbleiben — können wir nach und nach mit



Figur 13.



Figur 14.

сich an D knüpfenden Parallelogrammen und mit der Achse t parallelen Streifen mit der Breite δ das ganze Gebiet $x \geq 0, t \geq 0$ einnetzen. Damit sind alle Lücken des Beweises der Paragraphen 2. und 3. ausgefüllt.

(Eingegangen 18. Mai, 1959.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] SCHAY, G.: *Theoretische Grundlagen der Gas-Chromatographie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
- [2] MEDGYESSY P.—RÉNYI A.—TETAMANTI K.—VINCZE I.: „A kémiai frakcionáló megosztás matematikai tárgyalása nem-teljes diffúzió esetében.” *Publications de l'Institut des Mathématiques Appliquées de l'Académie des Sciences de Hongrie* 3 (1954) 81—97.
- [3] KLINKENBERG, A.: „Heat transfer in cross-flow heat exchangers and packed beds.” *Industrial and Engineering Chemistry* 46 (1954) 2285—2289.
- [4] CARSLAW, H. S.—JAEGER, J. C.: *Conduction of heat in solids*. At the Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [5] ТИХОНОВ, А. И.—САМАРСКИЙ, А. А.: *Уравнения математической физики*. Главиздат государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1953.
- [6] LEWY, H.: „Über das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.” *Mathematische Annalen* 98 (1928) 179—191.
- [7] COURANT, R.—LAX, P.: „On nonlinear Partial Differential Equations with two Independent Variables.” *Communications on Pure and Applied Mathematics* 2 (1949) 255—273.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ)

I. BIHARI, T. FREY и Á. PETHŐ

Резюме

Сорбные явления, имеющие место при токе газовой смеси через трубу, при некоторых условиях ведут к смешанной задаче, связанной с квазилинейной, гиперболической системой дифференциальных уравнений первого порядка (17). Решение ищется в области $T(x \geq 0, t \geq 0)$. Задача различными способами может быть сведена к аналогичной проблеме системы из двух уравнении. Все эти задачи имеют ту особенность, что в гранично-начальных значениях одной из неизвестных функций имеется разрыв, задача не имеет решения, непрерывного во всей области T . В работе доказывается, что существует решение, которое везде кроме точек некоторой кривой, исходящей из центра системы координат, принадлежит классу функций $C_1 + \text{Lip}(1)$ (если и граничные значения таковы), более того, остальные две функции непрерывны во всей области T . Работа даёт решение в одной из частных областей в явном виде, в другой даёт приближённое решение с помощью итерации на основании трёх однократных интегральных уравнений, причём и одна система характеристик находится с помощью итераций. Фронт волн также определяется в явном виде. В одном из исследованных специальных случаев разрывная функция принимает на двух осях два различных постоянных значения, во втором — значение, заданное на одной из осей, — дистрибуция Dirac-а. В противоположность предыдущим работам аналогичного содержания, работа не считает скорость газовой смеси постоянной.

EINE MATRIXMETHODE ZUR LÖSUNG VON ANFANGSWERTAUFGABEN LINEARER DIFFERENZENGLEICHUNGEN

von
A. PETHŐ¹

In der vorliegenden Arbeit wird die Anwendung des Matrizenkalküls zur Lösung der Anfangswertaufgaben (im allgemeinen partieller) linearer Differenzengleichungen in dem Falle dargelegt, wo die Koeffizienten von einer Veränderlichen unabhängig sind. Zuerst wird die Methode für die gewöhnlichen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten explizit durchgeführt (§ 2), danach ein konstruktives Verfahren diskutiert, wie die Lösung einer partiellen Gleichung genannten Typs in Kenntnis der allgemeinen expliziten Lösungen der gewöhnlichen linearen Differenzengleichungen mit (im allgemeinen) veränderlichen Koeffizienten zu erhalten ist (§ 3). In § 4 wird die rechen-technische Einfachheit der Methode an einem partiellen Differenzengleichungssystem (das von einem Problem chemischer Natur herrührt) gezeigt, dessen Lösung andere Verfasser [1] mit der Methode der erzeugenden Funktionen [2] bereits bestimmt hatten.

Den Überlegungen liegt die einfache Bemerkung zugrunde, dass im kommutativen Ring der Matrizen der Form $[\lambda_{i-j}]$ ($\lambda_{i-j} = 0$ für $i < j$) die ganzen rationalen Funktionen wie dieselben im Polynomring über den reellen Zahlen $\sum \lambda_k z^k$ darzustellen sind, ferner dass die im Falle $\lambda_0 \neq 0$ existierenden Inversen auch Ringelemente sind (§ 1).

§ 1. Einige Definitionen und Bemerkungen

Wir beginnen mit einem Hinweis auf die einfache Tatsache, dass die Lösung der für die Funktion $u(x)$ ($x = 0, 1, \dots$) bestehenden linearen Differenzengleichung m -ter Ordnung

$$(11) \quad \sum_{r=0}^m a_r(x) u(x+r) = b(x) \quad (a_m(x) \neq 0)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(12) \quad u(\varrho) = u_\varrho, \quad \varrho = 0, 1, \dots, m-1 \quad (u_\varrho \text{ vorgegeben})$$

¹ Zentralforschungsinstitut für Chemie der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest.

eine rationale Funktion der Beiwerte $a_r(x)$, des Gliedes $b(x)$ und der Anfangswerte u_ϱ liefert:

$$(13) \quad u(x) = \sum_{\pi=0}^{x-m} P_\pi(a_r) b(\pi) + \sum_{\varrho=0}^{m-1} R_\varrho(a_r) u_\varrho, \quad x > m-1,$$

wo $P_\pi(a_r)$ bzw. $R_\varrho(a_r)$ ganze rationale Funktionen der Veränderlichen $\frac{a_\varrho(0)}{a_m(0)}, \dots, \frac{a_\varrho(x-m)}{a_m(x-m)}$ ($\varrho = 0, \dots, m-1$) sind.

Da im Operatorenmodul der Vektoren von n Dimensionen (einschliesslich $n = \infty$) — ihm als Operatorenbereich den Ring der kommutativen quadratischen Matrizen n -ter Ordnung zugeordnet — dieselben Rechengesetze wie bei Zahlen gelten [3], muss das eben Gesagte auch in diesem Operatorenmodul bestehen; wir bewiesen also den

Hilfssatz I. Die Lösung der linearen vektoriellen Differenzgleichung m -ter Ordnung mit vertauschbaren quadratischen Matrizenkoeffizienten

$$(14) \quad \sum_{r=0}^m \mathbf{A}_r(x) \mathbf{u}(x+r) = \mathbf{b}(x) \quad (|\mathbf{A}_m(x)| \neq 0; x = 0, 1, \dots)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(15) \quad \mathbf{u}(\varrho) = \mathbf{u}_\varrho, \quad \varrho = 0, 1, \dots, m-1 \quad (\mathbf{u}_\varrho \text{ vorgegeben})$$

ist wie folgt:

$$(16) \quad \mathbf{u}(x) = \sum_{\pi=0}^{x-m} P_\pi(\mathbf{A}_r) \mathbf{b}(\pi) + \sum_{\varrho=0}^{m-1} R_\varrho(\mathbf{A}_r) \mathbf{u}_\varrho, \quad x > m-1,$$

hierbei werden die sog. Resolventenmatrizen $P_\pi(\mathbf{A}_r)$, $R_\varrho(\mathbf{A}_r)$ dargestellt, indem man in den Funktionen $P_\pi(a_r)$, $R_\varrho(a_r)$ (s. (13)) für die Skalarveränderlichen

$$(17) \quad \frac{\mathbf{A}_\varrho(0)}{\mathbf{A}_m(0)}, \dots, \frac{\mathbf{A}_\varrho(x-m)}{\mathbf{A}_m(x-m)} \quad (\varrho = 0, 1, \dots, m-1)$$

setzt.

Die Lösung einer partiellen Differenzgleichung genannten Typs lässt sich immer — wie in § 3 gezeigt wird — zu der Lösung solcher gewöhnlicher vektorieller Differenzgleichungen reduzieren, in denen die Koeffizienten Polynome der (unendlichen) Matrix

$$(18) \quad \mathbf{I} = [\lambda_{i-j}], \quad \lambda_{i-j} = \delta_{i-j,1} \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

d. h. Matrizen der Form²

$$(19) \quad \mathbf{A}_n \equiv \sum_{k=0}^n \lambda_k \mathbf{I}^k = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_0 & 0 & \dots \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

² Hinsichtlich der Potenzen von \mathbf{I} siehe [4].

kürzer:

$$\mathbf{A}_n = [\lambda_{i-j}]; \quad \lambda_{i-j} = 0, \quad \text{wenn } i - j \neq 0, 1, \dots, n$$

sind.

Die Matrizen \mathbf{A}_n sind im Fall $\lambda_0 \neq 0$ invertabel, insbesondere gilt für $\lambda_0 = 1$

$$(110) \quad \frac{1}{\mathbf{A}_n} = \mathbf{A}_n^{-1} = \left(\mathbf{I}^0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{I}^k \right)^{-1} = \sum_{v=0}^{\infty} \left(- \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{I}^k \right)^v.$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass die Matrizen \mathbf{A}_n (n beliebig, einschliesslich $n = \infty$) einen kommutativen Ring definieren, in dem die Rechengesetze gelten:

$$(111) \quad \sum \lambda'_k \mathbf{I}^k + \sum \lambda''_k \mathbf{I}^k = \sum (\lambda'_k + \lambda''_k) \mathbf{I}^k$$

$$(112) \quad \sum \lambda'_k \mathbf{I}^k \cdot \sum \lambda''_k \mathbf{I}^k = \sum (\lambda'_0 \lambda''_k + \dots + \lambda'_k \lambda''_0) \mathbf{I}^k,$$

die mit denen im Polynomring $\Sigma \lambda_k z^k$ über den reellen Zahlen λ_k übereinstimmen.

Wir wollen nunmehr \mathbf{A}_n^{-1} nach den Potenzen von \mathbf{I} ordnen. Nach dem polynomischen Lehrsatz gilt

$$(113) \quad \mathbf{A}_n^{-1} = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=v} \frac{v!}{k_1! \dots k_n!} (-\lambda_1)^{k_1} \dots (-\lambda_n)^{k_n} \mathbf{I}^{k_1+\dots+nk_n},$$

wo k_1, k_2, \dots, k_n nicht negative ganze Zahlen sind. Hier ist der Beiwert von \mathbf{I}^k ($k = 0, 1, \dots$) leicht zu berechnen; es gilt nämlich

$$(114) \quad k = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = v + k_2 + \dots + (n-1)k_n,$$

das heisst

$$(115) \quad v = k - k_2 - \dots - (n-1)k_n,$$

folglich ist der Beiwert von \mathbf{I}^k :

$$(116) \quad \lambda_k^{(-1)} = \sum_{k_1+\dots+nk_n=k} \frac{(k - k_2 - \dots - (n-1)k_n)!}{k_1! \dots k_n!} (-\lambda_1)^{k_1} \dots (-\lambda_n)^{k_n}.$$

Somit haben wir für \mathbf{A}_n^{-1} erhalten:

$$(117) \quad \mathbf{A}_n^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(-1)} \mathbf{I}^k,$$

woraus zu sehen ist, dass \mathbf{A}_n^{-1} auch dem erwähnten Matrizenring angehört (im Falle $\lambda_0 \neq 0$). Hiermit haben wir folgendes bestätigt:

Hilfssatz II. Wählen wir für die Koeffizienten in (14) die Matrizen (s. § 3):

$$(118) \quad \mathbf{A}_r(x) = \sum_{s=0}^n a_{rs}(x) \mathbf{I}^{n-s}; \quad r = 0, 1, \dots, m; \quad a_{mn}(x) = 1,$$

wo die $a_{rs}(x)$ beliebige Beiwerte und n eine nicht negative ganze Zahl bezeichnen, so gilt für die Inverse von $\mathbf{A}_m(x)$:

$$(119) \quad \mathbf{A}_m^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + nk_n = k} \frac{(k - k_2 - \dots - (n-1)k_n)!}{k_1! \dots k_n!} \times \\ \times (-a_{m,n-1}(x))^{k_1} \dots (-a_{m0}(x))^{k_n} \mathbf{I}^k,$$

ferner sind

$$(120) \quad \frac{\mathbf{A}_0(0)}{\mathbf{A}_m(0)}, \dots, \frac{\mathbf{A}_0(x-m)}{\mathbf{A}_m(x-m)} \quad (0 = 0, 1, \dots, m-1).$$

Elemente des kommutativen Ringes von Matrizen $[\lambda_{i-j}]$ ($\lambda_{i-j} = 0$ für $i < j$), deren ganze rationale Funktionen, somit auch die Resolventenmatrizen $P_\pi(\mathbf{A}_r)$, $R_\rho(\mathbf{A}_r)$ wie im Polynomring $\Sigma \lambda_k z^k$ über den reellen Zahlen λ_k berechnet werden können.

§ 2. Lösung der Anfangswertaufgaben von gewöhnlichen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Zur Anwendung des Vorangehenden werden wir die explizite Lösung der gewöhnlichen Differenzgleichung

$$(21) \quad \sum_{s=0}^n a_s u(y+s) = c(y) \quad (a_n = 1; y = 0, 1, \dots)$$

mit den Anfangswerten

$$(22) \quad u(\sigma) = u^{(\sigma)}, \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1 \quad (u^{(\sigma)} \text{ vorgegeben})$$

ableiten.

(21) ist — wegen des Bestehens von (21) bei $y = 0, 1, \dots$ — mit dem linearen algebraischen Gleichungssystem gleichwertig:

$$(23) \quad \begin{bmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n) \\ u(n+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(0) - \sum_{\sigma=0}^{n-1} a_\sigma u^{(\sigma)} \\ c(1) - \sum_{\sigma=0}^{n-2} a_\sigma u^{(\sigma+1)} \\ \vdots \\ c(n-1) - a_0 u^{(n-1)} \\ c(n) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Führt man die Matrizen (18) und die Vektoren

$$(24) \quad \mathbf{u} = [u(n+y)] \quad (y = 0, 1, \dots)$$

$$(25) \quad \mathbf{b} = [b(y)] \quad (y = 0, 1, \dots), \quad b(y) = \begin{cases} c(y) - \sum_{\sigma=0}^{n-1-y} a_{\sigma} u^{(\sigma+y)}, & y < n \\ c(y), & y > n-1 \end{cases}$$

ein, so kann (23) in vektorieller Form geschrieben werden:

$$(26) \quad \left(\sum_{s=0}^n a_s \mathbf{I}^{n-s} \right) \mathbf{u} = \mathbf{b},$$

woraus

$$(27) \quad \mathbf{u} = \left(\sum_{s=0}^n a_s \mathbf{I}^{n-s} \right)^{-1} \mathbf{b}$$

folgt. Nach (118)—(119) gilt aber

$$(28) \quad \left(\sum_{s=0}^n a_s \mathbf{I}^{n-s} \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \mathbf{I}^k$$

$$\lambda_k = \sum_{k_1 + \dots + n k_n = k} \frac{(k - k_2 - \dots - (n-1) k_n)!}{k_1! \dots k_n!} (-a_{n-1})^{k_1} \dots (-a_0)^{k_n},$$

wo k_1, \dots, k_n nicht negative ganze Zahlen sind. Somit haben wir als Lösung des Problems (21)—(22):

$$(29) \quad u(y) = \mathbf{e}_{y-n+1}^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \mathbf{I}^k \right) \mathbf{b} = [\lambda_{y-n}, \lambda_{y-n-1}, \dots, \lambda_0] \begin{bmatrix} c(0) - \sum_{\sigma=0}^{n-1} a_{\sigma} u^{(\sigma)} \\ c(1) - \sum_{\sigma=0}^{n-2} a_{\sigma} u^{(\sigma+1)} \\ \vdots \\ c(n-1) - a_0 u^{(n-1)} \\ \vdots \\ c(y-n) \end{bmatrix},$$

wo \mathbf{e}_i den i -te Basisspaltenvektor, d. h.

$$(210) \quad \mathbf{e}_i^* = [\overset{1}{0} \dots 0 \overset{i}{1} 0 \dots] \quad (i = 1, 2, \dots)$$

bedeutet, oder nach einer Umformung

$$u(y) = \sum_{\pi=0}^{y-n} \lambda_{y-n-\pi} c(\pi) - \sum_{\sigma=0}^{n-1} (\lambda_{y-n} a_{\sigma} + \lambda_{y-n-1} a_{\sigma-1} + \dots + \lambda_{y-n-\sigma} a_0) u^{(\sigma)}, y < n-1. \quad (211)$$

§ 3. Reduktion der Anfangswertaufgaben von partiellen Differenzgleichungen mit Koeffizienten, die von einer Veränderlichen unabhängig sind, zu denen der gewöhnlichen Gleichungen

Im vorigen Paragraph wurde gezeigt, dass sich die Lösung einer gewöhnlichen Differenzgleichung — falls ihre Koeffizienten Konstanten sind — zu der einer vektoriellen Gleichung mit Matrizenkoeffizienten reduzieren lässt. Seien nun Differenzgleichungen von zwei (oder mehr) Veränderlichen betrachtet, deren Koeffizienten jedoch von einer Veränderlichen (sei y) unabhängig sind. Wir können die dargelegte Methode ohne weiteres auch zu ihrer Lösung überführen, wenn nämlich die anderen Veränderlichen als Parameter behandelt werden. Im Folgenden wird das Reduktionsverfahren — der Einfachheit halber — für den Fall von zwei Veränderlichen durchgeführt. Es sei also die lineare Differenzgleichung m -ter bzw. n -ter Ordnung bezüglich x bzw. y für die Funktion $u(x, y)$ ($x, y = 0, 1, \dots$)

$$(31) \quad \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n a_{rs}(x) u(x+r, y+s) = c(x, y) \quad (a_{mn}(x) = 1)$$

mit den Anfangsbedingungen gegeben:

$$(32) \quad u(\varrho, y) = u_{\varrho}(y), \quad \varrho = 0, 1, \dots, m-1$$

$$(33) \quad u(x, \sigma) = u^{(\sigma)}(x), \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1$$

$$(34) \quad u_{\varrho}(\sigma) = u^{(\sigma)}(\varrho).$$

Hier stellen $u_{\varrho}(y)$ und $u^{(\sigma)}(x)$ vorgeschriebene Funktionen von x und y dar, die noch der Kompatibilitätsbedingung (34) genügen. (31) und (33) sind — wegen des Bestehens von (31) bei $y = 0, 1, \dots$ — mit dem linearen algebraischen Gleichungssystem vom Parameter x , gültig für die Unbekannten $u(x+r, n)$, $u(x+r, n+1)$, \dots gleichwertig:

$$(35) \quad \sum_{r=0}^m \begin{bmatrix} a_{rn}(x) & 0 & 0 & \dots \\ a_{r,n-1}(x) & a_{rn}(x) & 0 & \dots \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r0}(x) & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x+r, n) \\ u(x+r, n+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c(x, 0) \\ c(x, 1) \\ \vdots \\ c(x, n-1) \\ c(x, n) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} - \sum_{r=0}^m \begin{bmatrix} \sum_{\sigma=0}^{n-1} a_{r\sigma}(x) u^{(\sigma)}(x+r) \\ \sum_{\sigma=0}^{n-2} a_{r\sigma}(x) u^{(\sigma+1)}(x+r) \\ \vdots \\ a_{r0}(x) u^{(n-1)}(x+r) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Führt man die Matrizen (18) und die Vektoren

$$(36) \quad \mathbf{u}(x+r) = [u(x+r, n+y)] \quad (y=0, 1, \dots)$$

$$(37) \quad \mathbf{b}(x) = [b(x, y)] \quad (y=0, 1, \dots), \quad b(x, y) =$$

$$= \begin{cases} c(x, y) - \sum_{r=0}^m \sum_{\sigma=0}^{n-1-y} a_{r\sigma}(x) u^{(\sigma+y)}(x+r), & y < n \\ c(x, y) & , \quad y > n-1 \end{cases}$$

ein, so kann (35) in einer vektoriellen Form geschrieben werden:

$$(38) \quad \sum_{r=0}^m \left(\sum_{s=0}^n a_{rs}(x) \mathbf{I}^{n-s} \right) \mathbf{u}(x+r) = \mathbf{b}(x) \quad (a_{mn}(x) = 1).$$

Die zu der gewöhnlichen vektoriellen Differenzengleichung (38) gehörigen Anfangsbedingungen sind gemäss (32)

$$(39) \quad \mathbf{u}(\varrho) = \mathbf{u}_\varrho = [u(\varrho, n+y)], \quad \varrho = 0, 1, \dots, m-1 \quad (y=0, 1, \dots).$$

Nun, da wir die Lösung von (38) neben (39) nach den Hilfssätzen I und II schon ausführlich besprochen haben, bleibt also nichts anderes übrig, als aus der vektoriellen Lösung die Lösung des Problems (31)—(32)—(33)—(34) aufzuschreiben:

$$(310) \quad u(x, y) = \mathbf{e}_{y-n+1}^* \left\{ \sum_{\pi=0}^{x-m} P_\pi(\mathbf{A}_r) \mathbf{b}(\pi) + \sum_{\varrho=0}^{m-1} R_\varrho(\mathbf{A}_r) \mathbf{u}_\varrho \right\}; \quad x > m-1, \quad y > n-1.$$

Bemerkung: Das Reduktionsverfahren führt zu einer gewöhnlichen Differenzengleichung mit von x unabhängigen (also konstanten) Koeffizienten dann und nur dann, falls die $a_{rs}(x)$ in (31) solche gewesen sind.

§ 4. Eine Anwendung: Lösung eines partiellen Differenzgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten

Bei der mathematischen Behandlung der chemischen fraktionierten Verteilung [1] ergab sich das partielle Gleichungssystem (Gleichung (1) loc. cit., abgesehen von den Bezeichnungen):

$$(41) \quad v(x+1, y+1) = (1-f)w(x, y+1) + gv(x, y)$$

$$(42) \quad w(x+1, y+1) = fw(x, y+1) + (1-g)v(x, y),$$

wo f und g Konstanten bezeichnen und die folgenden Anfangsbedingungen gelten:

$$(43) \quad v(0, y) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 0, & y > 0 \end{cases}; \quad v(x, 0) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$(44) \quad w(0, y) = 0 \quad ; \quad w(x, 0) = 0.$$

Das Gleichungssystem (41)–(42) ist in Gleichungen, bestehend allein für v bzw. w , zu zerlegen:

$$(45) \quad v(x+2, y+1) - fv(x+1, y+1) - gv(x+1, y) - hv(x, y) = 0$$

$$(46) \quad w(x+2, y+1) - fw(x+1, y+1) - gw(x+1, y) - hw(x, y) = 0$$

$$(h = 1 - f - g).$$

v erfüllt die Bedingung (43) und

$$(47) \quad v(1, y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ g, & y = 1 \\ 0, & y > 1 \end{cases}$$

sowie w die Bedingung (44) und

$$(48) \quad w(1, y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ 1 - g, & y = 1. \\ 0 & y > 1 \end{cases}$$

Da die Gleichungen (45) und (46) gleicher Gestalt sind, kann die gemeinsame Veränderliche $u(x, y)$ eingeführt werden, damit wurde uns die Aufgabe gestellt, die Differenzgleichung

$$(49) \quad u(x+2, y+1) - fu(x+1, y+1) - gu(x+1, y) - hu(x, y) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(410) \quad u(0, y) = u_0(y) = \begin{cases} \alpha, & y = 0 \\ 0, & y > 0 \end{cases}; \quad u(1, y) = u_1(y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \beta, & y = 1; \\ 0, & y > 1 \end{cases}$$

$$u(x, 0) = u^{(0)}(x) = \begin{cases} \alpha, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

zu lösen, wo die Relationen

$$(411) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = g \end{array} \right\} \text{ wenn } u = v \text{ bzw. } \left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 1 - g \end{array} \right\} \text{ wenn } u = w$$

gelten. Die Lösung von (49)–(410) ist auf die der gewöhnlichen Gleichung

$$(412) \quad u(x+2) + a_1 u(x+1) + a_0 u(x) = b(x); \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1$$

zurückzuführen (s. (211)):

$$(413) \quad u(x) = \sum_{\pi=0}^{x-2} \lambda_{x-2-\pi} b(\pi) - (\lambda_{x-2} a_0) u_0 - (\lambda_{x-2} a_1 + \lambda_{x-3} a_0) u_1$$

$$(414) \quad \lambda_k = \sum_{k_1+2k_2=k} \frac{(k-k_2)!}{k_1! k_2!} (-a_1)^{k_1} (-a_0)^{k_2} = \sum_{k_2} \binom{k-k_2}{k_2} (-a_1)^{k-2k_2} (-a_0)^{k_2},$$

wo \sum_{k_2} bedeutet, daß in der Summierung nur die Werte $k_2 \geq 0$ mit $k - 2k_2 \geq 0$ berücksichtigt werden. Berücksichtigt man, daß $\lambda_{x-2}(-a_0)$ ($x = 2, 3, \dots$) die Lösung von (412) (nämlich im Falle $u_0 = 1, u_1 = b(x) = 0$) darstellt und so die Identität

$$(415) \quad -\lambda_{x-1} = a_1 \lambda_{x-2} + a_0 \lambda_{x-3}, \quad x = 3, 4, \dots$$

— wie es leicht zu sehen, auch für $x = 2$ — besteht, so läßt sich (413) noch in eine einfachere Form bringen:

$$(416) \quad u(x) = \sum_{\pi=0}^{x-2} \lambda_{x-2-\pi} b(\pi) - \lambda_{x-2} a_0 u_0 + \lambda_{x-1} u_1, \quad x = 2, 3, \dots$$

Nach dem Reduktionsverfahren setzt man

$$(417) \quad \mathbf{A}_0 = -h\mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_1 = -(f\mathbf{I}^0 + g\mathbf{I});$$

$$(418) \quad \mathbf{b}(x) = [b(x, y)], \quad b(x, y) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{r=0}^2 a_{r0} u^{(0)}(x+r) = \begin{cases} h\alpha, & x=0 \\ 0, & x>0 \end{cases}, & y=0 \\ 0, & y>0 \end{cases}$$

(also nach Einführung des Basisspaltenvektors \mathbf{e}_1)

$$(419) \quad \mathbf{b}(x) = \begin{cases} h\alpha \mathbf{e}_1, & x=0; \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

$$(420) \quad \mathbf{u}_0 = [u(0, y+1)] = 0,$$

$$(421) \quad \mathbf{u}_1 = [u(1, y+1)] = \beta \mathbf{e}_1.$$

Die Lösung unserer Aufgabe ergibt sich mithin nach (310) und (416):

$$(422) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \mathbf{e}_y^* \{P_0(\mathbf{A}_r) \mathbf{b}(0) + R_1(\mathbf{A}_r) \mathbf{u}_1\} = \\ &= \mathbf{e}_y^* \{h \alpha P_0(\mathbf{A}_r) + \beta R_1(\mathbf{A}_r)\} \mathbf{e}_1; \quad x > 1, y > 0 \end{aligned}$$

wo

$$(423) \quad P_0(\mathbf{A}_r) = \sum_l \binom{x-2-l}{l} (h\mathbf{I})^l (f\mathbf{I}^0 + g\mathbf{I})^{x-2-2l} \quad (x-2-2l \geq 0)$$

$$(424) \quad R_1(\mathbf{A}_r) = \sum_l \binom{x-1-l}{l} (h\mathbf{I})^l (f\mathbf{I}^0 + g\mathbf{I})^{x-1-2l} \quad (x-1-2l \geq 0).$$

Setzt man nun

$$(425) \quad \Lambda(k) = [\lambda_{i-j}(k)] = \sum_l \binom{k-l}{l} (h\mathbf{I})^l (f\mathbf{I}^0 + g\mathbf{I})^{k-2l} \quad (k-2l \geq 0),$$

so sind $P_0(\mathbf{A}_r) = \Lambda(x-2)$ und $R_1(\mathbf{A}_r) = \Lambda(x-1)$, wo sich die Matrizen-elemente $\lambda_{i-j}(k)$ nach dem binomischen Lehrsatz bestimmen lassen:

$$(426) \quad \Lambda(k) = [\lambda_{i-j}(k)] = \sum_l \binom{k-l}{l} f^{k-2l} h^l \left(\sum_{v=0}^{k-2l} \binom{k-2l}{v} \left(\frac{g}{f} \right)^v \mathbf{I}^{l+v} \right).$$

Mit der Bezeichnung

$$(427) \quad l + v = n, \text{ d. h. } v = n - l$$

wird der Beiwert von \mathbf{I}^n ($n = 0, 1, \dots$)

$$(428) \quad \lambda_n(k) = \sum_l \binom{k-l}{l} f^{k-2l} h^l \binom{k-2l}{n-l} \left(\frac{g}{f} \right)^{n-l},$$

oder unter Anwendung von

$$(429) \quad \binom{k-l}{l} \binom{k-2l}{n-l} = \binom{n}{l} \binom{k-l}{n}$$

ergibt sich

$$(430) \quad \lambda_n(k) = \sum_l \binom{n}{l} \binom{k-l}{n} f^{k-2l} h^l \left(\frac{g}{f} \right)^{n-l} = f^k \left(\frac{g}{f} \right)^n \sum_l \binom{n}{l} \binom{k-l}{n} \left(\frac{h}{gf} \right)^l.$$

Endlich gelangt man nach (422) zur Lösung von (49)–(410) wie folgt:

$$u(x, y) = \mathbf{e}_y^* \{h \alpha [\lambda_{i-j}(x-2)] + \beta [\lambda_{i-j}(x-1)]\} \mathbf{e}_1 = h \alpha \lambda_{y-1}(x-2) + \beta \lambda_{y-1}(x-1) =$$

$$(431) \quad \begin{aligned} &= \alpha h f^{x-2} \left(\frac{g}{f} \right)^{y-1} \sum_{(x-2-2l \geq 0)} \binom{y-1}{l} \binom{x-2-l}{y-1} \left(\frac{h}{gf} \right)^l + \\ &+ \beta f^{x-1} \left(\frac{g}{f} \right)^{y-1} \sum_{(x-1-2l \geq 0)} \binom{y-1}{l} \binom{x-1-l}{y-1} \left(\frac{h}{gf} \right)^l; \quad x > 1, y > 0 \end{aligned}$$

(Eingegangen 4. November, 1958.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] MEDGYESSY, P.—RÉNYI, A.—TETTAMANTI, K.—VINCE, I.: „Mathematische Diskussion der chemischen fraktionierten Verteilung im Falle einer nicht vollständigen Diffusion“ (Ungarisch). *Publications de l'Institut des Mathématiques Appliquées de l'Académie des Sciences de Hongrie* **3** (1954) 81—97.
- [2] JORDAN, CH.: *Calculus of finite differences*. Budapest, 1939.
- [3] RÉDEI, L.: *Algebra I*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
- [4] GELFAND, I. M.: *Előadások a lineáris algebraról*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

А. РЕТНО

Резюме

В работе показывается применение матричного исчисления к решению задачи Коши для линейных уравнений в конечных (обычно частных) разностях в случаях, когда коэффициенты не зависят от одной переменной. Сначала получается явное решение обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами (§ 2), после чего даётся конструктивный метод, с помощью которого решение уравнения в частных разностях может быть определено, если известно общее решение обыкновенных уравнений (вообще с переменными коэффициентами) (§ 3). В § 4 в качестве примера рассматривается явное решение задачи Коши одной системы уравнений с частными разностями и постоянными коэффициентами, встречающейся в одной проблеме химии.

В решениях используются лишь элементарные средства матричного исчисления и тот факт, что в коммутативном кольце треугольных матриц $[\lambda_{i-j}]$ ($\lambda_{i-j} = 0, i < j; i, j = 1, 2, \dots$) справедливы те же правила, что и в кольце многочленов $\sum \lambda_k z^k$ над вещественными числами и что в случае $\lambda_0 \neq 0$ эти матрицы обратимы и обратные матрицы также являются элементами кольца (§ 1).

ON CYCLIC EQUATIONS

by

J. ACZÉL, M. GHERMANESCU and M. HOSSZÚ

In this paper we consider the functional equation

$$(1) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p) + F(x_2, x_3, \dots, x_p, x_{p+1}) + \dots + \\ + F(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \dots, x_{n-1}, x_n) + F(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \dots, x_n, x_1) + \dots + \\ + F(x_n, x_1, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) = 0,$$

where $p \leq n$ are two arbitrary positive integers, $x_i \in S$ are independent variables and the values of the function F lie in a module, i.e. in an additive abelian group M . We do not impose any restriction upon the set S and we suppose only that M be a module in which for every positive integer $m \leq n$ the equation $mX = A$ has a unique solution $X = A/m$.

In certain particular cases (1) was solved by elementary methods ([4], [1], [2]). Here we give equally elementary methods for solving (1) in every possible case.

1. Let first be $p = n$.

$$(2) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) + F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) + \dots + \\ + F(x_{n-1}, x_n, x_1, \dots, x_{n-3}, x_{n-2}) + F(x_n, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) = 0.$$

Then

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = -F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) - \\ - F(x_3, x_4, \dots, x_1, x_2) - \dots - F(x_n, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})$$

and

$$n F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) + \\ + F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - F(x_3, x_4, \dots, x_1, x_2) + \dots + \\ + F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - F(x_n, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) = \\ = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) + \\ + F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) + \\ + F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) - F(x_3, x_4, \dots, x_1, x_2) + \\ + F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) + \\ + F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) - F(x_3, x_4, \dots, x_1, x_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + F(x_3, x_4, \dots, x_1, x_2) - F(x_4, x_5, \dots, x_2, x_3) + \dots + \\
& + F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) + \\
& + F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) - F(x_3, x_4, \dots, x_1, x_2) + \dots + \\
& + F(x_{n-1}, x_n, \dots, x_{n-3}, x_{n-2}) - F(x_n, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}).
\end{aligned}$$

By denoting the sum of members with positive sign by ${}_n G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (from ${}_n G = A$ G can be uniquely determined) we have

$$(3) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - G(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1).$$

On the other hand every function of the form (3) satisfies the equation (2) and thus we have (cf. [2]) the

Theorem 1. (3) is the most general solution of the functional equation (2). We remark that the same consideration shows also that

$$F(x) = G(x) - G(Cx)$$

is the general solution of the functional equation

$$F(x) + F(Cx) + \dots + F(C^{n-1}x) = 0$$

where x is element of an arbitrary set, C is a cyclic operator with period n ($C^n x = x$) defined on this set and the values of the function F lie in a module in which the equation $nX = A$ has a unique solution (cf. [3]).

2. Now we take $n \geq 2p - 1$ and write (1) in more detail

$$\begin{aligned}
(4) \quad & F_p(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p) + F_p(x_2, x_3, \dots, x_p, x_{p+1}) + \dots + \\
& + F_p(x_p, x_{p+1}, \dots, x_{2p-2}, x_{2p-1}) + F_p(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{2p-1}, x_{2p}) + \dots + \\
& + F_p(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \dots, x_{n-1}, x_n) + F_p(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \dots, x_n, x_1) + \dots + \\
& + F_p(x_n, x_1, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) = 0.
\end{aligned}$$

We keep the variables $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ constants and carry all members of (4) except $F_p(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p)$ on the right hand side. Thus we have there $p - 1$ members depending only upon $x_2, x_3, \dots, x_{p-1}, x_p$ and $n - p$ members depending only upon $x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}$:

$$\begin{aligned}
(5) \quad & F_p(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p) = H(x_2, x_3, \dots, x_{p-1}, x_p) + \\
& + G(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}).
\end{aligned}$$

Putting this back into (4) we have

$$\begin{aligned}
& G(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) + H(x_2, x_3, \dots, x_{p-1}, x_p) + \\
& + G(x_2, x_3, \dots, x_{p-1}, x_p) + H(x_3, x_4, \dots, x_p, x_{p+1}) + \dots + \\
& + G(x_n, x_1, \dots, x_{p-3}, x_{p-2}) + H(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) = 0
\end{aligned}$$

or by denoting

$$\begin{aligned}
(6) \quad & F_{p-1}(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) = G(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) + \\
& + H(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1})
\end{aligned}$$

we arrive at

$$F_{p-1}(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) + F_{p-1}(x_2, x_3, \dots, x_{p-1}, x_p) + \dots + \\ + F_{p-1}(x_n, x_1, \dots, x_{p-3}, x_{p-2}) = 0.$$

We observe that this is an equation of the form (4) with $p-1$ instead of p . For $p=1$ this equation is

$$F_1(x_1) + F_1(x_2) + \dots + F_1(x_n) = 0$$

this involves

$$(7) \quad F_1(x) = 0$$

(by keeping x_2, \dots, x_n constant $F_1(x) = C$ and from $nC = 0$, by our supposition on the unique solution of $nX = A$ in M , $C = 0$ follows). We prove that

$$(8) \quad F_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = G_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}) - \\ - G_k(x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k).$$

By (7) this holds for $k=1$ and if it is true for $k=p-1$ it holds for $k=p$ too. In fact, if

$$F_{p-1}(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) = G_{p-1}(x_1, x_2, \dots, x_{p-3}, x_{p-2}) - \\ - G_{p-1}(x_2, x_3, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}),$$

then by (6) and denoting

$$G_p(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) = G(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) + G_{p-1}(x_2, x_3, \dots, x_{p-2}, x_{p-1})$$

we have

$$H(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) = -G(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) + \\ + G_{p-1}(x_1, x_2, \dots, x_{p-3}, x_{p-2}) - G_{p-1}(x_2, x_3, \dots, x_{p-2}, x_{p-3}) = \\ = G_{p-1}(x_1, x_2, \dots, x_{p-3}, x_{p-2}) - G_p(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1})$$

and by (5)

$$(9) \quad F_p(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p) = G_p(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) - \\ - G_p(x_2, x_3, \dots, x_{p-1}, x_p)$$

i.e. (8) remains valid for $k=p$, qu. e. d. Thus we have proved that every solution of (4) is of the form (9).

On the other hand every function of the form (9) satisfies the equation (4). Thus we have the

Theorem 2. (9) is the most general solution of the functional equation (4) ($n \geq 2p-1$).

3. Now we consider the cases $p < n < 2p-1$ and prove the following

Theorem 3. The most general solution of the functional equation (1) is for $p < n < 2p-1$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p) = & \\
 & G_0(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) - G_0(x_2, x_3, \dots, x_{p-1}, x_p) + \\
 & + \sum_{k=1}^{[(2p-n)/2]} [G_k(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{n-p+k+1}, \dots, x_{p-1}, x_p) - \\
 & - G_k(x_{p-k+1}, x_{p-k+2}, \dots, x_p, x_1, \dots, x_{2p-n-k})].
 \end{aligned}$$

For sake of better understanding we effectuate the proof in the case $n = 4$, $p = 3$ but in a manner valid also in the general case. Thus we prove that

$$(11) \quad F(x_1, x_2, x_3) = G_0(x_1, x_2) - G_0(x_2, x_3) + G_1(x_1, x_3) - G_1(x_3, x_1)$$

is the most general solution of the functional equation

$$(12) \quad F(x_1, x_2, x_3) + F(x_2, x_3, x_4) + F(x_3, x_4, x_1) + F(x_4, x_1, x_2) = 0.$$

In fact, put $x_4 = c$ in (12):

$$(13) \quad F(x_1, x_2, x_3) + F(x_2, x_3, c) + F(x_3, c, x_1) + F(c, x_1, x_2) = 0.$$

We see that here already all members except $F(x_1, x_2, x_3)$ depend only from two ($< p$) variables. By adding members of the form of the right-hand side of (11) (we will call expressions of this form *G-expressions*) we can change these latter members into such ones, where the x_i -s if not kept constant stand just on the i -th places in the function F :

$$\begin{aligned}
 & F(x_1, x_2, x_3) + F(x_1, x_2, c) + F(x_1, c, x_3) + F(c, x_2, x_3) + \\
 & + F(x_2, x_3, c) + F(x_3, c, x_1) + F(c, x_1, x_2) - \\
 & - F(x_1, x_2, c) - F(x_1, c, x_3) - F(c, x_2, x_3) = 0
 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
 (14) \quad F(x_1, x_2, x_3) = & G_0^1(x_1, x_2) - G_0^1(x_2, x_3) + G_1^1(x_1, x_3) - G_1^1(x_3, x_1) - \\
 & - [F(x_1, x_2, c) + F(x_1, c, x_3) + F(c, x_2, x_3)],
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 (15) \quad G_0^1(x_1, x_2) = & F(x_1, x_2, c) - F(c, x_1, x_2), \\
 G_1^1(x_1, x_3) = & F(x_1, c, x_3).
 \end{aligned}$$

In order to reduce the members $F(x_1, x_2, c) + F(x_1, c, x_3) + F(c, x_2, x_3)$ in (14) which have not yet the form of *G-expressions* into functions of less variables (here already only one variable) we put $x_3 = c$ resp. $x_2 = c$ resp. $x_1 = c$ into (13) and get

$$\begin{aligned}
 & F(x_1, x_2, c) + F(x_2, c, c) + F(c, c, x_1) + F(c, x_1, x_2) = 0, \\
 & F(x_1, c, x_3) + F(c, x_3, c) + F(x_3, c, x_1) + F(c, x_1, c) = 0, \\
 & F(c, x_2, x_3) + F(x_2, x_3, c) + F(x_3, c, c) + F(c, c, x_2) = 0.
 \end{aligned}$$

We apply the same way of transformations to these equations by which we got (14) from (13):

$$\begin{aligned}
 & F(x_1, x_2, c) + F(x_1, c, c) + F(c, c, x_3) + F(c, x_2, x_3) + \\
 & \quad + F(x_2, c, c) + F(c, c, x_1) + F(c, x_1, x_2) - \\
 & \quad - F(x_1, c, c) - F(c, c, x_3) - F(c, x_2, x_3) = 0, \\
 & F(x_1, c, x_3) + F(c, x_2, c) + F(x_1, c, x_3) + F(c, x_2, c) + \\
 & \quad + F(c, x_3, c) + F(x_3, c, x_1) + F(c, x_1, c) - \\
 & \quad - F(c, x_2, c) - F(x_1, c, x_3) - F(c, x_2, c) = 0, \\
 & F(c, x_2, x_3) + F(x_1, x_2, c) + F(x_1, c, c) + F(c, c, x_3) + \\
 & \quad + F(x_2, x_3, c) + F(x_3, c, c) + F(c, c, x_2) - \\
 & \quad - F(x_1, x_2, c) - F(x_1, c, c) - F(c, c, x_3) = 0.
 \end{aligned}$$

In the equation obtained by adding the last three equations there will figure besides the requested members $F(x_1, x_2, c) + F(x_1, c, x_3) + F(c, x_2, x_3)$ only G -expressions and functions depending on only one variable:

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & 2 [F(x_1, x_2, c) + F(x_1, c, x_3) + F(c, x_2, x_3) + \\
 & \quad + F(x_1, c, c) + F(c, x_2, c) + F(c, c, x_3)] = \\
 & = G_0^2(x_1, x_2) - G_0^2(x_2, x_3) + G_1^2(x_1, x_3) - G_1^2(x_3, x_1),
 \end{aligned}$$

where

$$(17) \quad \begin{cases} G_0^2(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, c) - F(c, x_1, x_2) + F(x_1, c, c) - F(c, x_1, c) + \\ \quad + F(c, x_2, c) - F(c, c, x_2), \\ G_1^2(x_1, x_3) = F(x_1, c, x_3) + F(x_1, c, c) + F(c, c, x_3). \end{cases}$$

By our supposition on the solvability of $mX = A$ ($m = 2$) we can write over (16) as follows:

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & F(x_1, x_2, c) + F(x_1, c, x_3) + F(c, x_2, x_3) = \\
 & = \frac{1}{2} [G_0^2(x_1, x_2) - G_0^2(x_2, x_3) + G_1^2(x_1, x_3) - G_1^2(x_3, x_1)] - \\
 & - [F(x_1, c, c) + F(c, x_2, c) + F(c, c, x_3)].
 \end{aligned}$$

Finally we apply the same transformation process as before upon the last bracket of (18). We put into (13) $x_2 = x_3 = c$ resp. $x_1 = x_3 = c$ resp. $x_1 = x_2 = c$ and get

$$(19) \quad \begin{cases} F(x_1, c, c) + F(c, c, c) + F(c, c, x_1) + F(c, x_1, c) = 0, \\ F(c, x_2, c) + F(x_2, c, c) + F(c, c, c) + F(c, c, x_2) = 0, \\ F(c, c, x_3) + F(c, x_3, c) + F(x_3, c, c) + F(c, c, c) = 0. \end{cases}$$

We remark that (13) with $x_1 = x_2 = x_3 = c$ implies

$$4 F(c, c, c) = 0$$

and by the uniqueness of the solution of $nX = A$ ($n = 4$)

$$F(c, c, c) = 0.$$

Taking this into account we write the equations (19) in the form transformed with G -expressions and add them:

$$(20) \quad 3[F(x_1, c, c) + F(c, x_2, c) + F(c, c, x_3)] = \\ = G_0^3(x_1, x_2) - G_0^3(x_2, x_3) + G_1^3(x_1, x_3) - G_1^3(x_3, x_1),$$

where

$$(21) \quad \begin{cases} G_0^3(x_1, x_2) = F(x_1, c, c) - F(c, x_1, c) + F(c, x_2, c) - F(c, c, x_2), \\ G_1^3(x_1, x_3) = F(x_1, c, c) + F(c, c, x_3). \end{cases}$$

We divide (20) by 3 ($3X = A$ has a unique solution), we put this into (18) and substitute finally the equation thus obtained into (14) to arrive at last to

$$(11) \quad F(x_1, x_2, x_3) = G_0(x_1, x_2) - G_0(x_2, x_3) + G_1(x_1, x_3) - G_1(x_3, x_1)$$

where

$$G_i = G_i^1 - G_i^2/2 + G_i^3/3 \quad (i = 0, 1)$$

G_i^j ($i = 0, 1$; $j = 1, 2, 3$) being the functions defined in (15), (17), (21).

Thus we have proved that (12) implies (11). On the other hand one verifies immediately that every function of the form (11) satisfies the equation (12). So it is in the general case $p < n < 2p - 1$ too and thus Theorem 3 is proved.

The reader may remark that we did not use in this proof the equation (12) in its full generality only the particular case $x_4 = c$ (13) of it. This is so in the general case too: in order to get the solution (10) it is enough to suppose the validity of the functional equation (1) for one special constant value c of the variables $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{n-1}, x_n$, while $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p$ vary and our result (10) shows that then (1) remains valid also for independently variable $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n$.

We remark that also Theorem 2 can be proved by the same method by which we proved Theorem 3. On the other hand the methods applied to prove Theorems 1 and 2 can also be applied to prove the special cases of Theorem 3, moreover in these considerations (cf. 1, 2) the existence of a unique solution of $mX = A$ is needed only for $m = n$.

(Received October 27, 1959.)

REFERENCES

- [1] GHERMANESCU, M.: „Sur quelques équations fonctionnelles linéaires.” *Bulletin Soc. Math. France* **68** (1940) 109–128.
- [2] GHERMANESCU, M.: „O clasa de ecuații funcționale.” *Pozitiva* **1** (1940) 121–125.
- [3] GHERMANESCU, M.: „Ecuații funcționale cu argument funcțional n -periodic.” *Acad. R. P. Romine Buletin ști. mat. fiz.* **9** (1957) 43–78.
- [4] SINZOW, D. M.: „Über eine Funktionalgleichung.” *Archiv der Math. und Physik* **6** (1903) 216–217.

О ЦИКЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

J. ACZÉL, M. GHERMANESCU и M. HOSSZÚ

Резюме

Работа занимается решением функционального уравнения (1), где переменные являются элементами любого множества, а значения функции элементы такого модуля, где уравнения вида $mX = A$ при любых натуральных m , не превосходящих n , имеют единственное решение X . Наиболее общее решение (без всяких условий регулярности) имеет вид (3), (9) или (10), в зависимости от того, будет ли $p = n$, $n \geq 2p - 1$ или $p < n < 2p - 1$. В этих трех случаях фигурируют и разные доказательства, хотя некоторые из них могут быть применены и в других случаях.

SUR UN ÉTAT PSEUDO-STATIONNAIRE INTERVENANT DANS LA THÉORIE DU MÉLANGE

par
G. ADLER

§ 1. Introduction

M. A. RÉNYI s'occupe dans son travail [2] de la détermination de la partie d'une matière s'écoulant à travers un réservoir, resp. à travers un système de réservoirs couplés en série, qui passe dans le réservoir, resp. dans le système de réservoirs un temps plus court qu'une durée donnée. M. A. RÉNYI résout le problème à l'aide du calcul des probabilités. Mais il examine le processus du mélange stationnaire, en faisant abstraction de la période initiale se réalisant au commencement du mélange.

Dans ce travail nous résolvons le problème discuté par M. A. RÉNYI à l'aide de la théorie des équations aux dérivées partielles, dans une forme plus générale. Il résultera de notre solution que dans le problème spécial considéré par M. A. RÉNYI on rencontre un cas extraordinairement surprenant et tout à fait propre aux processus initiaux, à savoir, immédiatement après le commencement du mélange il se produit un état stationnaire dans un certains sens. Cet état stationnaire, nous l'appellerons pseudo-stationnaire.

§ 2. Établissement du problème

La matière pénétrant dans le réservoir T subit une certaine modification qualitative pendant son séjour dans le réservoir, modification qui peut être caractérisée par une fonction strictement monotone du temps passé dans le réservoir. Nous l'expérimons de telle manière que la matière est assujettie dans le réservoir à un „vieillissement” continu. Étant donné que la fonction caractérisant la modification qualitative est une fonction strictement monotone, on peut caractériser la qualité des parties respectives de la matière simplement par le temps passé dans le réservoir, par „l'âge” de la partie considérée. Donc la matière ne vieillit que pendant son séjour dans le réservoir, en dehors du réservoir son âge ne varie pas.

Nous désignons le temps par t , l'âge de la matière par τ . Naturellement τ ne peut pas être négative.

Dans le réservoir au moment initial $t = 0$ il se trouve une quantité V_0 de matière d'âge $\tau = 0$. Au moment t on introduit dans le réservoir durant le temps dt la quantité $v(t) dt$, resp. on en retire la quantité de matière $w(t) dt$.

Soient

$$a(t, \tau) = \frac{\text{la quantité de la matière d'âge } \geq \tau \text{ introduite par unité de temps}}{\text{la quantité totale de la matière introduite par unité de temps}},$$

$$b(t, \tau) = \frac{\text{la quantité de la matière d'âge } \geq \tau \text{ retirée par unité de temps}}{\text{la quantité totale de la matière retirée par unité de temps}}$$

et finalement

$$A(t, \tau) = \frac{\text{la quantité de la matière d'âge } \geq \tau \text{ se trouvant dans le réservoir}}{\text{la quantité totale de la matière se trouvant dans le réservoir}}$$

L'équation engendrant le processus du mélange peut se déduire par le raisonnement qui suit: la quantité de la matière d'âge $\geq \tau + dt$ se trouvant dans le réservoir au moment $t + dt$ est égale à la quantité de matière d'âge $\geq \tau$ se trouvant dans le réservoir au moment t , augmentée resp. diminuée de la quantité de matière d'âge $\geq \tau + dt$ introduite resp. retirée pendant la durée dt :

$$\begin{aligned} V(t + dt) A(t + dt, \tau + dt) &= \\ &= V(t) A(t, \tau) + a(t, \tau + dt) v(t) dt - b(t, \tau + dt) w(t) dt, \end{aligned}$$

où $V(t)$ signifie la quantité totale de la matière se trouvant dans le réservoir au moment t :

$$V(t) = V_0 + \int_0^t [v(t) - w(t)] dt.$$

D'ici, après un arrangement et une division par dt , on obtient pour $dt \rightarrow 0$ l'équation cherchée:

$$\frac{\partial}{\partial t}(AV) + \frac{\partial}{\partial \tau}(AV) = a(t, \tau) v(t) - b(t, \tau) w(t).$$

Supposons le mélange idéal, ce qui veut dire que

$$b(t, \tau) = A(t, \tau).$$

Pour simplifier, supposons que $V(t)$ est indépendante du temps: $V(t) \equiv V_0$. Alors notre équation peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(1) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \tau} = [-A(t, \tau) + a(t, \tau)] \frac{v(t)}{V_0}.$$

C'est une équation aux dérivées partielles de premier ordre. La solution $A(t, \tau)$ ne possède de signification physique que dans le quadrant ($t \geq 0, \tau \geq 0$) du plan (t, τ) . Si $a(t, \tau) \equiv 0$ pour $\tau > t$, alors dans la partie satisfaisant à l'inégalité $\tau > t$ de ce quadrant $A(t, \tau) = 0$, parce qu'au moment t il n'existe pas de matière d'âge plus grand que t en aucun lieu. Pourtant dans le reste satisfaisant à l'inégalité $\tau \leq t$ du quadrant ($t \geq 0, \tau \geq 0$), comme on le verra dans le § 2, la solution est univoquement déterminée par la condition

$$A(t, 0) = 1 \quad (t \geq 0).$$

Cette condition exprime que chacune des parties de la matière se trouvant dans le réservoir est d'âge ≥ 0 .

§ 2. Solution du problème

Le système d'équations paramétrique des caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles (1) (voir [1]), en prenant pour paramètre la variable τ , est le suivant:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau} &= 1, \\ \frac{dA}{d\tau} &= [-A + a(t, \tau)] \frac{v(t)}{V_0}.\end{aligned}$$

On obtient de la première équation

$$(3_1) \quad t = \tau + t_0.$$

En le remplaçant dans la seconde équation:

$$\frac{dA}{d\tau} = [-A + a(\tau + t_0, \tau)] \frac{v(\tau + t_0)}{V_0}.$$

D'ici

$$(3_2) \quad A = \left[A_0 + \frac{1}{V_0} \int_0^\tau a(\eta + t_0, \eta) v(\eta + t_0) \cdot e^{\frac{1}{V_0} \int_0^\eta v(x+t_0) dx} d\eta \right] e^{-\frac{1}{V_0} \int_0^\tau v(x+t_0) dx}.$$

Dans l'équation (3₂) la constante d'intégration A_0 peut être déterminée à partir de la condition $A(t, 0) = 1$, et il en résulte

$$A_0 = 1.$$

En exprimant la constante d'intégration t_0 de l'équation (3₁):

$$t_0 = t - \tau,$$

et en la remplaçant dans l'expression (3₂), on en obtient la solution cherchée:

$$(4_1) \quad \begin{aligned} A(t, \tau) = & \left[1 + \frac{1}{V_0} \int_0^\tau a(\eta + t - \tau, \eta) v(\eta + t - \tau) \cdot \right. \\ & \left. \cdot e^{\frac{1}{V_0} \int_0^\eta v(x+t-\tau) dx} d\eta \right] e^{-\frac{1}{V_0} \int_0^\tau v(x+t-\tau) dx} \quad (\tau \leq t). \end{aligned}$$

La fonction $A(t, \tau)$ possède une discontinuité sur la droite $t = \tau$, et comme nous l'avons déjà mentionné, pour $\tau > t$ on a

$$(4_2) \quad A(t, \tau) = 0 \quad (\tau > t).$$

Cette solution devient essentiellement plus simple, si nous l'employons pour le cas spécial discuté par M. A. RÉNYI. Alors

$$a(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{si } \tau > 0 \\ 1, & \text{si } \tau = 0, \end{cases}$$

et

$$v(t) = c \quad (\text{constante}).$$

Dans ce cas on obtient:

$$A(t, \tau) = \begin{cases} e^{-\frac{c}{V_0} \tau}, & \text{si } \tau \leq t \\ 0, & \text{si } \tau > t. \end{cases}$$

Nous avons obtenu le résultat surprenant que la fonction $A(t, \tau)$ est indépendante du temps t dans l'intervalle $0 \leq \tau \leq t$ où elle ne s'annule pas. Donc à chaque moment t_2 la distribution de la matière se trouvant dans le réservoir et ne surpassant pas l'âge $\tau = t_1$ ($t_2 > t_1$) est la même distribution qu'au moment t_1 . Ce résultat peut être aussi interprété d'une autre manière: la quantité de matière d'âge $\geq \tau$, en supposant qu'il existe déjà une telle matière dans le réservoir, est indépendante du temps. Ce phénomène sera appelé état pseudo-stationnaire.

Après cela, nous passons à la discussion du cas où les réservoirs T_1, T_2, \dots, T_r en nombre r sont couplés en série. Le couplage en série signifie que la matière retirée du réservoir T_i sera introduite dans le réservoir T_{i+1} . Les données relatives au réservoir T_i seront indiquées par les notations déjà employées, affectées de l'indice i .

Les réservoirs sont supposés identiques à tous les points de vue, et la matière assujettie à un vieillissement uniforme dans chacun des réservoirs. La matière s'écoulant emporte son âge de réservoir en réservoir et elle devient plus vieille dans chaque réservoir. Ces conditions peuvent se formuler de la manière suivante :

$$\begin{aligned} b_i(t, \tau) &= A_i(t, \tau), \\ a_{i+1}(t, \tau) &= b_i(t, \tau). \end{aligned}$$

Au moment initial $t = 0$ supposons présente une quantité V_0 de matière d'âge $\tau = 0$ dans chaque réservoir. Alors chaque inconnue $A_i(t, \tau)$ peut-être déterminée à l'aide des formules (4), d'une manière telle que dans la détermination de $A_{i+1}(t, \tau)$ la fonction $a_{i+1}(t, \tau)$ soit remplacée par la fonction $a_{i+1}(t, \tau) = A_i(t, \tau)$, déterminée dans la période précédente.

Alimentons le premier réservoir d'une matière d'âge $\tau = 0$, c'est-à-dire soit

$$a_1(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{si } \tau > 0 \\ 1, & \text{si } \tau = 0. \end{cases}$$

Alors en vertu de la formule réursive

$$A_{i+1}(t, \tau) = \begin{cases} \left[1 + \frac{c}{V_0} \int_0^\tau A_i(\eta + t - \tau, \eta) e^{\frac{c}{V_0} \eta} d\eta \right] e^{-\frac{c}{V_0} \tau}, & \text{si } \tau \leq t \\ 0, & \text{si } \tau > t, \end{cases}$$

comme on peut le vérifier à l'aide du raisonnement par récurrence, on obtient:

$$A_n(t, \tau) = \begin{cases} e^{-\frac{c}{V_0}\tau} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{c}{V_0}\tau\right)^i}{i!}, & \text{si } \tau \leq t \\ 0, & \text{si } \tau > t \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots, r).$$

Nous rencontrons de nouveau un cas pseudo-stationnaire: au moment t , dans aucun réservoir, la distribution de la matière d'âge $\leq t$ ne dépend pas du temps t .

Enfin, pour la quantité totale $\mathfrak{A}_r(t, \tau)$ de la matière d'âge $\geq \tau$ se trouvant dans le système de réservoirs en nombre r , on obtient:

$$\mathfrak{A}_r(t, \tau) = V_0 \sum_{n=1}^r A_n(t, \tau) = \begin{cases} V_0 e^{-\frac{c}{V_0}\tau} \sum_{i=0}^{r-1} (r-i) \frac{\left(\frac{c}{V_0}\tau\right)^i}{i!}, & \text{si } \tau \leq t \\ 0, & \text{si } \tau > t. \end{cases}$$

Au cas où $t \rightarrow \infty$, quand la restriction $\tau \leq t$ doit être considérée satisfaite pour chaque valeur τ finie, nos résultats se trouvent conformes aux solutions données par M. A. RÉNYI.

(Reçu le 18 Décembre 1959.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COURANT, R.—HILBERT, D.: *Methoden der Mathematischen Physik*, II. Verlag Springer, Berlin (1937) 51—53.
- [2] RÉNYI A.: „Autoklávok soros és párhuzamos kapcsolásáról és a keverés elméletéről.” *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 4 (1959) 155—165.

О ПСЕВДОСТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ, ВСТРЕЧАЮЩЕМСЯ В ТЕОРИИ СМЕШИВАНИЯ

GY. ADLER

Резюме

Автор занимается решением проблемы исследованной А. RÉNYI в работе [2], в нестационарном случае. Эта проблема следующая: вещество, вступающее в резервуар T , непрерывно „устаревается”. В резервуар в момент t вводится и выводится из него за единицу времени количество $v(t)$ вещества. В начальный момент $t = 0$ в резервуаре находится количество V_0 вещества возраста $\tau = 0$. Пусть

$$a(t, \tau) = \frac{\text{количество вещества введенного в } T \text{ за единицу времени, возраст которого не менее } \tau}{\text{количество всего вещества, введенного в } T \text{ за единицу времени}},$$

$$A(t, \tau) = \frac{\text{количество находящегося в } T \text{ вещества, возраст которого не меньше } \tau}{\text{количество всего находящегося в } T \text{ вещества}}.$$

Пусть в резервуаре смешивание будет идеальным, т. е. введенное в резервуар вещество сразу же равномерно смешивается с находящимся там веществом. Тогда решение проблемы дается формулами (4₁) и (4₂).

В том случае, когда $v(t) = c$ (постоянная) и

$$a(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau > 0 \\ 1, & \text{если } \tau = 0, \end{cases}$$

решение дается формулой

$$A(t, \tau) = \begin{cases} e^{-\frac{c}{V_0} \tau}, & \text{если } \tau \leq t \\ 0, & \text{если } \tau > t. \end{cases}$$

Мы получим неожиданный результат, согласно которому функция $A(t, \tau)$ на отрезке $0 \leq \tau \leq t$, где она не исчезает, не зависит от времени t . Это явление называется псевдостационарным состоянием.

В том случае, когда в ряд включено r резервуаров, во всех отношениях тождественных резервуару T , в полученной таким образом системе скорость протекания вещества снова равна постоянной величине c и во всех резервуарах в момент $t = 0$ имеется по количеству V_0 вещества возраста $\tau = 0$, то для количества вещества $\mathfrak{A}_r(t, \tau)$ в момент t , возраст которого не превосходит τ , получается формула

$$\mathfrak{A}_r(t, \tau) = \begin{cases} e^{-\frac{c}{V_0} \tau} \sum_{i=0}^{r-1} (r-i) \frac{\left(\frac{c}{V_0} \tau\right)^i}{i!}, & \text{если } \tau \leq t \\ 0, & \text{если } \tau > t. \end{cases}$$

И в этом случае речь идет о псевдостационарном состоянии.

ÜBER DIE CHARAKTERISIERBARKEIT PARTIELLER DIFFERENTIAL- GLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG MIT HILFE DER VARIATIONSRECHNUNG

von
F. BALATONI

Einleitung

Es ist eine bekannte Tatsache der Variationsrechnung, daß sich zu mehreren elliptischen und hyperbolischen Differentialgleichungen solche Variationsprobleme finden lassen, deren Eulersche Gleichungen die gegebenen Differentialgleichungen sind. So ist zum Beispiel die Eulersche Gleichung des Variationsproblems

$$\delta \int \int_{(D)} (p^2 + q^2) dx dy = 0,$$

die Laplacesche Gleichung $r + t = 0$, die Eulersche Gleichung des Variationsproblems

$$\delta \int \int_{(D)} (p^2 - q^2) dx dy = 0$$

ist die hyperbolische Gleichung $r - t = 0$.

(Hier und im Weiteren bedeuten $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ und $t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.)

Es ergibt sich natürlicherweise die Frage, welche der parabolischen Differentialgleichungen ähnliche Eigenschaften besitzen.

G. ADLER stellt in [1] die Frage, ob eine in allen Variablen analytische Funktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \not\equiv 0$ existiert, so daß die Eulersche Gleichung des Variationsproblems

$$\delta \int \int_{(D)} f(x, y, u, p, q) dx dy = 0$$

gleich der Gleichung der Wärmeleitung $r = q = 0$ sei. Er zeigt, daß eine solche Funktion f nicht existiert.

Es ergibt sich die Frage, unter welchen Bedingungen ein Variationsproblem

$$(1) \quad \delta \int \int_{(D)} f(x, y, u, p, q) dx dy = 0$$

existiert, so daß seine Eulersche Gleichung gleich der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L = a \cdot r + 2b \cdot s + c \cdot t + G = 0$$

sei. (Hier sind a , b und c Funktionen der Variablen x und y , weiterhin ist G Funktion der Variablen x, y, u, p und q .)

Wenn diese Konstruktion unmöglich ist, so soll die Frage untersucht werden, ob man einen solchen, genügend oft differentierbaren $a = a(x, y, u, p, q)$ Multiplikator finden kann, daß die Eulersche Gleichung von (1) gleich $\alpha L = 0$ sei?

In dieser Arbeit untersuchen wir diese Probleme. Wir beweisen: im Falle einer parabolischen Gleichung existiert kein solcher Multiplikator $\alpha = \alpha(x, y, u, p, q)$ daß man nach Multiplikation der linken Seite der Gleichung mit α die Eulersche Gleichung eines Variationsproblems erhalten würde. Im Falle der elliptischen und hyperbolischen Gleichungen ist es gelungen, ein positives Ergebnis zu erhalten. Wir bestimmen jene Klasse der Gleichungen, zu der man solche Multiplikatoren finden kann.

Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ ist dann und nur dann die Eulersche Gleichung eines Variationsproblems, wenn sie von der Form

$$(2) \quad F = M \cdot (rt - s^2) + R \cdot r + 2S \cdot s + T \cdot t + N$$

ist, wobei M, R, S, T und N nur Funktionen der Variablen x, y, u, p und q sind, sowie die Relationen

$$(3) \quad \begin{aligned} M_x + M_u \cdot p + S_q - T_p &= 0, \\ M_y + M_u \cdot q - R_q + S_p &= 0, \\ R_x + R_u \cdot p + S_y + S_u \cdot q - N_p &= 0, \\ S_x + S_u \cdot p + T_y + T_u \cdot q - N_q &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind (siehe [2]).

Bezeichnen wir die Klasse der nach allen Variablen k -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit C_k . Wir machen die Bedingung, daß $u(x, y) \in C_3$, $F = F(x, y, u, p, q, r, s, t)$ nach den Variablen r, s, t zweimal stetig differenzierbar, sowie F, F_r, F_s, F_t nach x, y, u, p, q einmal stetig differenzierbar seien.

Diese Bedingungen sichern die Stetigkeit allen im obigen Satz vorkommenden Ableitungen.

Bezeichnen wir die Menge jener Funktionen F , für die $F = 0$ eine Eulersche Gleichung ist, mit Q , ($Q \subset C_3$).

Aus dem Invarianzsatz der Eulerschen Gleichung (siehe [3]) folgt, daß sich zur Gleichung

$$(4) \quad L = a \cdot r + 2b \cdot s + c \cdot t + G = 0$$

dann und nur dann ein solcher Multiplikator $\alpha = \alpha(x, y, u, p, q)$ finden läßt, daß $\alpha \cdot L \in Q$ erfüllt ist, wenn sich bei beliebiger Transformation

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \in C_2,$$

wobei

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

besteht, ein Multiplikator $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ finden läßt, so daß $\bar{\alpha} \cdot \bar{L} \in Q$ besteht, wobei \bar{L} die transformierte Gleichung bezeichnet.

§ 1. Negative Ergebnisse

Satz 1. *Es sei die Gleichung (4) parabolisch, das heißt*

$$d = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0, \quad a, b, c, G \in C_1.$$

Es existiert kein Multiplikator $\alpha(x, y, u, p, q)$ so, daß $\alpha \cdot L \in Q$ erfüllt sei.

Beweis. Jede parabolische Differentialgleichung kann auf die kanonische Form $a \cdot r + G = 0$ gebracht werden. Im weiteren genügt es, nur den Fall zu betrachten, wo G von q abhängt. Deshalb bringen wir den Beweis nur für diesen Fall. Multiplizieren wir die Gleichung mit α dann ist $R \cdot r + N = 0$, wobei $R = \alpha \cdot a$ und $N = \alpha \cdot G$ sind.

Untersuchen wir die Bedingungen (3). Aus der zweiten und vierten Gleichung folgt $R_q = 0$ und $N_q = 0$. R und N sind unabhängig von q . So ist wegen $R = \alpha \cdot a$ auch α von q unabhängig, weiterhin wegen $N = \alpha \cdot G$ und $N_q = 0$ $G_q = 0$. In der Differentialgleichung $a \cdot r + G = 0$ treten keine Ableitungen nach y auf. Diesen Fall haben wir jedoch ausgeschlossen. Somit ist der Satz bewiesen.

§ 2. Positive Ergebnisse

Betrachten wir die Differentialgleichung (4) die im Bereich D nicht parabolisch ist. Untersuchen wir, ob ein Multiplikator mit der erwünschten Eigenschaft existiert. Multiplizieren wir (4) mit α . Es sei die so erhaltene Gleichung

$$\alpha a \cdot r + 2 \alpha b \cdot s + \alpha c \cdot t + \alpha \cdot G \equiv R \cdot r + 2 S \cdot s + T \cdot t + N = 0.$$

Aus den ersten zwei Gleichungen von (3) ergibt sich nach einfachen Berechnungen, daß α unabhängig von p und q ist. Aus den anderen zwei Gleichungen von (3) ergibt sich

$$N = R_u \cdot \frac{p^2}{2} + S_u \cdot pq + T_u \cdot \frac{q^2}{2} + \\ + (R_x + S_y) \cdot p + (S_x + T_y) \cdot q + h(x, y, u).$$

Nehmen wir an, daß $\alpha = \alpha(x, y, u) \in C_1$. $\alpha \cdot L = 0$ und $L = 0$ können nur dann äquivalent sein, wenn α nirgends verschwindet. Nehmen wir an, dass

$\alpha > 0$. So existiert $\Omega = \log \alpha \in C_1$, so daß $\Omega_x = \frac{\alpha_x}{\alpha}$, $\Omega_y = \frac{\alpha_y}{\alpha}$ und

$$\Omega_u = \frac{\alpha_u}{\alpha}.$$

Auf diesem Grund ist

$$G = \frac{N}{\alpha} = \left(a \cdot \frac{p^2}{2} + b \cdot pq + c \cdot \frac{q^2}{2} \right) \cdot \Omega_u + \\ + (a_x + a \cdot \Omega_x + b_y + b \cdot \Omega_y) \cdot p + (b_x + b \cdot \Omega_x + c_y + c \cdot \Omega_y) \cdot q + h_1(x, y, u).$$

Nach Einführung der Bezeichnungen

$$A = \Omega_u$$

$$B = a_x + b_y + a \cdot \Omega_x + b \cdot \Omega_y$$

$$C = b_x + c_y + b \cdot \Omega_x + c \cdot \Omega_y$$

kann man aussagen:

Satz 2. Zur Differentialgleichung (4) (wobei $a, b, c, G \in C_1$) läßt sich dann und nur dann ein (positiver) Multiplikator $\alpha = \alpha(x, y, u, p, q) \in C_1$ mit den gewünschten Eigenschaften finden, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. G ist von der Form

$$A \cdot \left(a \cdot \frac{p^2}{2} + b \cdot pq + c \cdot \frac{q^2}{2} \right) + B \cdot p + C \cdot q + h_1(x, y, u)$$

2. Es existiert eine Funktion $\Omega = \Omega(x, y, u) \in C_1$ die den Bedingungen

$$\Omega_u = A$$

$$\Omega_x = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} B - (a_x + b_y) & b \\ C - (b_x + c_y) & c \end{vmatrix}$$

$$\Omega_y = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} a & B - (a_x + b_y) \\ b & C - (b_x + c_y) \end{vmatrix}$$

genügt.

Der Multiplikator, der von p und q unabhängig ist, ist $\alpha = e^\Omega$.

Das zu dieser Differentialgleichung gehörende Variationsproblem ist

$$-S \int \int_{(D)} \alpha \cdot \left(a \cdot \frac{p^2}{2} + b \cdot pq + c \cdot \frac{q^2}{2} + H_1 \right) dx dy = 0,$$

wobei

$$\frac{\partial(H_1 \cdot \alpha)}{\partial u} = -h_1.$$

Ich sage schließlich G. ADLER Dank für den Gedanken des Problems und für seine Unterstützung bei der Ausarbeitung.

(Eingegangen 31. August, 1959.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ADLER, G.: „Sulla caratterizzabilità dell'equazione del calore del punto di vista del calcolo delle variazioni” *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 153—157.
- [2] HIRSCH, A.: „Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung” *Mathematische Annalen* **49** (1897) 49—72.
- [3] СМИРНОВ, В. И.: *Курс высшей математики*, IV. Гостехиздат, Москва, 1951.

О ВОЗМОЖНОСТИ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОМОЩЬЮ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

F. BALATONI

Резюме

В вариационном исчислении хорошо известно, что к многим эллиптическим и гиперболическим дифференциальным уравнениям можно подобрать вариационную задачу, для которой данное уравнение является уравнением Эйлера. Естественно спросить, какие из параболических уравнений обладают аналогичным свойством. В [1] GY. ADLER доказал, что уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

не может быть эквивалентно уравнению Эйлера в случае достаточно сильных условий.

В настоящей работе автор занимается обобщением этой проблемы. Он исследует уравнение

$$L = a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

где a , b , c и G непрерывно дифференцируемы по соответствующим переменным. Он доказывает, что если мультипликатор

$$\alpha = \alpha\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) > 0$$

непрерывно дифференцируем по своим переменным, то уравнение $\alpha \cdot L = 0$, эквивалентное параболическому дифференциальному уравнению $L = 0$, не может быть уравнением Эйлера. Далее автор характеризует эллиптические и гиперболические уравнения, к которым можно найти мультипликатор α с желаемыми свойствами.

**LIST OF LECTURES
HELD IN THE SEMINAR
OF THE INSTITUTE
IN 1959**

**СПИСОК ДОКЛАДОВ
ЧИТАННЫХ НА СЕМИНАРЕ
ИНСТИТУТА В ТЕЧЕНИЕ
1959 ГОДА**

1. SCHWARTZ, L. (Paris): *Distributions à valeurs vectorielles et applications mathématiques et physiques*. (May 26.)
2. GÄRDING, L. (Lund): *The heat equation on Lie groups*. (July 10.)
3. DOWKER, H. (London): *Paracompact spaces*. (July 10.)
4. DOWKER, Y. N. (London): *On measurable transformations*. (July 10.)
- 5—6. SULANKE, R. (Berlin, DDR): *Neuere Ergebnisse in der Integralgeometrie*. (17 und 18 Sept.)
- 7—16. ERDŐS, P.: *Ten lectures on unsolved mathematical problems*.¹ (September—december.)
17. ZAMANSKY, M. (Paris): *Construction de l'espace L par complétion*. (9. octobre)
- 18—21. Линник, Ю. В. (Ленинград): *Пять лекций о некоторых вопросах теории чисел и теории вероятностей*. (13., 15., 16. и 19-ого октября)
22. Голенко, Д. И. (Москва): *Метод генерирования псевдослучайных чисел, используемых в электронных машинах*. (3-его декабря)
23. Голенко, Д. И. (Москва): *Моделирование некоторых статистических процессов на быстродействующих электронных вычислительных машинах*. (4-ого декабря)
24. JESSEN, B. (Kobenhavn): *The distribution of the values of the zeta function*.² (December 8.)

¹ We shall publish these lectures in a later issue.

² Organized jointly with the J. Bolyai Mathematical Society.

BIBLIOGRAPHY¹

LIST OF RECENT PAPERS AND BOOKS WRITTEN BY MEMBERS OF THE INSTITUTE, PUBLISHED OR IN PRINT ELSEWHERE

БИБЛИОГРАФИЯ¹

СПИСОК НОВЫХ РАБОТ ЧЛЕНОВ ИНСТИТУТА, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ДРУГИХ МЕСТАХ

- [1] ÁDÁM, A.: „On subsets of set products.” *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* **2** (1959) 147—149.
- [2] ÁDÁM, A.: „Zur Theorie der Wahrheitsfunktionen.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **21** (1960) 47—52.
- [3] ADLER GY.: „A matematika tételeiről és bizonyítási módszereiről.” *Természettudományi Közlemény* **90** (1959) 408—411.
- [4] ADLER GY.—KRÁVITS A.: „A Krávits-féle adagoló-szivattyú alkalmazása gyors Diesel-motoroknál.” *Járművek és Mezőgazdasági Gépek* **6** (1959) 376—381.
- [5] ALEXITS, GY.: *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen*. Akadémiai Kiadó, Budapest.*
- [6] ALPÁR, L.: „Recherches sur certains phénomènes de sommabilité et de divergence des séries de Taylor.” *Unione Matematica Italiana VI Congresso Nazionale, Napoli, Comunicazioni* (1959) 20—21.
- [7] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: „Notes on interpolation, VII. (Convergence in infinite intervals).” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 63—68.
- [8] BÉKÉSSY, A.—JÁNOSY, L.—PÁL, L.: „Методы определения флуктуации энергии и углового рассеяния быстрых ионизирующих частиц.” *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1959) 297—316.
- [9] CZIPSZER, J.: „Sur une propriété générale des suites convergentes de fonctions arbitraires.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 305—315.
- [10] CSÁSZÁR, Á.: *Fondements de la topologie générale*. Akadémiai Kiadó, Budapest.*
- [11] CSÁSZÁR, Á.: „Sur la représentation canonique des fonctionnelles linéaires.” *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* **2** (1959) 85—92.
- [12] EGERVÁRY, J.: „Über eine konstruktive Methode zur Reduktion einer Matrix auf die Jordansche Normalform.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 31—54.
- [13] EGERVÁRY, J.: „Über eine Eigenschaft der Parabel und des Paraboloids.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **6** (1959) 269—275.
- [14] EGERVÁRY, J.: „Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poissonschen Differenzengleichung für beliebige Gebiete.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1960).*
- [15] FÉNYES T.—NÁDAS T.: „Lemezmaglapok gazdaságosságának vizsgálata.” *Magyar Híradástechnika* **10** (1959) 115—119.
- [16] FÉNYES T.—NÁDAS T.: „Törpetranszformátorok lemezmaglapjainak általános geometriai gazdaságossági problémái.” *Acta Technica*.*
- [17] FENYŐ, I.: „Sur la notion du logarithme d'un opérateur.” *Mathematica*.*

¹ Papers or books with incomplete bibliographical data, marked by an asterisk, are in print.

¹ Работы с неполными библиографическими данными, отмеченные звездочкой, находятся в печати.

- [18] FREUD, G.: „Sui procedimenti lineari d'approssimazione.” *Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei (Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)* **26** (1959) 641—643.
- [19] FREUD G.: „Sima függvények approximációjáról.” *Matematikai Lapok* **10** (1959) 267—273.
- [20] GALLAI, T.: „Über reguläre Kettengruppen.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 227—240.
- [21] GALLAI, T.: „Über extreme Punkt- und Kantenmengen.” *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* **2** (1959) 133—138.
- [22] GALLAI, T.—ERDŐS, P.: „On maximal paths and circuits of graphs.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 333—356.
- [23] GEHÉR, L.—FOIAS, C.—SZ.-NAGY, B.: „On the permutability condition of quantum mechanics.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **21** (1960) 78—89.
- [24] GRÄTZER GY.: „Standard ideálok.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **9** (1959) 81—97.
- [25] GRÄTZER GY.—SCHMIDT E. T.: „Szász Gábor egy tételéről.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **9** (1959) 255—258.
- [26] HAJÓS GY.: *Bevezetés a geometriába*. Tankönyvkiadó, Budapest.*
- [27] HEPPES A.: „Megjegyzés Erdős Pál és Fejes Tóth László egy dolgozatához.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **10** (1960) 33—34.
- [28] HEPPES, A.—FEJES Tóth, L.: „Filling of a domain by equiareal discs.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*.*
- [29] HEPPES, A.: „Mehrfache gitterförmige Kreislagerungen in der Ebene.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 141—148.
- [30] JUVANČZ, I.: „Contribution to the problem of statistical results and scientific inference.” *Acta Medica* **16** (1960).*
- [31] KALMÁR, L.: „A new principle of construction of logical machines.” *Proceedings of the Second International Congress of Cybernetics* (1958), Namur, 1960, 457—462.
- [32] KOVÁCS, I.: „Un complément à la théorie de l'intégration non commutative.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **21** (1960) 7—11.
- [33] MEDGYESSY, P.: *On the decompositions of superpositions of distribution functions*. Akadémiai Kiadó, Budapest.*
- [34] POLLÁK, GY.: „O типах евклидовых норм.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **20** (1959) 252—268.
- [35] PRÉKOPA, A.: „On secondary processes generated by random point distributions.” *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* **2** (1959) 139—146.
- [36] PRÉKOPA, A.: „On the spreading process.” *Transactions of the Second Prague Conference 1959*.*
- [37] PRÉKOPA A.: *Analízis*. (Központi Statisztikai Hivatal kiadása.)
- [38] PRÉKOPA A.: *Lineáris algebra*. (Központi Statisztikai Hivatal kiadása).*
- [39] RÉDEI, L.: „Über die quadratischen Zahlkörper mit Primzerlegung.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **21** (1960) 1—3.
- [40] RÉDEI, L.: „Ein spezieller Diskriminantensatz über Polynome.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **20** (1959) 234—237.
- [40a] RÉDEI, L.: „Die einstufig nichtregulären Ringe.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **20** (1959) 238—244.
- [41] RÉNYI, A.: „On the dimension and entropy of probability distributions.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 193—215.
- [42] RÉNYI, A.: „New version of the probabilistic generalization of the large sieve.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 217—226.
- [43] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.: „On Cantor's series with convergent $\sum \frac{1}{q_n}$.” *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* **2** (1959) 93—109.
- [44] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.: „Additive properties of random sequences of positive integers.” *Acta Arithmetica*.*
- [45] RÉNYI, A.: „On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1960) 97—102.

- [46] RÉNYI, A.: „On measures of dependence.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 441–451.
- [47] RÉNYI, A.: „On the entropy of general probability distributions.” *Proceedings of the 2nd Prague Conference on Information Theory*.*
- [48] RÓZSA P.: „Egerváry Jenő munkásságáról.” *Matematikai Lapok* **10** (1959) 195–225.
- [49] RÓZSA P.: „Hozzászólás Szabó János »Kibernetikai módszerek alkalmazása az építőipari és műszaki tervezésben« című előadásához.” Az 1959. március 10–12-én rendezett kibernetikai ankét anyaga. Közlekedéstudományi Egyesület kiadása, Budapest, 1959.
- [50] SARKADI, K.: „A rule of dualism in mathematical statistics.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1960).*
- [51] SARKADI, K.: „On the median of the distribution of exceedances.” *Annals of Mathematical Statistics* **31** (1960) 225–226.
- [52] SCHMIDT E. T.: „Algebrai struktúrák kongruenciarelációiról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **9** (1959) 163–174.
- SCHMIDT, E. T.: see [25].
- [53] SERES, I.: „Über Irreduzibilität gewisser Polynome.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- [54] STEINFELD, O.: „Über die Struktursätze der Semiringe.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 149–155.
- [55] STEINFELD O.—KERTÉSZ A.: „A féllegyszerű gyűrűk jellemzéséről.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **9** (1959) 301–314.
- [56] STEINFELD, O.—KERTÉSZ, A.: „On the symmetry of semi-simple rings” *American Mathematical Monthly*.*
- [57] SURÁNYI J.—ERDŐS P.: „Megjegyzések egy versenyfeladathoz.” *Matematikai Lapok* **10** (1959) 39–48.
- [58] SURÁNYI J.: „Egy megjegyzés kúpszeletek egyenleteinek tanításához.” *A Matematika Tanítása* (1959) 97–99.
- [59] SURÁNYI J.—ERDŐS P.: „Egy additív számelméleti probléma.” *Matematikai Lapok* **10** (1959) 284–290.
- [60] SURÁNYI J.: „Megjegyzések a számelmélet alaptételéhez.” *Matematikai Lapok*.*
- [61] SURÁNYI J.—FRIED E.: „Egy polinomokra vonatkozó számelméleti tételről.” *Matematikai Lapok*.*
- [62] SURÁNYI, J.: *Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe*. Akadémiai Kiadó — Veb. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Budapest—Berlin, 1959. 216 p.
- [63] SURÁNYI J.—ERDŐS P.: *Válogatott fejezetek a számelméletből*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1960. 250 p.
- [64] SZABÓ, Á.: „О превращении математики в дедуктивную науку и о начале её обоснования”. *Историко-математические Исследования* **12** (1959) 321–392.
- [65] SZABÓ, Á.: „The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of its Foundation on Definitions and Axioms.” *Isis (Washington)*.*
- [66] SZABÓ, Á.: „Anfänge der mathematischen Axiomatik.” *Archive for History of Exact Sciences*.*
- [67] SZABÓ Á.: „A matematikai axiomatika kezdetei.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*.*
- [68] SZŐKEFALVI-NAGY, B.: „Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereiche.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **20** (1959) 36–47.
- [69] SZÜSZ, P.: „Über die absolute Konvergenz lakunärer trigonometrischer Reihen.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- [70] SZÜSZ, P.: „Über eine Satz von Kusmin.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- [71] TAMÁSSY, E.: „Die Anwendung der Probitanalyse bei den Forschungen auf dem Gebiet der Odontologie.” *Biometrische Zeitschrift*.*
- [72] TURÁN, P.: „On infinite product representation of functions regular and nonvanishing in the unit-circle.” *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences* **3** (1959) 481–486.
- [73] TURÁN, P.: „On a property of the stable or conditionally stable solutions of systems of non-linear differential equations.” *Annali di Matematica* **48** (1959) 333–340.
- [74] TURÁN, P.: „A note on the real zeros of Dirichlet's L-functions.” *Acta Arithmetica* **3** (1959) 309–314.

- [75] TURÁN, P.: „On the distribution of zeros of general exponential polynomials.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*.*
- [76] TURÁN, P.: „Nachtrag zu meiner Abhandlung »On some approximative Dirichlet-polynomials in the theory of zetafunction of Riemann«.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 277—298.
- [77] TURÁN, P.: „Untersuchungen über Dirichlet-Polynomen.” *Schriftenreihe der Forschungsinstitut für Mathematik*.*
- [78] TURÁN, P.: „A hatványsorok elméletének egy kérdéséről.” *Matematikai Lapok* **10** (1959) 278—283.
- [79] TURÁN, P.: „On an improvement of some new one-sided theorems of the theory of diophantine approximation.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- [80] TURÁN, P.—ERDŐS, P.: „On an extremal problem in the theory of interpolation.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- TURÁN, P.: see [7].
- [81] VARGA, O.: „Verallgemeinerte Riemannsche Normalkoordinaten und einige Anwendungen derselben.” *Известия на Математический Институт* **3** (1959) 61—69.
- [82] VARGA, O.: „Ein elementargeometrischer Beweis des Sylvester-Frankeschen Determinantensatzes.” *Известия на Математический Институт* **3** (1959) 105—107.
- [83] VARGA, O.: „Über die Zerlegbarkeit von Finslerschen Räumen.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1960) 197—203.
- [84] VINCZE I.: „Az Eneström-Kakeya tételről.” *Matematikai Lapok* **10** (1959) 127—132.
- [85] VINCZE I.: „Az információelmélet egy fogalmának értelmezéséről.” *Matematikai Lapok* **10** (1959) 255—266.
- [86] VINCZE, I.: „An interpretation of the I-divergence of information-theory.” *Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes*.*
- [87] VINCZE, I.: „On some statistics connected with two sample tests in the theory of order statistics.” *The FU-TAN University Journal (Sanghai)* (1960). In Chinese with summary in English.*
- [88] ZIERMANN M.: „A valószínűségszámítás alkalmazása készletgazdálkodási problémákra.” A Gépipari Tudományos Egyesület II. Üzemszervezési Kongresszusának Kiadványa.*
- [89] ZIERMANN M.: „Hozzászólás Krekó Béla »Gazdasági tevékenységek vizsgálatának néhány modern matematikai eszközéről« című előadásához.” Az 1959. március 10—12-én rendezett kibernetikai ankét anyaga. Közlekedéstudományi Egyesület kiadása, Budapest, 1959.

**EXACT DATA OF PAPERS
MENTIONED EARLIER WITH
INCOMPLETE BIBLIOGRAPHICAL
DATA²**

**ТОЧНЫЕ ДАННЫЕ РАБОТ
ПРИВЕДЕННЫХ РАНЬШЕ С
НЕПОЛНЫМИ БИБЛИОГРА-
ФИЧЕСКИМИ ДАННЫМИ²**

- I.: [29] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: „Notes on interpolation, II. (Explicit formulae).” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) 201—215.
- II.: [15] PALÁSTI, I.—TAKÁCS, L.: „Theoretische und praktische Berechnungen bei der Planung der elektrischen Energie.” *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* **24** (1959) 273—284.
- II.: [16] RÉNYI, A.—RÉVÉSZ, P.: „On mixing sequences of random variables.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 389—393.
- II.: [35] RÉNYI, A.: „Some remarks on univalent functions, I.” *Известия на Математический Институт (София)* **3** (1959) 111—121.
- II.: [37] TURÁN, P.: „Zur Theorie der Dirichletschen Reihen.” *Euler-Festband, Berlin, 1959*, 322—336.
- II.: [46] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: „Notes on interpolation, IV. (Inequalities).” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 243—258.

² The numbers preceding the serial numbers refer to the volume containing the respective list of papers.

² Римская цифра стоящая перед номером работы оказывает на том в котором фигурирует работа с неполными библиографическими данными.

- II.: [47] BÉKÉSSY, A.: „Bemerkungen zur Engeschen Darstellung reeller Zahlen.” *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* **1** (1958) 143–151.
- II.: [50] CSÁSZÁR, Á.—MRÓWKA, S.: „Sur la compactification des espaces de proximité.” *Fundamenta Mathematicae* **46** (1959) 195–207.
- II.: RÉNYI, A.:

數論中的概率方法

- (Probabilistic methods in number theory. (In Chinese) *Shuxue Jinzhan (Progress in Mathematics)* **4** (1958) 465–510.
- II.: [60] RÉNYI, A.: „On Cantor's products.” *Colloquium Mathematicum* **6** (1958) 135–139.
- II.: [62] GEHÉR, L.: „Über Fortsetzungs- und Approximationsprobleme für stetige Abbildungen von metrischen Räumen.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **20** (1959) 48–66.
- II.: [74] FENYŐ I.: „Megjegyzés Jánossy Lajos egy dolgozatához.” *Matematikai Lapok* **10** (1959) 66–71.
- II.: [75] FENYŐ, I.: „Über die Verallgemeinerung der Operatorenrechnung.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **6** (1959) 48–59.
- II.: [76] FREUD, G.—KRÁLIK, D.: „Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **3–4** (1957) 411–418.
- II.: [81] SZÜSZ, P.—TURÁN, P.—ERDŐS, P.: „Remarks on the theory of diophantine approximation.” *Colloquium Mathematicum* **6** (1958) 119–126.
- II.: [83] SZÜSZ, P.: „Über die metrische Theorie der diophantische Approximation.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 177–193.
- II.: [84] TURÁN, P.: „To the theory of algebraic equations.” *Известия на Математическая Институт (София)* **3** (1959) 123–137.
- II.: [93] KALMÁR, L.: „An argument against the plausibility of Church's thesis.” *Constructivity in Mathematics (Proceedings of the colloquium held at Amsterdam, 1957)* 72–80.
- III.: [5] CSÁSZÁR Á.: „Konvex halmazokról és függvényekről.” *Matematikai Lapok* **9** (1958) 272–281.
- III.: [6] CSÁSZÁR, Á.: „Sur les singularités des fonctions continues.” *Bulletin de Mathématiques de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques de la République Populaire Roumaine* **2** (50) (1958) 133–135.
- III.: [8] CSÁSZÁR, Á.: „Sur les courbes atriodiques.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 329–332.
- III.: [9] CSÁSZÁR, Á.—CZIPSZER, J.: „Sur les courbes irramifiées.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 315–328.
- III.: [13] EGERVÁRY, J.: „On the applications of matrices and hypermatrices in engineering analysis.” *Mémoires et Publications de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut* (1959) 44–57.
- III.: [14] EGERVÁRY, J.—TURÁN, P.: „Notes on interpolation, VI. (On the stability of interpolation on an infinite interval.)” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1958) 55–62.
- III.: [15] FENYŐ, I.: „О теории интегральных операторов типа Вольтерра.” *Доклады Академии Наук СССР* **125** (1959) 51–54.
- III.: [16] FENYŐ, I.: „Eine neue Methode zur Lösung von Differenzgleichungen nebst Anwendungen.” *Periodica Polytechnica* **3** (1959) 135–151.
- III.: [18] FODOR, G.—ERDŐS, P.—HAJNAL, A.: „On the structure of inner set mappings.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **20** (1959) 81–90.
- III.: [19] FREUD, G.: „Eine Ungleichung für Tschebischeffsche Approximationspolynome.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **19** (1958) 162–164.
- III.: [20] FREUD, G.: „Über die Approximations reeller stetiger Funktionen durch gewöhnliche Polynome.” *Mathematische Annalen* **137** (1958) 17–25.
- III.: [21] FREUD, G.: „Bemerkung über die Konvergenz eines Interpolationsverfahrens von P. Turán.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 337–341.
- III.: [22] FREUD, G.: „Ein Beitrag zu dem Satze von Cantor und Bendixson.” *Acta Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 333–336.

- III.: [24] FREUD, G.: „Problèmes de la propagation de la chaleur avec les conditions aux limites composées.” *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens de l'Ingénieur. Mons et Bruxelles 9–14 Juin 1958.* 199–206.
- III.: [31] JUVAN CZ, I.: „Allgemeine Fragen der Arteriosklerosen-Statistiken.” *Arteriosklerose und Ernährung. Wissenschaftliche Veröffentlichungen der Deutschen Gesellschaft für Ernährung* **3** (1959) 140–161.
- III.: [32] JUVAN CZ, I.: „On recording the results of acute experiments.” *Acta Medica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1959) 167–177.
- III.: [40] POLLÁK, GY.—RÉDEI, L.: „Die Halbgruppen, deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sind.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **6** (1959) 126–130.
- III.: [45] RÉDEI, L.: „Natürliche Basen der Kreisteilungskörper, I.” *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **23** (1959) 180–200.
- III.: [46] RÉDEI, L.: „Neuer Beweis eines Satzes von Delone über ebene Punktgitter.” *Journal of London Mathematical Society* **34** (1959) 205–207.
- III.: [47] RÉDEI, L.—TURÁN, P.: „Zur Theorie der algebraischen Gleichungen über endlichen Körpern.” *Acta Arithmetica* **5** (1959) 223–225.
- III.: [50] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.: „Some further statistical properties of the digits in Cantor's series.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 21–29.
- III.: [54] RÓZSA, P.: „О применении клеточных матриц в механике корпускулярных систем.” *Успехи Математических Наук* **14** (1959) **4** (88) 207–211.
- III.: [59] SZABÓ Á.: „A görög matematika definíciós-axiomatikus alapjai.” *Matematikai Lapok* **10** (1959) 72–121.
- III.: [63] SZŐKEFALVI-NAGY, B.—KORÁNYI, Á.: „Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerung eines Problemkreises in der komplexen Funktionentheorie.” *Acta Mathematica (Uppsala)* **100** (1958) 171–202.
- III.: [64] SZŐKEFALVI-NAGY, B.—FOIAŞ, C.: „Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **20** (1959) 91–96.
- III.: [65] SZÜSZ, P.: „Über die Approximation einer reellen Zahl durch Brüche.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 69–75.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója.

Műszaki felelős: Pataki Ferenc

A kézirat érkezett: 1960. II. 27. — Példányszám: 800. — Terjedelem: 21 (A/5) iv

60,50908 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

MAGYAR
TUDOMÁNYOS KIADÁSOK
KÖNYVTÁRA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azokról különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 \$.) Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadón keresztül adhatók fel (Budapest, V. Alkotmány u. 21., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 15.915.111—46), külföldi megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, P.O.B. 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest, V. Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
РЕДАКТОР: АЛФРÉД РЕ́НЬИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: КАТАЛИН БОГНА́Р, ПА́Л РЕ́ВЭШ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, БУДАПЕСТ, V. РЕАЛТАНОДА У. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюме на языках отличающихся от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Местные заказы принимает Издательство Академии Наук (Budapest, V. Alkotmány u. 21., счёт Венгерского Национального Банка 15.915.111—46), заграничные заказы принимает Культúra, (Budapest, 62, P.O.B. 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest, V. Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages, series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 type-written copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 5.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Academic Publishing House in Hungary (Budapest, V. Alkotmány u. 21., single account number in the Hungarian National Bank 15.915.111—46) resp. at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, P.O.B. 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest, V. Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

SZEKERES, G.: On the propagation of gravitational waves.....	3
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On the evolution of random graphs.....	17
HARARY, F.: Unsolved problems in the enumeration of graphs.....	63
ALPÁR, L.: Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, III	97
VERMES, P.: Transformations of periodic sequences	153
ERDŐS, P.: On sets of distances of n points in Euclidean space	165
ЗАК, Л. А.—МИЛЬЧЕНКО, Т. И.—СМИРЯГИН, В. П.: Краткое описание ма- шины „БЭСМ“-II. (Основные параметры)	171
BIHARI, I.—FREY, T.—PETHŐ, Á.: Über ein Problem der Gasdynamik (Charak- teristische Randwertaufgabe mit unstetigkeiten in den Randwerten)	179
PETHŐ, Á.: Eine Matrixmethode zur Lösung von Anfangswertaufgaben linearer Differenzengleichungen	203
ACZÉL, J.—GHERMANESCU, M.—HOSSZÚ, M.: On cyclic equations	215
ADLER, G.: Sur un état pseudo-stationnaire intervenant dans la théorie du mélange	223
BALATONI, F.: Über die Charakterisierbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe der Variationsrechnung	229
List of lectures held in the seminar of the institute in 1959	234
List of recent papers and books written by members of the institute published or in print elsewhere	235

307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

V. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 3. FÜZET

1960

★

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ V., СЕРИЯ A, ВЫПУСК 3.

1960

★

PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME V. SERIES A, FASC. 3.

1960



1960

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

ГОЛЕНКО, Д. И. — СМЕРЯГИН, В. П.: Датчик случайных чисел равномерно распределенных в интервале $[0,1]$	241
KONCZ, K.: Über gewisse Elementenfolgen des Hilbertschen Raumes	255
RÉNYI, A.: Bemerkung zur Arbeit „Über gewisse Elementenfolgen des Hilbertschen Raumes“ von K. Koncz	265
SARKADI, K.: On testing for normality	269
SZEKERER, G.: On a theorem of Paul Lévy	277
GRÄTZER, G.—SCHMIDT, E. T.: Über einfache Körpererweiterungen	283
SZÁSZ, F.: Ringe, deren echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind	287
REIMANN, J.—VINCZE, I.: On the comparison of two samples with slightly different sizes	293
CSÁKI, P.—FISCHER, J.: On bivariate stochastic connection	311
CSÁKI, P.—FISCHER, J.: Contributions to the problem of maximal correlation	325
BÁNKÖVI, G.: Evaluation of integrals by Monte Carlo methods based on the one dimensional random space filling	339
PALÁSTI, I.: On some random space filling problems	353
HÁJEK, J.: Limiting distributions in simple random sampling from a finite population	361
RÉVÉSZ, P.: Some remarks on the random ergodic theorem I.	375

Труды Математического Института Венгерской Академии Наук начиная с тома V будут выходить в двух сериях: в выпусках серии А будут публиковаться статьи на иностранных языках, а в серии В — на венгерском языке. Выпуски 1, 2 и 3 каждого тома принадлежат серии А, а выпуск 4 — серии В. Как подписчикам, так и учреждениям, меняющим журнал на другие издания, будут высылаться выпуски обеих серий.

Beginning with volume V, the Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences is divided into two Series, of which Series A is published in foreign languages, Series B in Hungarian. Of each volume fasciculi 1, 2 and 3 belong to Series A and fasciculus 4 to Series B. All subscribers and all exchange partners will receive both Series in future.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

V. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 3. FÜZET

1960

★

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ V., СЕРИЯ А, ВЫПУСК 3.

1960

★

PUBLICATIONS

OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME V. SERIES A, FASC. 3.

1960



1960

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 \$.) Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadón keresztül adhatók fel (Budapest, V. Alkotmány u. 21., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 15.915.111—46), külföldi megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, P.O.B. 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest, V. Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.).

TRUDY
MATEMATICHESKOGO INSTITUTA

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюме на языках отличающихся от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Местные заказы принимает Издательство Академии Наук (Budapest, V. Alkotmány u. 21. счёт Венгерского Национального Банка 15.915.111-46), заграничные заказы принимает Культура, (Budapest, 62, P.O.B. 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest, V. Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages, series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 5,— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Academie Publishing House in Hungary (Budapest, V. Alkotmány u. 21., single account number in the Hungarian National Bank 15.915.111—46) resp. at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, P.O.B. 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest, V. Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

ДАТЧИК СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ В ИНТЕРВАЛЕ $[0,1]$

Д. И. ГОЛЕНКО¹ и В. П. СМИРЯГИН¹

§ 1.

Практика решения ряда задач методом Монте-Карло и выявленные при этом положительные и отрицательные стороны программ образования случайных чисел заставляют искать наиболее оптимальные методы получения случайных величин в электронной машине. Применяемое повсеместно в настоящее время программное получение случайных чисел при помощи рекуррентного соотношения состоит в том, чтобы производить псевдослучайные числа одно из другого путем применения некоторого алгоритма, состоящего из арифметических и логических операций. При этом отпадает необходимость решать задачу ввода данных, и весь процесс становится легко воспроизводимым. Однако против этого способа может быть выдвинут ряд возражений. Первое из них состоит в том, что любая последовательность чисел, полученных программным, т. е. детерминированным способом, представляет прямую противоположность случайной последовательности в теоретико-вероятностном смысле этого слова. Правда, на это можно возразить что любая последовательность программно образованных чисел будет случайной для практических целей, если она удовлетворяет системе принятых статистических критериев проверки случайности. Второе, более серьезное возражение заключается в том, что распределение выработанных программным способом случайных чисел более или менее отличается от теоретического. Такое расхождение, несущественное для одномерного случая, начинает оказывать серьезное влияние в случае многомерной задачи, когда несущественные расхождения, накладываясь друг на друга, дают в результате существенное отклонение от ожидаемого теоретического распределения. А это приводит к изменению сходящегося вероятностного процесса и, как следствие, к неправильным результатам вычислений. Наконец, необходимо отметить, что все выработанные программным способом последовательности случайных чисел являются периодическими и поэтому, даже с практической точки зрения, очень длинные последовательности не будут случайными. Применяемые же методы увеличения периода последовательности могут несколько снизить скорость работы машины. Способ ввода таблиц случайных чисел в накопитель электронной машины извне также не является успешным решением вопроса. Дело в том, что ввод в машину является очень медленным процессом и значительно уменьшает скорость ее работы. Помимо этого, для решения больших задач необходимо использование сотен тысяч

¹ Вычислительный Центр Академии Наук СССР.

и даже миллионов случайных чисел, что во много раз превосходит объем имеющихся в настоящее время таблиц.

Ввиду вышеизложенного эффективное решение поставленной задачи может дать использование специального приспособления к машине — «датчика» случайных чисел, который преобразует результаты случайного физического процесса в последовательность двоичных разрядов в машине, т. е. получает случайную величину.

Выгода этого метода состоит не только в том, что образуемые при этом числа являются случайными в самом строгом смысле этого слова, так как они получаются вследствие случайного физического процесса.

Помимо этого, заметно повышается скорость вычислений, ибо на каждом такте работы машины в фиксированной, стандартной ячейке накопителя констант образуется новое случайное число. Наконец, распределение получаемых таким образом случайных величин очень близко к равномерному и не должно изменяться в процессе работы машины (при условии хорошей работы «датчика»), а потому является стабильным и устойчивым.

К недостаткам такого метода следует отнести невозможность воспроизведения результатов процесса (двойной счет в машине не может быть проведен). Но в большинстве задач, решаемых методом Монте-Карло, это и не требуется, ибо программист может оценивать работу машины по сходимости вероятностного процесса. Последнее же он может фиксировать при периодическом выводе на печать соответствующих промежуточных результатов вычислений.

Следует отметить, что процесс производства случайных чисел может выйти из-под контроля — «датчик» разладится. Для предупреждения такого события необходима профилактическая проверка работы установки. Такая проверка должна делаться периодически; в противном случае характер распределения может измениться.

В настоящей работе излагаются принципы и методы проверки работы такого «датчика» случайных чисел, построенного в 1958 году в *Вычислительном Центре Академии Наук СССР*.

§ 2.

Блок-схема датчика случайных чисел (ДСЧ) представлена на рис. 1. Фотография датчика представлена на рис. 2.

Датчик случайных чисел имеет в своем составе 12 генераторов шумов (ГШ), 12 клапанов (К), 12 формирователей (Фт), 12 триггеров (Т), 12 выходных инверторов (И).

Датчик случайных чисел смонтирован на 12 двоичных разрядах. В каждый такт работы электронной вычислительной машины датчик случайных чисел вырабатывает число, выбираемое по 1-му адресу из накопителя констант. Ячейке случайного числа присвоен определенный номер.

Блок генератора шумов вырабатывает серию случайного количества импульсов, сформированную из выбросов шумовой ЭДС. Форма шумовой ЭДС является случайной и зависит только от физической природы шумового элемента. Спектр шума занимает очень широкую полосу частот, а форма кривой шумовой ЭДС имеет многочисленные беспорядочно перемещающиеся во времени выбросы. Эти выбросы, достаточно усиленные и сформированные, могут служить аналогом кода случайного числа.

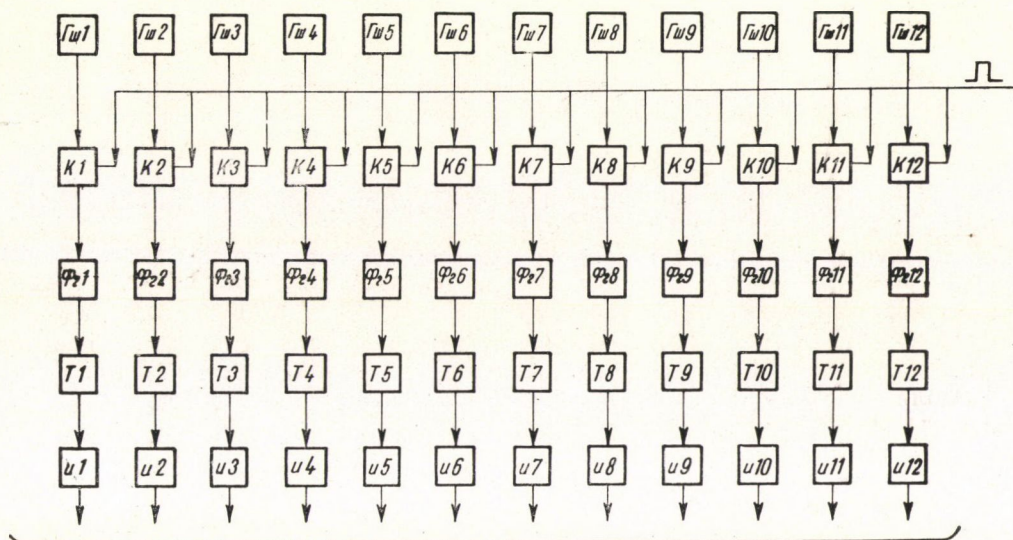


рис. 1.

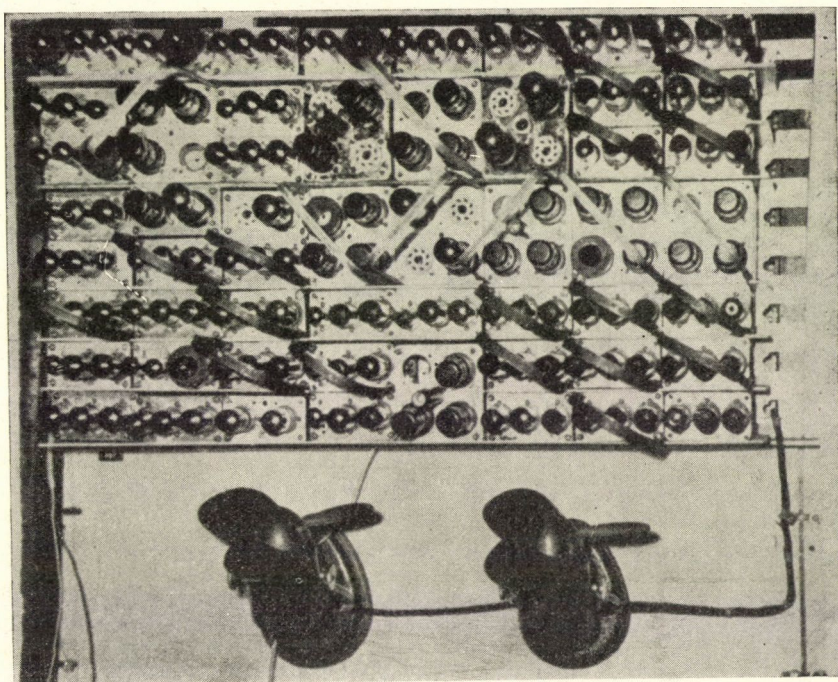


рис. 2.

В соответствии с этим генератор шумов состоит из «шумящего элемента» и усилителя.

В ДСЧ используется два вида «шумящих элементов» германиевый триод и газотрон с магнитом.

Схема генератора шумов с кристаллическим триодом представлена на рис. 3. В качестве шумящего элемента применен точечный германиевый триод-типа С 1 А. Выбор германиевого триода в качестве шумового элемента обусловлен в основном, высоким уровнем шумов триодов и, следовательно

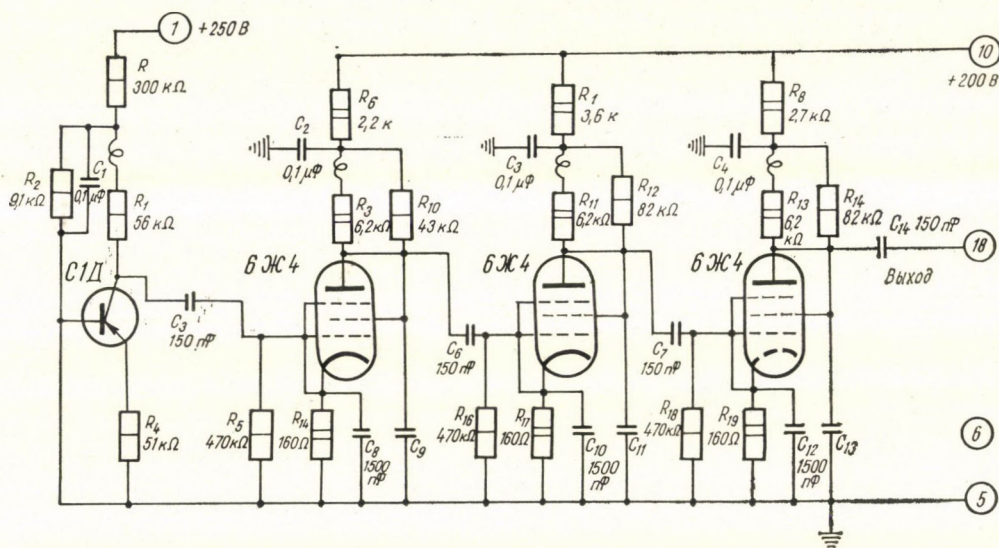


рис. 3.

возможностью использовать сравнительно небольшой усилитель для формирования импульсов.

Усилитель состоит из 4-х однотипных каскадов, собранных по реостатной усилительной схеме с высокочастотной коррекцией.

Сравнительно малая величина анодных нагрузок и применение ламп с большой крутизной позволяют получить широкую полосу усиливаемых частот и, следовательно, позволяют получить на выходе короткие импульсы с длительностью — 1 мксек, — амплитудой $35 \div 40$ в. и частотой повторений $100 \div 500$ кгц.

Схема генератора шумов с газотроном с магнитом показана на рис. 4.

Генератор шумов используется совместно с клапаном, пропускающим импульсы на триггер в течение определенного времени, после чего триггер должен занять какое-либо положение, соответствующее коду пришедшего на него числа. Клапан собран на пентоде и имеет 2 управляющих входа. На один вход поступают импульсы с генератора шумов, а на второй вход — разрешающие положительные импульсы, длительность которых можно менять. Схема клапана представлена на рис. 5.

Разрешающие импульсы получают на аноде одновибратора, запускаемого импульсом выдачи команды.

Импульсы с генератора шумов проходят на выход клапана только при наличии разрешающего импульса выдачи команды, подаваемого с устройства управления электронной вычислительной машины.

С клапана импульсы отрицательной полярности через формирователь Фт поступают на счетный вход триггеров $T_1 \div T_{12}$. Принципиальная схема триггера показана на рис. 6.

Тщательно смонтированные и отобранные триггера имеют небольшую асимметрию в плечах делителя, асимметрию по входам. Симметрия триггера постоянно нарушается от изменения параметров ламп и сопротивлений

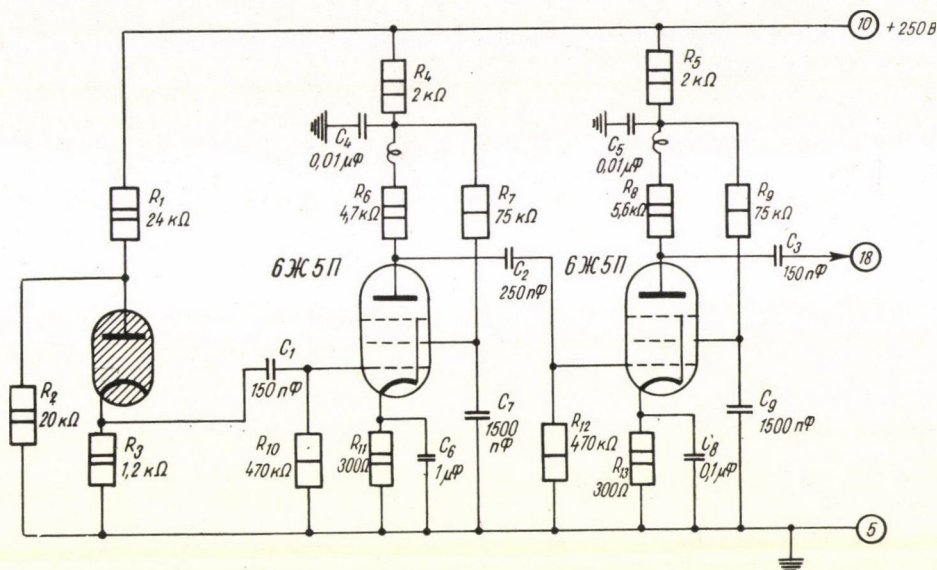


рис. 4.

входных диодов. Это небольшое изменение симметрии, несущественное в счетных схемах со стандартными импульсами, становится весьма заметным при большом числе испытаний с импульсами от генераторов шумов.

Для того, чтобы в разрядках на триггерах получить равномерное распределение положений «0» и «1» в схему был введен формирователь Фт. Триггерные перепады напряжений через усилители инверторы (И) рис. 7. поступают в схему связи ДСЧ с электронной вычислительной машиной.

Конструктивно элементы датчика выполнены на стандартных съемных блоках. Фотографии блоков представлены на рисунках 8, 9, 10, 11.

Целью работы датчика является получение случайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[0,1]$. Поэтому проверка их качества есть одновременно и контроль работы самого датчика. Ввиду необходимости периодической оценки образуемых случайных чисел была выработана методика проверки датчика и установлены критерии его хорошей работы.

Проверка качества полученных случайных чисел включает в себя следующее:

I. Проверка на случайность. Здесь в качестве основного метода был принят метод серий [1], который позволяет на основании нескольких стати-

стических критериев оценить степень связи входящих в образованную последовательность случайных чисел. При этом необходимо помнить, что испытания на случайность следует проводить как с числами, образован-

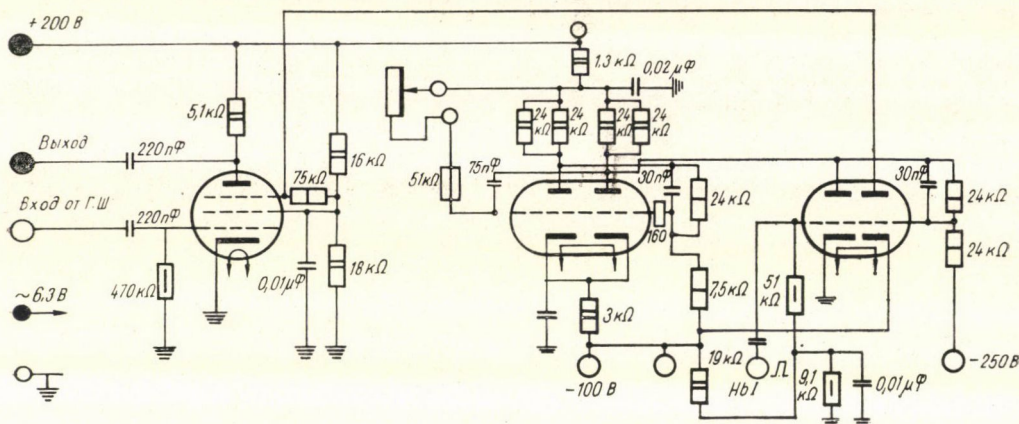


рис. 5.

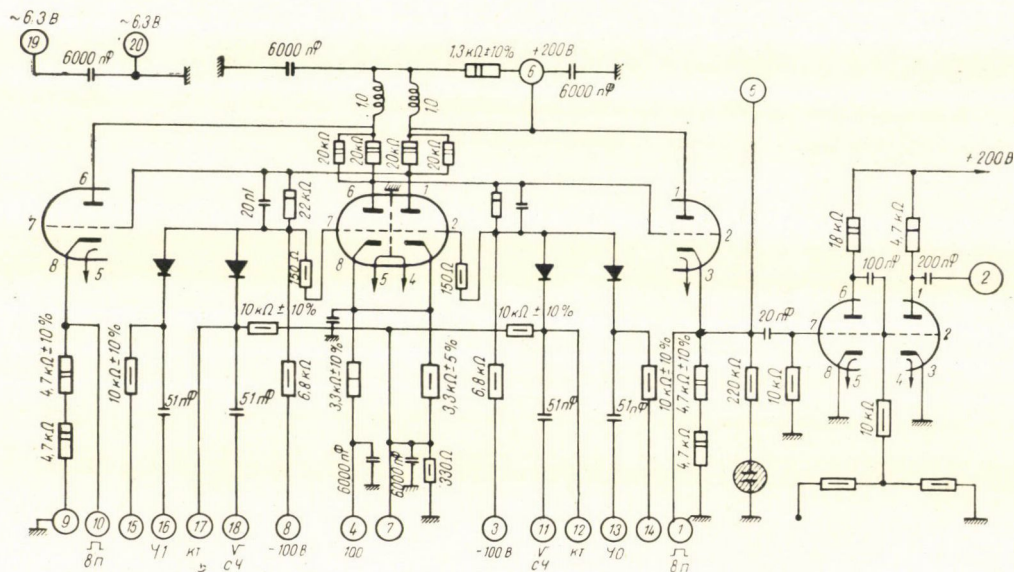


рис. 6.

ными на каждом такте работы машины, так и с величинами, полученными через один такт, а также через два такта.

Как известно, метод серий предусматривает разбиение всех элементов в исследуемой совокупности на элементы двух видов — первого рода они обычно обозначаются буквой *a* и второго рода (элементов *b*). В рассматриваемой последовательности элементы чередуются случайно в порядке появления. Серией называется любой отрезок последовательности, состоящий из

следующих друг за другом элементов одного и того же рода, если первый элемент этой совокупности следует за элементом другого рода, а последний — перед элементом другого рода. Число элементов серии называется ее длиной. В теории серий обычно используются следующие понятия, которые применяются при контроле «случайности»:

r_{1i} — число серий элемента a длины i

r_{2i} — число серий элемента b длины i

$R_{1k} = \sum_{i=k}^{n_1} r_{1i}$ — общее число серий элемента a , с длиной, равной или большей k .

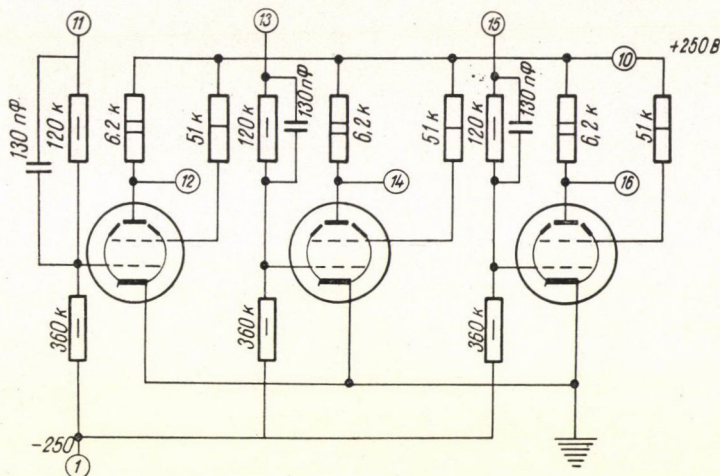


рис. 7.

(n_1 — максимальная длина серии элемента a)

$R_{2k} = \sum_{i=k}^{n_2} r_{2i}$ — общее число серий элемента b ,

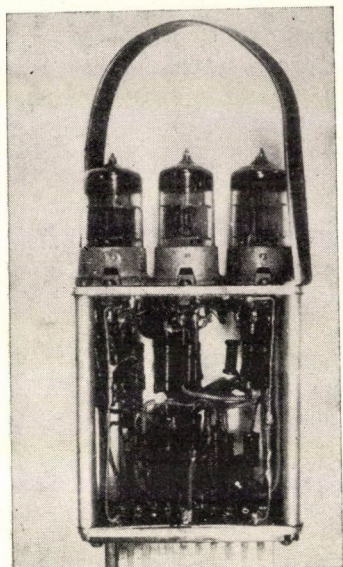
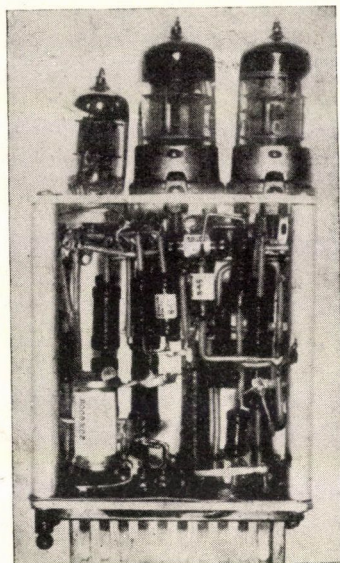
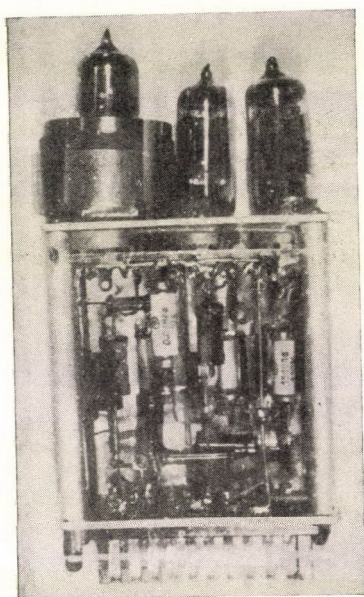
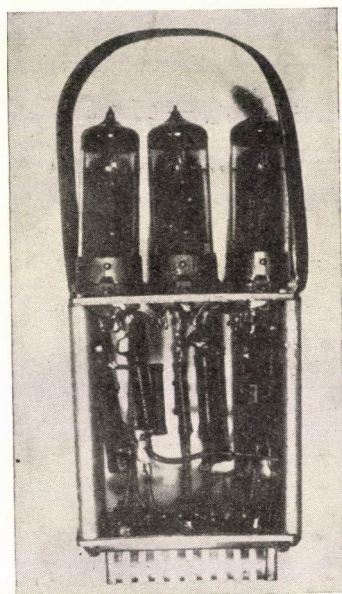
длина которых не меньше k .

$R_1 = \sum_{i=1}^{n_1} r_{1i}$ — общее число серий элемента a

$R_2 = \sum_{i=1}^{n_2} r_{2i}$ — общее число серий элемента b

$R = R_1 + R_2$ — общее число серий.

При контроле «случайности» последовательности методом серий необходимо сопоставить теоретическое распределение величин R_{1k} , R_{2k} , R_1 , R_2 , R с имеющим место эмпирическим распределением этих величин, полученным в результате определения R_{1k} , R_{2k} , R_1 , R_2 , R из большой по объему выборки выработанных случайных чисел. При этом необходимо задать вероятность достоверности применяемого метода p ; это означает, что, теоретически определив пределы распределения величин R_{1k} , R_{2k} , R_1 , R_2 , R с помощью объема выборки n и значения p , мы получим вероятность выхода выборочных значений этих величин за установленные пределы, равную $1 - p$. В нашем случае p был принят равным 0,95 объем выборки в исследуемой совокупности случайных чисел n был установлен 10 000.

*рис. 8.**рис. 9.**рис. 10.**рис. 11.*

К классу элементов первого рода были отнесены элементы последовательности (классифицируемых в порядке их появления), меньше 0,5, к классу элементов b — больше 0,5. При проверке гипотезы «случайности» получаем определенное эмпирическое распределение числа серий и длин серий для элементов первого и второго рода. Сравниваем их с теоретическими пределами, определяемыми по следующим формулам: при достаточно больших n (практически при $n \geq 20$) и $p = 0,95$ нижний предел общего числа серий R составляет

$$Z(R) = \frac{1}{2}(n + 1 - 1,65\sqrt{n-1})$$

(при $n = 10\,000$ $Z(R) = 4918$) нижний предел числа серий элементов первого (или второго) рода равен

$$Z(R_1) = Z(R_2) = 1/4(n - 1,65\sqrt{n+1})$$

(при $n = 10\,000$ $Z(R_1) = 2459$).

Что касается распределения величин R_{1k} и R_{2k} и определения предельных значений длины серий k , методы комбинаторики приводят к следующим результатам [1], предельное верхнее значение длины серии составляет

$$Z(k) = \frac{\lg_{10}(-n/\ln p)}{\lg_{10} 2} - 1$$

(при $n = 10\,000$ и $p = 0,95$ $Z(k) = 15$). Это значит, что с вероятностью всего лишь в 5% в случае «случайной» последовательности 10 000 выборочных значений мы можем встретить хотя бы одну серию длины 15 или более (для элементов обоих видов).

Многочисленные испытания образованных датчиком случайных чисел по методу «серий» показали отличные результаты. При контроле 25 групп случайных величин по 10 000 чисел в каждой ни разу общее число серий R не было меньше 4950, а в целом ряде случаев превысило 5000. Для подавляющего большинства групп при $k = 12$ $R_{1k} = R_{2k} = 0$ и ни разу k не превысило 15. Весьма полезным является анализ «случайности» последовательности содержимого отдельных фиксированных разрядов совокупности представленных в двоичной системе счисления случайных чисел (например, 1-го разряда, 2-го и т. д.). Такая проверка особенно желательна в тех случаях, когда эмпирическое распределение заметно отклоняется от равномерного. Результаты этой проверки также оказались вполне удовлетворительными.

Таким образом, установленные выше статистические критерии для проверки по методу серий позволяют осуществить контроль случайности образуемых случайных чисел.

II. Другим важнейшим показателем качества случайных чисел является их равномерность. Степень близости эмпирического закона распределения к теоретическому равномерному определяется по методу Пирсон-а [2].

Критерий Пирсон-а позволяет определить характер распределения, учитывая случайные выбросы за установленные теоретические пределы.

Как известно, критерий Пирсон-а использует распределение

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}$$

взвешенной суммы квадратов отклонений v_i от np_i , где v_i — количество выборочных объектов в i -ом интервале, а np_i — математическое ожидание величины v_i при гипотетическом теоретическом распределении. Если промежуток $[0,1]$ разбить на 20 равных интервалов и, взяв выборку достаточно большого объема n , исчислить эмпирическое значение величины

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{20} \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i},$$

то, в случае совпадения эмпирического и равномерного распределений, эта величина распределена по закону χ^2 с 19 степенями свободы (в нашем случае $p_i = 0,05$ при $1 \leq i \leq 20$). (Это обстоятельство позволяет построить критическую область типа $\chi^2 > \chi_q^2$, вероятность попадания в которую при установленном числе степеней свободы зависит от уровня значимости q . Таким образом, для любого уровня значимости q и числа степеней свободы $l - 1$ ($l = 20$) можно определить значение, и, наоборот, любому значению χ^2 и числу степеней свободы $l - 1$ соответствует вероятность $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$.

Проверка распределения по критерию Пирсона должна проводиться для k групп чисел по 10 000 в каждой ($k \approx 5-7$). Если для любой испытанной группы значение χ_q^2 превышает 30, то распределение считается несовпадающим с равномерным независимо от результатов испытаний остальных групп. В этом случае достоверность нашей гипотезы относительно равномерности распределения меньше 0,05. Помимо этого, установлен дополнительный, еще более жесткий критерий проверки распределения. Для любого j ($1 \leq j \leq k$) среднее число попавших в любой i -ый интервал случайных чисел ($1 \leq i \leq 20$) не должно выйти из пределов

$$500 - 2 \sqrt{\frac{500}{j}} \leq \sum_{p=1}^j \frac{v_p^{(i)}}{j} \leq 500 + 2 \sqrt{\frac{500}{j}}$$

(для любого i и j), где $v_p^{(i)}$ — количество попавших в i -ый интервал объектов при p -ом испытании.

Последний критерий основывается на тривиальном вероятностном соотношении: с вероятностью 0,95

$$\left| \sum_{p=1}^j \frac{v_p^{(i)}}{j} - 500 \right| \leq 2 \sqrt{\frac{\sigma}{j}},$$

где σ^2 — генеральная дисперсия количества элементов в i -ом интервале. Но $\sigma^2 = npq = 10\,000 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} \approx 500$, следовательно $\sigma \approx \sqrt{500}$. Только в случае одновременного удовлетворения обоим критериям распределение после проведения k испытаний считается равномерным.

Другими возможными критериями проверки случайных чисел на «равномерность» является критерий Колмогорова и критерий ω^2 . Как

известно, критерий Колмогорова основан на статистике $D_n = \max |F_n(x) - F(x)|$, где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, равная $\tilde{p} = \frac{mx}{n}$

(n — объем выборки, mx — количество объектов в выборке, не превышающих величины x), а $F(x) = P\{X < x\}$ — теоретическая функция распределения [2]. Какова ни была бы непрерывная функция распределения $F(x)$,

вероятность $P\left\{D_n < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right\}$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к пределу [2]

$$K(\lambda) = 1 - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} e^{-2\nu^2 \lambda^2}.$$

Таблицы функции $K(\lambda)$ указаны в ряде справочников и руководств по теории вероятностей [1].

Проверка согласия эмпирического распределения образованных ДСЧ случайных чисел и теоретического равномерного распределения на отрезке $[0,1]$ проводилась по выборке объема $n = 1000$. Использование выборок большого объема чрезвычайно затруднительно, ибо образование вариационного ряда при $n = 1000$ даже в случае применения быстродействующих электронных машин является весьма трудоемкой операцией. Построение вариационного ряда и вычисление величины производились на электронной вычислительной машине, причем полное время проверки по критерию Колмогорова составляло 15—20 минут. Гипотеза «равномерности» отвергалась, если величина $D_n \sqrt{n}$ превышала 1,5. Весьма нежелательным является также результат $D_n \sqrt{n} < 0,5$. Осуществление чрезмерно «хорошего» согласия указывало бы на то, что «случайность» случайных чисел является сомнительной.

Оптимальным интервалом значений величины $D_n \sqrt{n}$ в данном случае целесообразно считать промежуток $[0,7—1,0]$. Именно в этот интервал обычно попадало большинство значений величины $D_n \sqrt{n}$ хотя отдельные выбросы имели место (приблизительно в 20% случаев).

Наряду с критериями Колмогорова и χ^2 применялся также и критерий ω^2 [2]. Критерий ω^2 выгодно отличается от критерия χ^2 тем, что он основывается только на индивидуальных значениях выборки, а не на данных о разбиении по интервалам.

Основой критерия ω^2 является статистика

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 dF(x),$$

где $F(x)$ теоретическая функция распределения, $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения (n — объем выборки).

Если расположить выборочные значения x_1, \dots, x_n в вариационный ряд, то в случае непрерывной $F(x)$ имеем:

$$\omega^2 = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \left[F(x_\nu) - \frac{2\nu-1}{2n} \right]^2.$$

Распределение случайной величины ω^2 не зависит от $F(x)$.

Поскольку критерии Колмогорова и ω^2 требуют построения вариационного ряда, то при сколько-нибудь значительном объеме выборки n для вычисления статистик D_n и ω^2 целесообразно применять быстродейст-

вующие счетные машины. По критерию ω^2 ($n = 1000$) гипотеза «равномерности» должна отвергаться, если $\omega^2 > 0,0005$.

Результаты проверки ДСЧ по критерию ω^2 также оказались вполне удовлетворительными.

При проверке «случайности» и распределения случайных чисел целесообразно проверить правильность работы ДСЧ в целом. Это можно достигнуть вычислением какого-либо параметра в контрольной задаче, значение которого известно априорно. Разумеется, расчет величины параметра производится методом случайных испытаний с использованием случайных чисел. Если вычисленный результат не отклоняется от априорного значения больше чем на теоретически подсчитанную статистическую погрешность, это означает, что ДСЧ не оказывает влияния на ход вычислений и может быть принят. В противном случае необходимо изменить ДСЧ и повторить контрольные вычисления до получения положительного результата.

В качестве контрольной задачи был выбран расчет объема n -мерной гиперболы ($n = 2, 3, \dots, 12$). Объем n -мерной гиперболы, как известно, равен $V_n = \frac{2}{n} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$. Если E_n — гиперкуб — $1 \leq x_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$), то

отношение объемов V_n и E_n $v_n = \frac{V_n}{E_n} = \frac{\pi^{n/2}}{n 2^{n-1} \Gamma(n/2)}$ может быть вычислено с

произвольной степенью точности методом случайных блужданий (в зависимости от количества N повторных реализаций случайного процесса).

Многочисленные проведенные вычисления показали высокую стабильность, качество, и устойчивость результатов работы ДСЧ. Вместе с тем скорость счета значительно повысилась по сравнению с аналогичными расчетами с использованием псевдослучайных чисел.

Что касается проверки «некоррелированности» случайных чисел с помощью вычисления выборочного коэффициента корреляции R , то здесь можно сказать следующее. Как известно, малость абсолютной величины выборочного коэффициента корреляции еще не дает надежной гарантии независимости анализируемых последовательностей.

Резкие изменения величины коэффициента корреляции (даже в случае малых R) свидетельствуют о неоднородности последовательности, о наличии зависимых друг от друга элементов, причем эта зависимость на разных участках последовательности сама по себе непостоянна.

С момента своего построения ДСЧ использовался при решении ряда задач, и неизменно с успехом. Так, с помощью ДСЧ было произведено вычисление по методу Монте-Карло ряда многомерных интегралов, в частности шестимерного интеграла с особенностями внутри пределов интегрирования. Помимо этой задачи, ДСЧ использовался при моделировании ряда стохастических процессов а также в некоторых задачах из теории ошибок. Следует отметить, что счет ряда задач длился десятки часов, и тем не менее, ДСЧ неизменно работал качественно и стабильно.

В настоящее время, на наш взгляд, каждая быстродействующая вычислительная машина должна иметь в своем составе ДСЧ. Это позволит значительно сократить время счета вероятностных задач, решение которых, как правило, в настоящее время пока еще весьма затруднительно.

(Поступила : 10 декабря 1959 г.)

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] СМЕРНОВ, Н. В. — ДУНИН-БАРКОВСКИЙ, И. В.: *Теория вероятностей и математическая статистика в технике*. ГИИТЛ, 1956 г.
[2] КРАМЕР, Г.: *Математические методы статистики*. ИЛ, 1948 г.

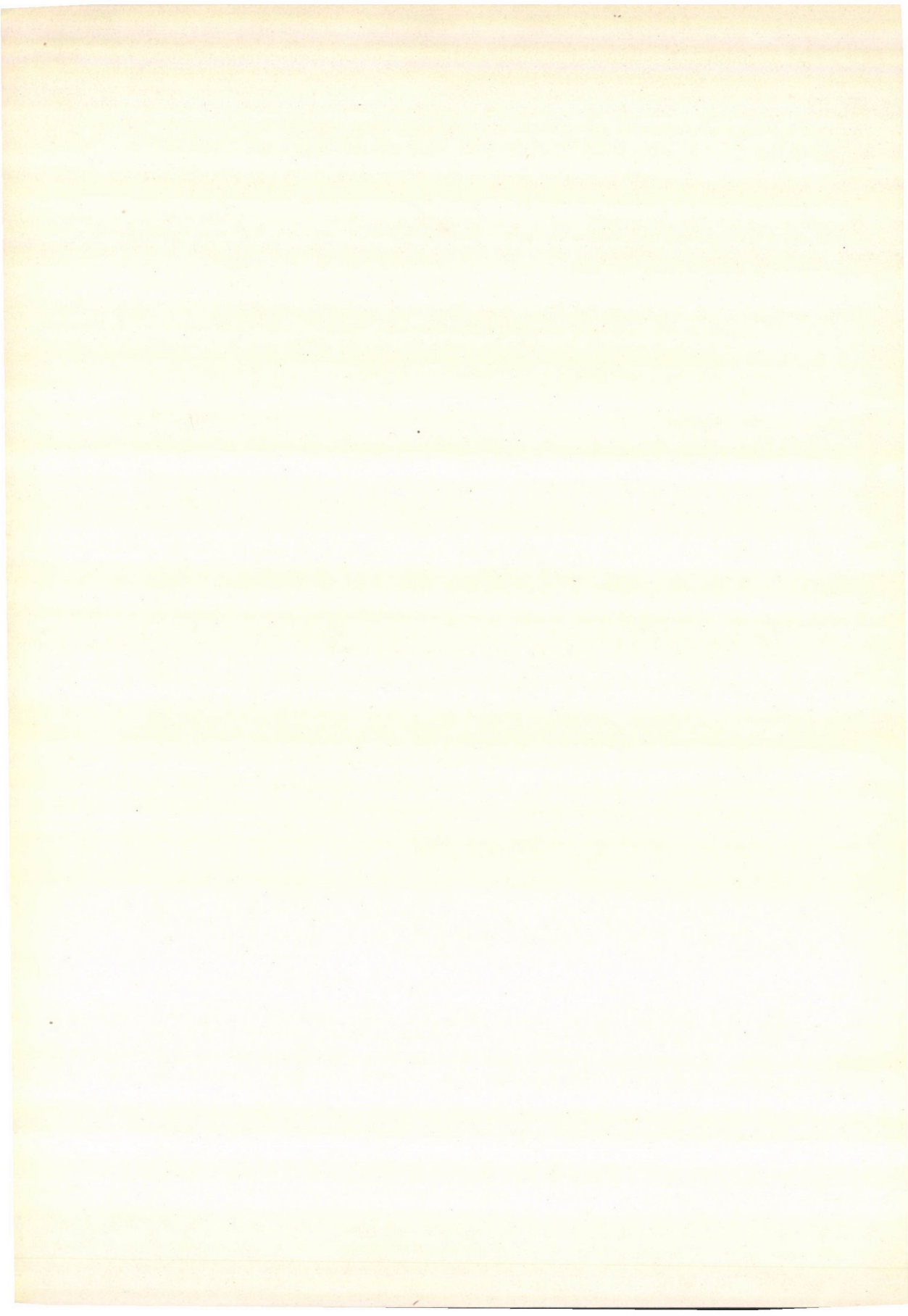
**A SOURCE OF RANDOM NUMBERS WHICH ARE EQUIDISTRIBUTED
IN $[0,1]$**

by

D. I. GOLENKO and V. P. SMIRJAGIN

Abstract

Authors deal with an electronic device yielding random binary numbers; it makes use of occurrences of noise voltage which are greater (or less) than some fixed voltage level. The background from which these random numbers arise is of fully stochastic nature; thus they might have some advantage over the pseudo-random numbers generated by any of the usual methods. — The randomness of the obtained random numbers has been checked by several statistical tests. The results were satisfying; thus the device can be applied, for instance, in solving problems by the Monte Carlo method.



ÜBER GEWISSE ELEMENTENFOLGEN DES HILBERTSCHEN RAUMES

von

KÁROLY KONCZ¹

§ 1.

Definition. Eine abzählbare Einheitsvektorenmenge $\{v_n\}$ des Hilbertschen Raumes heisst eine u -Menge, wenn die Norm der Differenz von jedem Vektorenpaar grösser als $\sqrt{2}$ ist; und heisst eine g -Menge, wenn die Norm der Differenz von jedem Vektorenpaar nicht kleiner als $\sqrt{2}$ ist, aber mindestens für ein Vektorenpaar $\|v_n - v_m\| = \sqrt{2}$ gilt ($n \neq m$).

J. CZIPSZER und P. ERDŐS haben in *Matematikai Lapok* **8** (1957) S. 313 die folgende Aufgabe gestellt:

Es soll bewiesen werden, dass man auf der Oberfläche der Einheitskugel des Hilbertschen Raumes eine unendliche Punktmenge geben kann, in welcher die Entfernung von zwei beliebigen Punkten grösser als $\sqrt{2}$ ist, und wenn eine unendliche Teilmenge der festen Einheitskugel des Hilbertschen Raumes mindestens einen Punkt der Inneren der Kugel enthält, so enthält sie zwei Punkte, deren Entfernung kleiner als $\sqrt{2}$ ist.

Es ist klar, dass diese Aufgabe auf die Existenz von u -Mengen hinweist. Die vorliegende Arbeit geht aus dieser Aufgabe aus, und untersucht die Frage, ob bei u -Mengen bzw. g -Mengen die Entfernungen von $\sqrt{2}$ bedeutend abweichen können oder nicht, bzw. wann diese Abweichung von gewissem Gesichtspunkt aus am grössten ausfällt.

§ 2.

Ist $A = \{v_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) eine g - oder eine u -Menge, so ist — mit der Bezeichnung $\alpha_{mn} = \|\|v_m - v_n\| - \sqrt{2}\|$ ($m = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots; n \neq m$) — bei festem m $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{mn} = 0$. (Dies ist ein Korollar unseres Satzes 4, den wir unten beweisen werden.) Es wäre also natürlich die Summe der Doppelreihe $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(m)}$ als Mass der Abweichung von $\sqrt{2}$ zu wählen, vorausgesetzt, dass diese für jede g - bzw. u -Menge konvergieren würde, was aber nicht der Fall ist. ((m) bedeutet neben dem \sum -Zeichen, dass das m -te Glied der Reihe fehlt, d. h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} = \sum_{n=0}^{m-1} c_{mn} + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_{mn}$.) Es besteht nämlich:

¹ Technische Hochschule, Budapest.

Satz 1. Es gibt eine g -Menge, für welche $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^l = \infty$, wie auch der Exponent $l > 0$ gewählt wird.

Beweis. Setzen wir

$$v_n = (x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{ni}, \dots) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit

$$x_{ni} = 0 \quad \text{für } i \neq n, n+1$$

und

$$x_{nn} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x_{n,n+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dann gilt für jedes m

$$\alpha_{m,m+1} = \sqrt{3} - \sqrt{2},$$

ferner $\alpha_{mn} = 0$, wenn $|m - n| \geq 2$. Also $\{v_n\}$ ist die gesuchte g -Menge.

Nach dem Vorangehenden ist es natürlich zu fragen: Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}$ für alle g - bzw. u -Mengen, oder wenn dies nicht der Fall ist, ist es möglich einen solchen Exponent $\varepsilon > 0$ zu finden, für welchen $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^{1+\varepsilon}$ für alle g - bzw. u -Mengen konvergiert. Die Antwort wird auf diese Frage durch folgende Sätze gegeben:

Satz 2. Man kann eine u -Menge konstruieren, für welche $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^{1+\varepsilon} < \infty$ für jedes m und jedes $\varepsilon > 0$ ist.

Satz 3. Zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ lässt sich aber auch eine g -Menge konstruieren, für welche $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^{1+\varepsilon} = \infty$ für jedes m ist.

Beweis von Satz 2. Es sei

$$(1) \quad v_n = (x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{ni}, \dots) \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$(2) \quad \text{für } n = 0 \text{ setzen wir } x_{00} = 1 \text{ und } x_{0i} = 0, \text{ wenn } (i = 1, 2, 3, \dots);$$

$$(3) \quad \begin{cases} \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \text{ erklären wir } x_{ni} = -\frac{1}{n+1}, \\ \text{wenn } i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ und} \end{cases}$$

$$(4) \quad x_{nn} = \sqrt{1 - \frac{n}{(n+1)^2}},$$

$$(5) \quad \text{ferner } x_{ni} = 0, \text{ wenn } i > n.$$

Es folgt aus (1) bis (5), dass

$$\begin{aligned} \alpha_{0n} &= \|v_0 - v_n\| = \sqrt{2} = \sqrt{(1 - x_{n0})^2 + (n-1)x_{n0}^2 + x_{nn}^2} - \sqrt{2} = \\ &= \sqrt{1 - 2x_{n0} + x_{n0}^2 + nx_{n0}^2 - x_{n0}^2 + 1 - nx_{n0}^2} - \sqrt{2}, \end{aligned}$$

das heisst

$$(6) \quad \alpha_{0n} = \sqrt{2} (\sqrt{1 - x_{n0}} - 1) = \frac{-\sqrt{2} x_{n0}}{\sqrt{1 - x_{n0}} + 1}.$$

Aus (6) folgt $0 < \alpha_{0n} < \frac{\sqrt{2}}{n+1}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{0n}^{1+\varepsilon} < +\infty$ für $\varepsilon > 0$ besteht.

Ähnlich zu den Vorangehenden haben wir für

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \sqrt{(x_{m0} - x_{n0})^2 m + (x_{mm} - x_{n0})^2 + x_{n0}^2 (n - m - 1) + x_{nn}^2} - \sqrt{2} = \\ &= \sqrt{x_{m0}^2 m + x_{n0}^2 m - 2x_{m0}x_{n0} - 2x_{mm}x_{n0} + x_{n0}^2 + x_{mm}^2 + x_{n0}^2(n - m - 1) + x_{nn}^2} - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus $\|v_m\| = \|v_n\| = 1$

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \sqrt{2 - 2x_{n0}(x_{mm} + mx_{m0})} - \sqrt{2} = \\ &= \sqrt{2} \frac{-x_{n0}(x_{mm} + mx_{m0})}{\sqrt{1 - x_{n0}(x_{mm} + mx_{m0})} + 1}. \end{aligned}$$

Auf Grund von (3) sieht man leicht, dass

$$(7) \quad c_m = x_{mm} + mx_{m0} = \left| 1 - \frac{m}{(m+1)^2} - \frac{m}{m+1} \right| > 0,$$

also

$$0 < \alpha_{mn} < \frac{c_m \sqrt{2}}{n+1},$$

und daraus ergibt sich $\sum_{n=m+1}^{\infty} \alpha_{mn}^{1+\varepsilon} < +\infty$ ($\varepsilon > 0$). Damit haben wir den Beweis von Satz 2 beendet.

Beweis von Satz 3.

Hilfssatz 1. Die Einheitsvektorenmenge $\{v_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) des Hilbertschen Raumes ist dann und nur dann eine g -Menge, wenn $(v_m, v_n) \leq 0$ für $m \neq n$; $m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$ und für mindestens ein Vektorenpaar $(v_m, v_n) = 0$ ist; und dann und nur dann eine u -Menge, wenn für jedes Vektorenpaar ($m \neq n$) $(v_m, v_n) < 0$ gilt.

Beweis. Tatsächlich hat man

$$(8) \quad \|v_m - v_n\|^2 = \|v_m\|^2 + \|v_n\|^2 - 2(v_m, v_n) = 2 - 2(v_m, v_n),$$

was zu beweisen war.

Wir setzen nun $\beta_{mn} = -(v_m, v_n)$. Dann besteht

Hilfssatz 2. Es gilt

$$(9) \quad \beta_{mn} = \frac{1}{2}(\alpha_{mn}^2 + 2\sqrt{2}\alpha_{mn})$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots; m \neq n).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \alpha_{mn}^2 + 2\sqrt{2}\alpha_{mn} &= \|v_m - v_n\|^2 - 2\sqrt{2}\|v_m - v_n\| + 2 + \\ &+ 2\sqrt{2}\|v_m - v_n\| - 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 2 - 2(v_m, v_n) + 2 - 4 = 2\beta_{mn}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Ferner wird uns noch nützlich sein der folgende

Hilfssatz 3. Wenn $\{v_n\}$ eine g -Menge oder eine u -Menge ist, so besteht

$$(10) \quad \frac{2\beta_{mn}}{1 + 2\sqrt{2}} < \alpha_{mn}.$$

Beweis. Wenn $\{v_n\}$ eine g -Menge oder eine u -Menge ist, so gilt

$$\alpha_{mn}^2 \leq \alpha_{mn} \leq 2 - \sqrt{2} < 1,$$

so dass (10) folgt aus (9), was zu beweisen war.

Um also eine g -Menge mit $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{1+\varepsilon} = \infty$ zu erhalten, genügt es eine solche zu konstruieren, für welche $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{mn}^{1+\varepsilon} = \infty$ gilt. Eine derartige g -Menge ist die folgende: Es sei $0 < \delta < 1$ und

$$c_k = \frac{d}{1 + k^{2+\gamma}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

wo

$$0 < \gamma < \frac{1 - \varepsilon}{2(1 + \varepsilon)},$$

und $d > 0$ so gewählt wird, dass $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 2\delta - \delta^2$ besteht.

Die Vektoren der Menge seien:

$$(11) \quad \begin{cases} v_n = (x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{ni}, \dots) & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \text{wo } x_{nn} = 1 - \delta, \\ x_{ni} = -c_{k+1}, \text{ wenn } i = 2^{n+1} \cdot k + 2^n & (k = 0, 1, 2, \dots); \\ \text{sonst setzen wir} \\ x_{ni} = 0. \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass

$$\begin{aligned} (v_m, v_{2^m+k \cdot 2^{m+1}}) &= -(1 - \delta) c_{k+1} \\ (m = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

und sonst $(v_m, v_n) = 0$ gilt ($m < n$). Es folgt also $\beta_{mn} \geq 0$ und

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_{mn}^{1+\varepsilon} = (1-\delta)^{1+\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{1+\varepsilon} = (1-\delta)^{1+\varepsilon} d^{1+\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(\frac{1}{2}+\gamma)(1+\varepsilon)}} = \infty,$$

denn $\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)(1 + \varepsilon) < 1$ besteht nach der Voraussetzung. Damit haben wir den Beweis von Satz 3 beendet.

§ 3.

Satz 4. Für jede g - oder u -Menge gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^2 \leq \frac{1}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Beweis.

Hilfssatz 4. Für jede g - oder u -Menge gilt die Ungleichung

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\beta_{mn}^2 \leq 1 \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Beweis. Betrachten wir eine beliebige g - oder u -Menge $\{v_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), und es sei $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) ein System von nichtnegativen Zahlen. Dann ist

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^k {}^{(m)}\mu_n \beta_{mn} \right)^2 &= \left(v_m, \sum_{n=0}^k {}^{(m)}\mu_n v_n \right)^2 \leq \\ &\leq \left\| \sum_{n=0}^k {}^{(m)}\mu_n v_n \right\|^2 = \sum_{p=0}^k {}^{(m)}\mu_p \sum_{n=0}^k {}^{(m)}\mu_n (v_p, v_p) \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^k {}^{(m)}\mu_n^2 (v_n, v_n) = \sum_{n=0}^k {}^{(m)}\mu_n^2. \end{aligned} \right.$$

Inmitten haben wir $(v_m, v_n) \leq 0$ benutzt. Wenn wir $\mu_n = \beta_{mn}$ setzen, so kommt aus (13)

$$\left(\sum_{n=0}^k {}^{(m)}\beta_{mn}^2 \right)^2 \leq \sum_{n=0}^k {}^{(m)}\beta_{mn}^2,$$

und daraus

$$\sum_{n=0}^k {}^{(m)}\beta_{mn}^2 \leq 1.$$

k ist hier beliebig, so dass sich die Behauptung von Hilfssatz 4 ergibt.

Um den Beweis von Satz 4 zu vollenden, erwähnen wir noch

Hilfssatz 5. Wenn $\{v_n\}$ eine g - oder u -Menge ist, so hat man

$$(14) \quad \alpha_{mn} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_{mn}.$$

Beweis.² Wenn wir von der rechten Seite von (9) $\alpha_{mn}^2 \geq 0$ weglassen, so folgt augensichtlich (14) aus (9).

Zurückkehrend zum Beweis von Satz 4, aus (14) und (12) folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\beta_{mn}^2 \leq \frac{1}{2},$$

was zu beweisen war.

Eine geringe Abänderung der Konstruktion im Beweis des Satzes 3 zeigt, dass die Behauptung des Satzes 4 im folgenden Sinne scharf ist:

Satz 5.³ *Zu einer beliebigen, positiven, streng monoton wachsenden, gegen Unendlich strebenden, von unten konkaven Zahlenfolge $\{f(n)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) kann man eine g -Menge konstruieren, für welche*

$$(15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^2 f(n) = \infty \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

ist.

Beweis. Es sei für $m = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots$

$$(16) \quad g_m(k) = f([2k+1]2^m)$$

und in den Intervallen $k \leq x \leq k+1$ sei $g_m(x)$ linear. Mit $h_m(x)$ bezeichnen wir die rechtsseitige Derivierte von $g_m(x)$. Offenbar ist $h_m(x)$ eine positive, monoton abnehmende Funktion.

Betrachten wir die Menge

$$(17) \quad \begin{cases} B = \{v_m\} = \{(x_{m0}, x_{m1}, \dots, x_{mi}, \dots)\} & (m = 0, 1, 2, \dots), \\ \text{wo} \\ x_{mm} = \frac{1}{2}, \\ x_{mi} = -c_{mk}, \text{ wenn } i = 2^m(2k+1) & (k = 0, 1, 2, \dots), \\ \text{sonst} \\ x_{mi} = 0 \end{cases}$$

gesetzt wurde.

Die Zahlen $c_{mk} > 0$ werden mit der Formel

$$(18) \quad c_{mk} = \frac{\sqrt{h_m(k)}}{\sigma_m \cdot g_m(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots)$$

bestimmt, und ferner werde

² Diese Abkürzung meines ursprünglichen, längeren Beweises stammt von Prof. B. SZ.-NAGY.

³ Auf das Bestehen dieses Satzes hat mich Prof. G. ALEXITS aufmerksam gemacht.

$$(19) \quad \sigma_m = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_m(k)}{[g_m(k)]^2}} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

gesetzt.

Es ist evident, dass $\|v_m\| = 1$ ist, sobald die in der Definition von σ_m stehende Reihe konvergent ist. Diese Konvergenz ist aber, wegen der monotonen Abnahme von $\frac{h_m(x)}{[g_m(x)]^2}$ und wegen $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_m(x) = +\infty$, eine Folge der Gleichheit

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_m(x)}{[g_m(x)]^2} dx = \left[-\frac{1}{g_m(x)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{g_m(0)}.$$

Es ist auch klar, dass

$$(v_m, v_{[2k+1]2^m}) = -\frac{1}{2} c_{mk} \quad (m = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots),$$

und sonst im Falle $n > m$ ($v_m, v_n = 0$) gilt. Deswegen ist B tatsächlich eine g -Menge, da $\beta_{mn} \geq 0$ und zum Beispiel $\beta_{23} = 0$ ist.

Endlich ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_{mn}^2 f(n) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}^2 f([2k+1]2^m) = \\ &= \frac{1}{4 \sigma_m^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_m(k)}{[g_m(k)]^2} g_m(k) = +\infty, \end{aligned}$$

da auch $\frac{h_m(x)}{g_m(x)}$ monoton abnehmend ist und

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_m(x)}{g_m(x)} dx = [\ln g_m(x)]_0^{+\infty} = +\infty$$

besteht. Auf Grund von der Ungleichheit (10) ergibt sich die Behauptung des Satzes 5.

§ 4.

Bezeichnen wir jetzt das System aller g -Mengen mit \mathfrak{G} , das System aller u -Mengen mit \mathfrak{U} , ferner die Abweichungssummen für eine Menge A (wo $A \in \mathfrak{G}$ oder $A \in \mathfrak{U}$) mit $s_m(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn}^2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Der Satz 4 sagt, dass die Menge der Abweichungssummen von oben beschränkt ist und zwar ist $\frac{1}{2}$ gewiss eine obere Schranke, d. h.

$$\begin{aligned} s_m(A) &\leq \frac{1}{2}, \quad \text{wenn } A \in \mathfrak{G} \quad \text{oder} \quad A \in \mathfrak{U} \\ (m &= 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Weiterhin ist die Frage natürlich, ob es für die $s_m(A)$ eine kleinere obere Schranke als $\frac{1}{2}$ gibt. Es ist einzusehen, dass die Antwort negativ ist, es ist nämlich leicht eine Menge $A \in \mathfrak{G}$ bei gegebenem $\varepsilon > 0$ zu konstruieren, mit $s_m(A) > \frac{1}{2} - \varepsilon$ für ein einziges m .

Weiterhin können wir noch fragen: Existiert es eine solche Menge A ($A \in \mathfrak{G}$ oder $A \in \mathfrak{U}$), bei welcher für mehrere m oder für jedes m die $s_m(A)$ sich beliebig zu $\frac{1}{2}$ nähern? Auf diese Frage gibt der nachfolgende Satz in gewisser Hinsicht eine Antwort:

Satz 6. *Zur beliebig vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Menge $A \in \mathfrak{G}$, für welche bei $m = 0, 1, 2, \dots$*

$$(20) \quad s_{2m}(A) > \frac{1}{2} - \varepsilon$$

ist.

Beweis. Es sei A eine Vektorenfolge $A = \{r_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$, und setzen wir

$$r_{2m} = v_m, \quad r_{2m+1} = w_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

So ist

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \{v_m : m = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{w_m : m = 0, 1, 2, \dots\}, \\ \text{wo} \\ v_m = (x_{m0}, x_{m1}, \dots, x_{mi}, \dots) \\ \text{und} \\ x_{mi} = c_k \text{ für } i = 2^{m+1}k + 2^m - 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ x_{mi} = 0 \text{ für } i \neq 2^{m+1}k + 2^m - 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ \text{ferner} \\ w_m = (y_{m0}, y_{m1}, \dots, y_{mi}, \dots), \\ \text{wo} \\ y_{mm} = -1, \\ y_{mi} = 0 \text{ für } i \neq m; \end{array} \right.$$

die Zahlen $c_k > 0$ sind so gewählt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = 1$ ist und

$$c_k < \left(\frac{2}{\sqrt{1-2\varepsilon}} - 1 \right)^2 - 1 = \delta$$

besteht.

Es ist klar, dass $A \in \mathfrak{G}$. Betrachten wir jetzt

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{2m}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}(\|v_m - v_n\| - \sqrt{2})^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (\|v_m - w_n\| - \sqrt{2})^2 \\ (m = 0, 1, 2, \dots). \end{array} \right.$$

Aus (21) folgt, da $\|v_m - v_n\| - \sqrt{2} = 0$ ist, wenn $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, 1, 2, \dots$; $n \neq m$,

$$\begin{aligned} s_{2m}(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\|v_m - v_n\| - \sqrt{2})^2 = [\sqrt{(c_0 + 1)^2 + 1 - c_0^2} - \sqrt{2}]^2 + \\ &+ [\sqrt{(c_1 + 1)^2 + 1 - c_1^2} - \sqrt{2}]^2 + \dots + [\sqrt{(c_n + 1)^2 + 1 - c_n^2} - \sqrt{2}]^2 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\sqrt{2c_n + 2} - \sqrt{2}]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c_n^2}{[\sqrt{c_n + 1} + 1]^2} > \\ &> \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c_n^2}{(\sqrt{\delta + 1} + 1)^2} = \frac{2}{(\sqrt{\delta + 1} + 1)^2} = \frac{1}{2} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit haben wir den Beweis von Satz 6 beendet.

Zum Schluss möchte ich den Herren Prof. G. ALEXITS, Prof. Á. CSÁSZÁR, Prof. P. ERDŐS, Prof. B. SZ.-NAGY und Adj. D. KRÁLIK für ihre bereitwillige und herzliche Hilfe, die sie mir bei der Fertigstellung dieser Arbeit dargeboten haben, aufrichtigen Dank sagen.

(Eingegangen: 7. März, 1960.)

О НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЭЛЕМЕНТОВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

К. KONCZ

Резюме

В § 1 дается следующее

Определение: Множество единичных векторов гильбертова пространства $\{v_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) называется u -множеством, если $\|v_m - v_n\| > \sqrt{2}$ для каждого $m \neq n$; и g -множеством, если $\|v_m - v_n\| \geq \sqrt{2}$ для каждого $m \neq n$, но по крайней мере для одной пары векторов $\|v_m - v_n\| = \sqrt{2}$.

J. CZIPSZEW и P. EYDŐS в 1957 году поставили задачу, в которой содержится указание на существование u -множества.

Настоящая работа в сущности занимается исследованием того, может ли быть уклонение $\|v_m - v_n\| - \sqrt{2}$ (обозначаемое через α_{mn}) значительным.

§ 2 изучает вопрос, что целесообразно было бы выбрать за меру уклонений. Мы доказываем, что $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^l$ ($l > 0$) и $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^{1+\varepsilon}$ ($0 < \varepsilon < 1$) негодны, потому что эти ряды могут расходиться (${}^{(m)}$ обозначает, что отсутствует член, который имеет индекс m ; т. е. $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}c_{mn} = \sum_{n=0}^{m-1} c_{mn} + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_{mn}$).

В § 3 доказывается, что $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^2$ пригодная мера, потому что

$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^2 < \frac{1}{2}$ для всех g - или u -множеств и что эта теорема сходимости остра в некотором смысле.

В § 4 для g - или u -множества A мы употребляем обозначение

$$s_m(A) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(m)}\alpha_{mn}^2$$

и доказываем, что к каждому $\varepsilon > 0$ можно найти такое g -множество A , для которого

$$s_{2m}(A) > \frac{1}{2} - \varepsilon \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

BEMERKUNG ZUR ARBEIT »ÜBER GEWISSE ELEMENTENFOLGEN DES HILBERTSCHEN RAUMES« VON K. KONCZ

von
A. RÉNYI

Es sei $\{f_n\}$ eine unendliche Folge von Elementen eines Hilbertschen Raumes H , welche der Bedingungen

$$a) \quad \|f_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

und

$$b) \quad \|f_n - f_m\| \geq \sqrt{2} \quad \text{für } n \neq m$$

genügt. Offenbar kann $b)$ durch die Bedingung

$$(1) \quad (f_n, f_m) \leq 0 \quad \text{für } n \neq m$$

ersetzt werden, da falls $a)$ erfüllt ist, $b)$ und (1) gleichbedeutend sind. Herr K. KONCZ [1] untersucht verschiedene charakteristische Masszahlen für solche Folgen. In dieser Note betrachten wir einen weiteren solchen Masszahl, nämlich die Norm des quadratischen Formes $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f_n, f_m) x_n x_m$ (wobei die x_n reelle Veränderlichen sind). Wir setzen

$$(2) \quad Q(\{f_n\}) = \sup_{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f_n, f_m) x_n x_m \right|$$

und beweisen folgenden

Satz 1. *Es gilt für jede Folge $\{f_n\}$, welche den Bedingungen $a)$ und $b)$ genügt*

$$(3) \quad Q(\{f_n\}) \leq 2.$$

Die Ungleichung (3) ist bestmöglich, d. h. es gibt eine den Bedingungen $a)$ und $b)$ genügende Folge $\{f_n\}$ mit $Q(\{f_n\}) = 2$.

Beweis. Es ist

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f_n, f_m) x_n x_m = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n \right\|^2 \geq 0,$$

also

$$(5) \quad - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f_n, f_m) x_n x_m \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

Somit ist wegen (1)

$$(6) \quad \left| \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f_n, f_m) x_n x_m \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2,$$

also

$$(7) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f_n, f_m) x_n x_m \right| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

Damit ist (3) bewiesen.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, sei H das Raum der Folgen $f = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k)}, \dots)$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)^2} < +\infty$, und der üblichen Definition des inneren Produkts. Es sei $f_n = (f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(k)}, \dots)$ mit $f_n^{(n)} = +\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_n^{(n+1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_n^{(k)} = 0$ für $k \neq n$, $k \neq n+1$, dann genügt, wie es Herr KONCZ bemerkt hat, die Folge $\{f_n\}$ der Bedingungen a) und b), und zwar ist

$$(8) \quad (f_n, f_m) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für } |m-n|=1, \\ 0 & \text{für } |m-n|>1. \end{cases}$$

Es sei $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{N}}$ für $n = 1, 2, \dots, N$ und $x_n = 0$ für $n > N$, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1 \text{ und}$$

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f_n, f_m) x_n x_m = 2 - \frac{1}{N},$$

also $Q(\{f_n\}) = 2$. Damit ist der Beweis des Satzes 1. zu Ende geführt.

Nach einem bekannten Satz ([2]; siehe auch [3], Lemma 1.) folgt aus

$$(10) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f_n, f_m) x_n x_m \right| \leq Q \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2,$$

dass für jedes $g \in H$

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (g, f_n)^2 \leq Q \|g\|^2;$$

also für $g = f_m$ gilt, wenn wir die Bezeichnung

$$(12) \quad T_m = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} (f_n, f_m)^2$$

eingeführen

$$(13) \quad T_m \leq Q(\{f_n\}) - 1 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

In [1] werden die Summen

$$(14) \quad S_m = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} (\|f_n - f_m\| - \sqrt{2})^2$$

untersucht. Da, wie Herr KONCZ bemerkt, offenbar

$$\|f_n - f_m\| - \sqrt{2} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} (f_n, f_m)$$

gilt, so ist

$$(15) \quad S_m \leq \frac{1}{2} T_m$$

und somit wegen (13)

$$(16) \quad S_m \leq \frac{1}{2} (Q(\{f_n\}) - 1).$$

(16) kann wegen (3) als Verschärfung des Satzes 4. von [1] betrachtet werden.

(Eingegangen: 27. September, 1960.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] KONCZ, K.: "Über gewisse Elementenfolgen des Hilbertschen Raumes." *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5** (1960) A 255—264.
- [2] BOAS JR., R. P.: "A general moment problem." *Amer. Journ. of Math.* **63** (1941) 361-370.
- [3] RÉNYI, A.: "New version of the probabilistic generalization of the large sieve of Linnik." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 217-226.

ON TESTING FOR NORMALITY

K. SARKADI

Introduction

This paper deals with the following two problems:

1. How to apply the test of normality or the homogeneity test of BARTLETT or COCHRAN for the error term if we have one observation per cell in a two-way classification table?

2. How to extend the application of any test of goodness of fit for testing the normality on the basis of a simple sample if the expectation and the variance (or at least one of them) are unknown?

The first problem is of practical interest and was suggested to the author by P. WELLISCH¹. It is known that most of the variance analysis methods start from the supposition of a normally distributed error term. However, as far as I know, in the textbooks on variance analysis no method of proving this supposition in the case of single observation per cell is treated.

Here the difficulty arises from the fact that forming the differences between the observed values and their predictions these will not be independent. It is known however, that dependent normally distributed variables can easily be linearly transformed into independent ones. Our method of solving the above problem is based on this fact.

For that reason we have to choose such linear transforms of the original values which are mutually uncorrelated with expectation 0 and common variance. In order that the distribution of the transformed variables should be near to the distribution of the error terms (even in the case of alternative hypothesis) it is necessary that each of the transformed values should be highly correlated with one of the original values. This problem is treated in §§ 2—3.

The second problem is of interest as well. At present the χ^2 -test is the only one which is adapted to the case of unknown parameters. The transformations given in Sections 1 and 4 allow, however, to apply any test of goodness of fit for testing normality. If only the expectation is unknown the solution is based on the same principle as in the first problem. The general case requires nonlinear transformation.

Of course the methods may be applied if we have several samples the theoretical parameters of which are different and unknown. For this case DUNIN-BARKOVSKY and SMIRNOV [1] have given a transformation reducing the problem to simple goodness of fit test. But while the transformation in

¹ Secretariat of the Council of Plant-Variety Testing, Budapest.

[1] results for the goodness of fit test only as many data as is the number of samples, our transformation decreases the number of data only by the number of unknown constants.

Similar transformation is given for the case of the Gamma parent distribution at the end of § 4. This transformation eliminates the scale parameter from the distribution of the data.

§ 1. Simple sample with unknown expectation

Let $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ be independent random variables with common variance σ^2 and common expectation μ . Let

$$\bar{\mathbf{x}}' = \frac{n\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_n\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_n\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}.$$

It is easy to prove that the following differences:

$$(1) \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}', \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}', \dots, \mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1} - \bar{\mathbf{x}}'$$

have the common expectation 0 and common variance σ^2 , further that they are uncorrelated. The first statement is trivial, the two latter can be e.g. easily seen from the fact that $\bar{\mathbf{x}}_{n-1} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_{n-1})/(n-1)$ and $(\bar{\mathbf{x}}_{n-1} - \mathbf{x}_n)/\sqrt{n}$ have the same variance $\sigma^2/(n-1)$, both of them are uncorrelated to $\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_{n-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$); and that $\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}_{n-1} + (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_{n-1})$, $\mathbf{y}_i = (\bar{\mathbf{x}}_{n-1} - \mathbf{x}_n)/\sqrt{n} + (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_{n-1})$ and thus the random vectors $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}\}$ and $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n-1}\}$ have the same dispersion matrix.

It follows that if the distribution of \mathbf{x}_i is normal then the variates $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n-1}$ are mutually independent equally distributed normal variates.

The correlation coefficient of \mathbf{x}_i and \mathbf{y}_i is

$$\mathbf{R}\{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\} = 1 - \frac{1}{n + \sqrt{n}}.$$

The transformation (1) is optimal among all linear transformations into $n-1$ uncorrelated variates with 0 expectation in the sense that $\min_i \mathbf{R}\{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\}$ is maximized by (1).

Proof. The statement is equivalent to the following: If in an n by n orthogonal matrix $C = \{c_{ij}\}$ $c_{n1} = c_{n2} = \dots = c_{nn} = 1/\sqrt{n}$ then $\min_{i \leq n-1} c_{ii} \leq 1 - 1/(n + \sqrt{n})$. (The equivalency is easy to be seen. The transformation matrix C gives a transformed vector whose first $n-1$ elements provide a linear transformation of $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ into $n-1$ mutually uncorrelated variables $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n-1}$ uncorrelated to $\bar{\mathbf{x}}$ as well, i.e. having 0 expectation independently of μ . Apart from constant factors, there is a 1:1 correspondance between all possible such transformations and the possible values of C .)

Evidently for some $i \leq n-1$ $|c_{in}| \geq 1/\sqrt{n}$. As

$$\mathbf{R}\{\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_i\} = c_{ii}\sqrt{n/(n-1)},$$

$$\mathbf{R}\{\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_i\} = c_{in} \sqrt{n/(n-1)}, \quad \mathbf{R}\{\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}\} = -1/(n-1)$$

and from the geometrical interpretation of the linear functions of $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ it is to be seen that²

$$\arccos \mathbf{R}\{\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_i\} \geq |\arccos \mathbf{R}\{\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_i\} - \arccos \mathbf{R}\{\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}\}|$$

the following inequality is valid:

$$c_{ii} = \mathbf{R}\{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\} \leq 1 - \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

and thus the above statement is proved.

The transformation given by (1) gives the possibility of applying any test of goodness of fit in case of unknown mean and known variance and we can take into account that the expectation is unknown not only in applying a χ^2 -test but in that of KOLMOGOROV, SMIRNOV and RÉNYI too. In addition, if we apply the χ^2 -test the diminishing of the degrees of freedom due to the estimation of the expectation can be avoided.

The element \mathbf{x}_n plays a special role among the sample elements in the transformation. It is chosen for the sake of simplicity; of course any of the sample elements can be randomly chosen.

§ 2. Two-way classification, one observation per cell

Let the variates \mathbf{x}_{ij} ($i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, v$) be independent with common variance σ^2 and with expectations

$$\mathbf{E}\{\mathbf{x}_{ij}\} = \mu_{..} + \mu_{i.} + \mu_{.j}$$

where the constants $\mu_{..}, \mu_{i.}, \mu_{.j}$ are unknown.

Now we can define the following $(s-1)(v-1)$ uncorrelated variates:

$$(2) \quad \mathbf{y}_{ij} = \mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}'_{i.} - \mathbf{x}'_{.j} + \mathbf{x}'_{..}$$

$$(i = 1, 2, \dots, s-1; j = 1, 2, \dots, v-1)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_{i.} &= \frac{\sum_{j=1}^v \mathbf{x}_{ij} + \mathbf{x}_{iv} \sqrt{v}}{v + \sqrt{v}} \\ \mathbf{x}'_{.j} &= \frac{\sum_{i=1}^s \mathbf{x}_{ij} + \mathbf{x}_{sj} \sqrt{s}}{s + \sqrt{s}} \\ \mathbf{x}'_{..} &= \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^v \mathbf{x}_{ij} + \sqrt{v} \sum_{i=1}^s \mathbf{x}_{iv} + \sqrt{s} \sum_{j=1}^v \mathbf{x}_{sj} + \mathbf{x}_{sv} \sqrt{sv}}{(s + \sqrt{s})(v + \sqrt{v})} \end{aligned}$$

² In geometrical interpretation this is the triangle inequality in the spherical triangle determined by the vectors corresponding to the variates $\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_i$.

As shown below $\text{cov}(\mathbf{y}_{ij}, \mathbf{y}_{kl}) = 0$ for $(i, j) \neq (k, l)$ and the variates \mathbf{y}_{ij} have common expectation and variance $\mathbf{E}\{\mathbf{y}_{ij}\} = 0$ and $\mathbf{D}^2\{\mathbf{y}_{ij}\} = \sigma^2$.

Proof. The quantities $\mathbf{x}_{1j} - \mu_{1.}, \mathbf{x}_{2j} - \mu_{2.}, \dots, \mathbf{x}_{sj} - \mu_{s.}$ have the common expectations $\mu_{.j} - \mu_{..}$ and variance σ^2 . Thus applying the transformation (1), we obtain the transforms \mathbf{y}'_{ij} having the expectation 0 and variance σ^2 . The quantities \mathbf{y}'_{ij} and \mathbf{y}'_{kl} will be independent for $j \neq l$ because of the independence of \mathbf{x}_{ij} 's and uncorrelated for $j = l, i \neq k$ because of the property of the transformation. Now we apply the transformation (1) to the series $\mathbf{y}'_{i1}, \mathbf{y}'_{i2}, \dots, \mathbf{y}'_{iv}$ which leads — after some calculation — to the quantities \mathbf{y}_{ij} defined by (2). The quantities \mathbf{y}_{ij} thus have the expectation 0 and variance σ^2 . It follows in case of a normal parent distribution that the quantities \mathbf{y}_{ij} will be mutually independent. As their first two moments do not depend on the assumption of normality they will be mutually uncorrelated in the non-normal case.

The correlation coefficient between \mathbf{x}_{ij} and \mathbf{y}_{ij} is

$$(3) \quad R\{\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{y}_{ij}\} = \left(1 - \frac{1}{s + \sqrt{s}}\right) \left(1 - \frac{1}{v + \sqrt{v}}\right).$$

\mathbf{x}_{ij} will be called basic element if it has a highly correlated correspondent among the transformed values. The above transformation has the property that the basic elements form an $s - 1$ by $v - 1$ submatrix in the original matrix of the \mathbf{x}_{ij} s. This property is advantageous both for the purpose of simplicity of the formulae and that of applying COCHRAN's or BARTLETT's test. But the author does not know whether the transformation is optimal in the sense of § 1. The intercorrelations between the basic elements can be decreased in absolute value by other choices of the basic elements. This is, e. g. the case for $s = v = 3$ if we choose $\mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{13}, \mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{31}$ for basic elements. One could expect that such choices may provide an increased $\min_{i,j} R\{\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{y}_{ij}\}$. In the mentioned special case, however, this does not hold. The optimal transformation with the mentioned choice of basic elements is

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{y}_{12} &= -\frac{1}{4} [(2 + \sqrt{6})\mathbf{u}_{22} + (4 - \sqrt{6})\mathbf{u}_{23} + (4 + \sqrt{6})\mathbf{u}_{32} + (2 - \sqrt{6})\mathbf{u}_{33}] \\ \mathbf{y}_{13} &= -\frac{1}{4} [(2 - \sqrt{6})\mathbf{u}_{22} + (4 + \sqrt{6})\mathbf{u}_{23} + (4 - \sqrt{6})\mathbf{u}_{32} + (2 + \sqrt{6})\mathbf{u}_{33}] \\ \mathbf{y}_{21} &= -\frac{1}{4} [(4 + \sqrt{6})\mathbf{u}_{22} + (2 + \sqrt{6})\mathbf{u}_{23} + (2 - \sqrt{6})\mathbf{u}_{32} + (4 - \sqrt{6})\mathbf{u}_{33}] \\ \mathbf{y}_{31} &= -\frac{1}{4} [(4 - \sqrt{6})\mathbf{u}_{22} + (2 - \sqrt{6})\mathbf{u}_{23} + (2 + \sqrt{6})\mathbf{u}_{32} + (4 + \sqrt{6})\mathbf{u}_{33}] \end{aligned}$$

where

$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{x}_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \mathbf{x}_{kj} - \frac{1}{3} \sum_{l=1}^3 \mathbf{x}_{il} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{x}_{kl}$$

In this case

$$(5) \quad R\{x_{ij}, y_{ij}\} = \frac{1 + \sqrt{6}}{6}$$

for $(i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)$. Formula (3) gives for this case $R\{x_{ij}, y_{ij}\} = (2 + \sqrt{3})/6$ which is larger than (5).

The transformation (2) gives the possibility of testing the normality of the error term in our case. In addition it allows the testing of homogeneity of variance between rows or between columns or between different tables of data with COCHRAN's or BARTLETT's criterion.

Evidently any row and column may play the role of the v -th row and s -th column in the written formulae. The choosing of them however, must not depend on the actual values.

§ 3. The general case of variance analysis

The case of n -way classification can be treated in the same way. In principle, the method can be extended for any case of variance analysis.

§ 4. Transforms independent from variance

In this Section there are given transforms which are independent not only from the unknown expectation but from the unknown variance too. In case of normality tests in general not only the expectation but the variance is unknown too. Thus our transformation gives the possibility of applying any test of goodness of fit for the general case of testing normality. Let us suppose we have performed the transformation given in Sections 2, 3 or 4 and we have ν variates y_1, y_2, \dots, y_ν with 0 expectation and variance σ^2 . Suppose they are independent and normally distributed. We define the following transforms:

$$(6) \quad z_i = \operatorname{sg} y_i I_{t_i} \left(\frac{1}{2}, \frac{\nu - i}{2} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, \nu - 1)$$

where

$$t_i = \frac{y_i^2}{y_i^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_\nu^2}$$

and

$$I_t(p, q) = \frac{\int_0^t x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx}{\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx}$$

is the incomplete Beta-function tabulated in [3].

Since $I_t \left(\frac{1}{2}, \frac{\nu - i}{2} \right)$ is the distribution function of t_i , the variates z_i defined by (6) are uniformly distributed in the interval $(-1, 1)$. According to a theorem of E. LUKÁCS [2] $y_i^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_\nu^2$ and $y_i^2 / (y_{i+1}^2 + \dots + y_\nu^2)$

are independent which implies that the variates $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{v-1}$ are mutually independent.

If the alternative hypothesis holds the variates \mathbf{z}_i are in general not identically distributed and not independent. If v tends to infinity and i remains constant the distribution of \mathbf{z}_i tends to the distribution of $2\Phi(\mathbf{y}_i) - 1$ where

$$\Phi(y) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx.$$

We may apply any test of goodness of fit for the \mathbf{z}_i 's.

The distribution of \mathbf{z}_i 's with small $v - i$ for the alternative hypothesis requires further investigations. Probably the goodness of fit tests can be ameliorated for large series if we omit a few values from the end of the series of \mathbf{z}_i 's.

The results of this Section can be extended easily for the case of a Gamma parent distribution. If $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_v$ are independently distributed and have a common Gamma distribution with density function

$$\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}$$

where λ is known but α is unknown the transformation

$$\mathbf{z}_i = I_{\mathbf{t}_i}(\lambda, (v - i)\lambda)$$

$$(i = 1, 2, \dots, v - 1)$$

can be applied, where

$$\mathbf{t}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_{i+1} + \dots + \mathbf{w}_v}.$$

The variates \mathbf{z}_i defined by the above formula are uniformly distributed in the interval $(0, 1)$. Their mutual independency follows again from the theorem of LUKÁCS [2].

The above transformation gives the possibility of applying any test of goodness of fit in the case of a Gamma distribution with unknown α and known λ .

(Received January 27, 1960.)

REFERENCES

- [1] ДУНИН-БАРКОВСКИЙ, И. В — СМЕРНОВ, Н. В.: *Теория вероятностей и математическая статистика в технике*. Гостехиздат, Москва, 1955, pp. 354—360.
- [2] LUKÁCS, E.: "A characterization of the Gamma distribution." *Annals of Mathematical Statistics* **26** (1955) 319—324.
- [3] PEARSON, K.: *Tables of the Incomplete Beta-Function*. Cambridge University Press, Cambridge, 1948.

О ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗЫ НОРМАЛЬНОСТИ

К. SARKADI

Резюме

Работа занимается двумя следующими проблемами.

1. Как можно исследовать нормальность распределения остаточного члена или произвести пробу ВАРТЛЕТТ-а или СОСНВАН-а относительно однородности, если в таблице двусторонней классификации имеется одно наблюдение в каждой ячейке?

2. Как можно применять любой метод проверки гипотезы нормальности, если не известно математическое ожидание, дисперсия или оба эти значения?

Даются преобразования, делающие возможным проведение вышеуказанных исследований.

Формула (1) в случае простой пробы, а формула (2) в случае таблицы двусторонней классификации с одним наблюдением в системе преобразуют величины в величины без корреляции, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной исходной. Применяя преобразование (6) к полученным таким образом величинам, получим независимые значения z_i , распределение которых будет равномерным на отрезке $[-1, +1]$, если исходное распределение было нормальным.

ON A THEOREM OF PAUL LÉVY

G. SZEKERES¹

1. Let $f(x)$ be a continuous strictly increasing function such that

$$(1) \quad f(x) > x \quad \text{for } x > a.$$

A family of fractional iterates of $f(x)$ is obtained by considering Abel's equation

$$(2) \quad A(f(x)) = A(x) + 1, \quad x > a.$$

If $A(x)$ is a continuous and strictly increasing solution of this functional equation and $A_{-1}(y)$ is the inverse of $A(x)$ (so that $A_{-1}(A(x)) = x$ for $x > a$), then

$$(3) \quad f_{\sigma}(x) = A_{-1}(A(x) + \sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty$$

defines a family of functions with the property that

$$(4) \quad f_{\sigma}(f_{\tau}(x)) = f_{\sigma+\tau}(x), \quad f_1(x) = f(x).$$

In particular $f_0(x) = x$ and $f_{-1}(x)$ is the inverse of $f(x)$. The interpretation of (3) and (4) is that they hold for sufficiently large x ; for instance $f_{\sigma}(x)$ in (3) is defined for $x > a$ if $\sigma \geq 0$ and for $x > A_{-1}(A(a) - \sigma)$ if $\sigma < 0$.

For $\sigma = n$, $n = 1, 2, \dots$, $f_n(x)$ is the n -th natural iterate of $f(x)$,

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

hence independent of $A(x)$. For non-integer values of σ , $f_{\sigma}(x)$ is not determined uniquely but depends on the particular solution of the functional equation (1). To enforce uniqueness we need more information about the expected behaviour of the iterates.

Suppose that

$$(5) \quad f(x) = x + \omega(x)$$

where $\omega(x)$ is differentiable and $\omega'(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$. By induction one easily verifies that

$$(6) \quad f_n(x) = x + \omega_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

¹ University of Adelaide, Adelaide, South Australia.

where $\omega'_n(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$ and

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\omega_n(x)}{\omega(x)} = n.$$

To prove (7) for $n+1$, note that

$$\begin{aligned} \omega_{n+1}(x) &= f(x + \omega_n(x)) - x = \omega_n(x) + \omega(x + \omega_n(x)) = \\ &= \omega_n(x) + \omega(x) + \omega_n(x) \omega'(x + \theta \omega_n(x)), \quad 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

and this is asymptotically equal to $(n+1)\omega(x)$ if (7) is true for n , since $\omega'(x + \theta \omega_n(x)) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Note that

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(x) = \infty$$

for every $x > a$, by (1). Similarly it can be shown that

$$f_{-n}(x) = x + \omega_{-n}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

where

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\omega_{-n}(x)}{\omega(x)} = -n.$$

It is therefore quite natural to ask whether there exists a family of iterates

$$(9) \quad f_\sigma(x) = x + \omega_\sigma(x)$$

such that

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\omega_\sigma(x)}{\omega(x)} = \sigma$$

for every real σ .

An affirmative answer was given by PAUL LÉVY in 1928;² he showed that if $\omega'(x)$ is of bounded variation then such a family does in fact exist and is uniquely determined by $f(x)$. This is briefly LÉVY's argument:

Suppose first that there exists a family of iterates (9) with the asymptotic property (10). Let $y = f_\sigma(x)$ and write $x_n = f_n(x)$, $y_n = f_n(y)$ so that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ by (8). We have $f_n(y) = f_n(f_\sigma(x)) = f_\sigma(f_n(x))$, i.e. $n \rightarrow \infty$

$$y_n = x_n + \omega_\sigma(x_n)$$

so that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - x_n}{\omega(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - x_n}{x_{n+1} - x_n} = \sigma$$

by (10). In other words, the index of iteration σ is determined in a perfectly unique manner from the formula

$$(11) \quad \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - x_n}{x_{n+1} - x_n}$$

for any pair of values $x > a$, $y > a$.

² Ann. Mat. Pura Appl. (4) 5 (1928), p. 282.

On the other hand, it is easy to show that the limit (11) actually exists, at least for $x \leq y \leq f(x)$, provided that $\omega'(x)$ is of bounded variation. For denoting by σ_n the right hand member of (11), one finds by a simple calculation

$$(12) \quad \sigma_{n+1} - \sigma_n = \sigma_n \frac{\omega(x_n)}{\omega(x_{n+1})} [\omega'(\xi_n) - \omega'(\xi'_n)]$$

where ξ_n, ξ'_n are between x_n and x_{n+1} . But $0 \leq \sigma_n \leq 1$ since $x \leq y \leq f(x)$, $\omega(x_n)/\omega(x_{n+1}) \rightarrow 1$ since $\omega'(x_n) \rightarrow 0$, and $\sum_n |\omega'(\xi_n) - \omega'(\xi'_n)|$ converges since $\omega'(x)$ is of bounded variation. Hence $\sum_n |\sigma_{n+1} - \sigma_n|$ converges and $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ exists. Note that the convergence of $\sum_n |\sigma_{n+1} - \sigma_n|$ is uniform for fixed x and $x \leq y \leq f(x)$ and in fact uniform for $a < b \leq x \leq f(b)$, $x \leq y \leq f(x)$.

LÉVY's argument is incomplete in several respects.³ First, if we write $\sigma = \lambda(x, y)$, it is necessary to show that for fixed x , $\lambda(x, y)$ is continuous and strictly increasing in y . For only then can we say with certainty that $\sigma = \lambda(x, y)$ is solvable for y and that the function $y = f_\sigma(x)$ does indeed exist (for sufficiently large x). Secondly, it is necessary to show that $f_\sigma(x)$ has the required asymptotic properties.

The purpose of this note is to establish LÉVY's result in a rigorous manner. More precisely, we shall prove:

Theorem. Suppose that $f(x) = x + \omega(x)$ where $\omega(x) > 0$, $\omega'(x)$ is of bounded variation for $x > a$, and $\omega'(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$. Then (a) the limit (11) exists for every pair of values $x > a$, $y > a$. (b) $\sigma = \lambda(x, y)$ is continuous and strictly increasing in y . (c) $\lambda(y, x) = -\lambda(x, y)$. (d) If $y = f_\sigma(x)$ denotes the solution for y of $\sigma = \lambda(x, y)$ then the $f_\sigma(x)$ form a family of fractional iterates of $f(x)$ with the asymptotic property (10).

A similar result holds for functions which have the form $f(x) = x - \omega(x)$ in a (right) neighbourhood of 0. If $\omega(x) > 0$, $\omega'(x)$ is of bounded variation for $0 < x < a$ and $\omega'(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow 0+$, then $f(x)$ has a uniquely determined family of fractional iterates $f_\sigma(x) = x - \omega_\sigma(x)$ with

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\omega_\sigma(x)}{\omega(x)} = \sigma$$

where σ is again given by (11). Modifications of the proof are trivial and details will be omitted.

The requirement that $\omega'(x)$ be of bounded variation is essential and relaxation of this condition seems hardly possible. If $\omega'(x)$ is of unbounded variation, the limit (11) need not exist at all, as for instance when $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sin x$, $x > 1$. In other cases the limit (11) may exist for all

³ LÉVY's chief aim was a theory of regular growth of real functions and the above theorem appeared as an auxiliary result in a largely heuristic work. From the point of view of the theory of iterations, the theorem obviously has an interest of its own.

pairs x, y , but $\sigma = \lambda(x, y)$ is a constant in an interval of y so that the equation is not solvable for y . An example of this kind is

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{n(n+1)} \sin^2 \frac{1}{2} \pi n(x-n), \quad n \leq x \leq n + \frac{2}{n},$$

$$f(x) = x + 1, \quad n + \frac{2}{n} \leq x \leq n + 1, \quad n = 2, 3, \dots$$

In fact, if $x = 2$ then $x_n = n + 2$ and if $y = \frac{5}{2}$ then $y_n = n + 2 + \frac{1}{n+2}$:

Hence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - x_n}{x_{n+1} - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0.$$

2. Proof of the theorem. We have already verified (a). Continuity of $\lambda(x, y)$ for $x \leq y \leq f(x)$ is a straightforward consequence of the uniformity of convergence of $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$. Strict monotonicity at $y = x$ follows from (12)

which shows that $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\sigma_n}$ converges absolutely provided that $x < y \leq f(x)$.

Therefore $\sigma/\sigma_0 = \prod_{n=0}^{\infty} \sigma_{n+1}/\sigma_n$ converges to a positive value and we have $\sigma > 0$.

To extend these results to other values of y , suppose that $y > x$ and let k be an integer such that $x_k < y \leq x_{k+1}$, $x_{k+n} < y_n \leq x_{k+n+1}$. Now

$$\begin{aligned} \omega(y_n) &= \omega(x_{k+n}) + (y_n - x_{k+n}) \omega'(\xi_n) \\ &= \omega(x_{k+n}) + \theta_n \omega(x_{k+n}) \omega'(\xi_n) \end{aligned}$$

where $0 < \theta_n \leq 1$, $x_{k+n} < \xi_n < x_{k+n+1}$. Since $\omega'(\xi_n) \rightarrow 0$, we find that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(y_n)}{\omega(x_{k+n})} = 1.$$

But for fixed k ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(x_{k+n})}{\omega(x_n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{k+n+1} - x_{k+n}}{\omega(x_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + \omega_{k+1}(x_n) - x_n - \omega_k(x_n)}{\omega(x_n)} = 1 \end{aligned}$$

by (7). Therefore for every pair of values $x > a$, $y > a$,

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(y_n)}{\omega(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = 1.$$

This gives immediately

$$(14) \quad \lambda(x, f(y)) - \lambda(x, y) = 1,$$

and also the existence of any of the two limits on the left provided that the other one exists. Hence $\lambda(x, y)$ exists for every $x > a$, $y > a$. Furthermore, (13) gives

$$(15) \quad \lambda(x, t) = \lambda(x, y) + \lambda(y, t)$$

from which the assertions (a), (b) and (c) of the Theorem follow at once. To prove (d) we note that in the number triple $\{x, y, \sigma\}$ where $\sigma = \lambda(x, y)$, each pair determines uniquely the third one by (a), (b) and (c). Hence $f_\sigma(x)$ exists and they form a family of fractional iterates of $f(x)$ by (14), (15).

Finally we have to show that $f_\sigma(x)$ has the required asymptotic behaviour. We may assume that $0 < \sigma < 1$. Now $y = f_\sigma(x)$ implies $y_n = f_\sigma(x_n)$ for $n > 0$ therefore

$$(16) \quad \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - x_n}{\omega(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\sigma(x_n) - x_n}{\omega(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_\sigma(x_n)}{\omega(x_n)}.$$

This holds uniformly for $a < b \leq x \leq f(b)$, $x \leq y \leq f(x)$, (see remarks after (12)), and the asymptotic formula (10) follows.

(Received February 20, 1960.)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Р. ЛÉVY

G. SZEKERES

Резюме

Пусть $f(x)$ есть строго возрастающая функция, причем

$$(1) \quad f(x) > x, \quad \text{если } x > a.$$

Если $A(x)$ есть решение функционального уравнения

$$(2) \quad A\{f(x)\} = A(x) + 1 \quad (x > a),$$

то функции

$$(3) \quad f_\sigma(x) = A_{-1}\{A(x) + \sigma\}$$

удовлетворяют соотношениям

$$(4) \quad f_\sigma(f_\tau(x)) = f_{\sigma+\tau}(x), \quad f_1(x) = f(x).$$

Но так как решение (2) не единственно, то и функции $f_\sigma(x)$ определены однозначно лишь для целых значений σ .

Согласно одному замечанию Р. ЛÉVY [1] f_σ станет однозначной, если потребовать, чтобы выполнялись условия

$$(5) \quad f(x) = x + \omega(x)$$

и

$$(9) \quad f_\sigma(x) = x + \omega_\sigma(x),$$

где $\omega(x)$ дифференцируема, $\omega'(x)$ имеет ограниченное изменение, $\lim_{x \rightarrow \infty} \omega'(x) = 0$ и

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\omega_\sigma(x)}{\omega(x)} = \sigma.$$

В работе автор доказывает существование и единственность так определенной f_σ .

ÜBER EINFACHE KÖRPERERWEITERUNGEN

von

G. GRÄTZER und E. T. SCHMIDT

Aus der Körpertheorie ist der folgende Satz wohlbekannt:

(*) Ist β algebraisch über dem Körper K und sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ separabel über K , so ist $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$ eine einfache Erweiterung von K .¹

In dieser Note werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz. *Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ algebraische Elemente über K . Für ein beliebiges algebraisches β über K ist $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$ dann und nur dann eine einfache Erweiterung von K , wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sind über K separabel;
2. wenn die Charakteristik von K eine Primzahl p ist — so ist $K^{\frac{1}{p}}$ eine einfache Erweiterung von K .

Als eine Verallgemeinerung der vollkommenen Körper hat E. STEINITZ [5] (siehe auch KRULL [1]) den Begriff des fastvollkommenen Körpers eingeführt. Ein Körper K heisst *fastvollkommen*, wenn jede seiner endlichen algebraischen Erweiterungen einfach ist. Mit diesem Begriff erhalten wir trivialerweise aus dem Satz die

Folgerung. *Ein Körper K ist dann und nur dann fastvollkommen, wenn entweder seine Charakteristik 0 ist oder — wenn seine Charakteristik eine Primzahl p ist — so $K^{\frac{1}{p}}$ eine einfache Erweiterung von K ist.*

Beweis des Satzes. Es genügt nur den Fall von einer Primzahlcharakteristik zu betrachten, da jeder Körper von der Charakteristik 0 vollkommen ist.

Es sei K ein Körper von der Charakteristik p und $K^{\frac{1}{p}} = K(\theta)$. Zuerst zeigen wir, dass auch $K^{\frac{1}{p^k}}$ eine einfache Erweiterung von K ist. In der Tat ist $x \rightarrow x^p$ ein Isomorphismus zwischen $K^{\frac{1}{p^{k-1}}}$ und $K^{\frac{1}{p^k}}$ (t ist eine ganze Zahl), also $K^{\frac{1}{p^2}} = K^{\frac{1}{p}}(\theta^p) = K(\theta)(\theta^p) = K(\theta^{\frac{1}{p}})$, und ganz analog $K^{\frac{1}{p^k}} = K(\theta^{\frac{1}{p^{k-1}}})$.

Um zu zeigen, dass jede algebraische Erweiterung $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$ einfach ist, können wir voraussetzen, dass die α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) und β rein inseparabel sind. Jede algebraische Erweiterung ist nämlich einer separablen

¹ Siehe [4], Satz 355.

und einer darauffolgenden rein inseparablen Erweiterung äquivalent,² und die erste spielt in der Einfachheit keine Rolle (siehe [*]). Es gilt³ $\alpha_i \in K^{p^{-k_i}}$, $\beta \in K^{p^{-k_{n+1}}}$ für passende ganze Zahlen k_i , somit $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) \subseteq K^{p^{-\max k_i}}$. Diese ist, nach dem gesagten, eine einfache algebraische Erweiterung, folglich ist auch der Unterkörper $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$ einfach.⁴

Um die Umkehrung zu zeigen, können wir annehmen, dass K nicht vollkommen ist (also die Charakteristik p hat). Wir müssen in diesem Fall beweisen: wenn für beliebigen algebraische $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$, $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$ einfach ist, so gibt es ein Element ϑ in $K^{\frac{1}{p}}$ mit $K^{\frac{1}{p}} = K(\vartheta)$. Zuerst nehmen wir an, dass $n = 1$ ist. Wir wählen α so, dass $K(\alpha)$ ein rein inseparabler Unterkörper von $K(\alpha_1)$ und $e \geq 1$ der Exponent von α sei. Wenn $K(\alpha) \supseteq K^{\frac{1}{p}}$ steht so ist $K^{\frac{1}{p}}$ eine einfache Erweiterung⁵ über K . Wir zeigen, dass $K(\alpha) \not\subseteq K^{\frac{1}{p}}$ zu einem Widerspruch führt.

Es sei $K(\alpha) \not\subseteq K^{\frac{1}{p}}$ und γ ein rein inseparables Element, so dass $\gamma \in K^{\frac{1}{p}}$, $\gamma \notin K(\alpha)$. Es sei $\beta \in K^{p^k}$ so gewählt, dass $\beta^{\frac{1}{p^{k-1}}} = \gamma$, und $k > e$. $K(\alpha, \beta)$ ist nach der Voraussetzung eine einfache rein inseparable Erweiterung von K . Es bezeichne g den Exponent von $K(\alpha, \beta)$. Es gilt⁶

$$[K(\alpha, \beta) : K] = p^g, [K(\alpha) : K] = p^e, [K(\beta) : K] = p^k.$$

Aus $k > e$ folgt $g = k$. Falls wir zeigen, dass

$$[K(\alpha, \beta) : K] = [K(\alpha) : K][K(\beta) : K]$$

gilt, so folgt $p^g = p^e p^k$ woraus $e = 0$, was der Voraussetzung $e \geq 1$ widerspricht. Da $[K(\alpha, \beta) : K] = [K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K]$ ist, genügt es, $[K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] = [K(\beta) : K]$ zu beweisen. Nun ist $x^{p^k} - \beta^{p^k} = (x - \beta)^{p^k}$ ein irreduzibles Polynom über $K(\alpha)[x]$ sowie über $K[x]$. In der Tat folgt aus $\varphi(x) \mid (x - \beta)^{p^k}$, $\varphi(x) \in K(\alpha)[x]$, dass $\varphi(x) = (x - \beta)^s$ ($0 < s < p^k$) und $\beta^s \in K(\alpha)$, somit gilt $\beta^d \in K(\alpha)$ für $d = (s, p^k - s)$. Da $d \mid p^k$, so ist $\gamma = (\beta^d)^{\frac{1}{d}} \in K(\alpha)$, was im Widerspruch mit der Auswahl von γ steht. Folglich ist $[K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] = [K(\beta) : K]$ bewiesen, womit der Beweis des Falles $n = 1$ beendet ist.

Im Falle $n > 1$ ist $K(\alpha_i, \beta)$ als ein Unterkörper der einfachen Erweiterung $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$ ebenfalls einfach, folglich ergibt sich aus dem Fall $n = 1$, dass entweder die α_i separabel⁷ sind, oder $K^{\frac{1}{p}} = K(\vartheta)$ ist.

(Eingegangen: 3. März, 1960.)

² Im [4] Satz 339 und auch im [3].

³ Siehe [4], Satz 342.

⁴ Ein Unterkörper einer einfachen algebraischen Erweiterung ist auch einfach (siehe [2] S. 196) aber wegen Satz von LÜROTH dies gilt auch für transzendente Erweiterungen.

⁵ Siehe [4], Satz 354.

⁶ Siehe [4], Satz 292.

⁷ Siehe [5].

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] KRULL, W.: „Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche VII.” *Math. Zeitschrift* **45** (1939) 319—334.
- [2] PICKERT, G.: *Einführung in die Höhere Algebra*. Göttingen, 1951.
- [3] PICKERT, G.: „Inseparable Körpererweiterungen.” *Math. Zeitschrift* **52** (1949) 81—136.
- [4] RÉDEI, L.: *Algebra*. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959.
- [5] STEINITZ, E.: „Algebraische Theorie der Körper.” *Journal für Math.* **137** (1910) 1—19.

О ПРОСТЫХ РАСШИРЕНИЯХ ТЕЛ

G. GRÄTZER и Т. SCHMIDT

Резюме

Хорошо известна следующая теорема теории тел:

(*) Если β алгебраично и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ сепарабельны над телом K , то $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$ есть простое расширение K .

В настоящей работе доказывается

Теорема. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ алгебраические элементы над K . Для любого алгебраического над K элемента β $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$ в том и только в том случае является простым расширением K , если выполняется одно из следующих условий:

1. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ сепарабельны над K ;
2. Если характеристика K есть некоторое простое число p , то $K^{1/p}$ простое расширение K .

Обобщая понятие совершенного тела, Е. STEINITZ [5] ввёл понятие полусовершенного тела. Тело K называется полусовершенным, если все его конечные алгебраические расширения простые. Из предыдущей теоремы следует такое.

Следствие. Тело K в том и только в том случае полусовершенное, если его характеристика 0 или, если его характеристика некоторое простое число p , то $K^{1/p}$ есть простое расширение K .

RINGE, DEREN ECHTE UNTERRINGE STRENG ZYKLISCHE RECHTSIDEALE SIND

VON

FERENC SZÁSZ

*Dem Andenken von
Professor L. Fejér gewidmet*

Ähnlich gewissen gruppentheoretischen Untersuchungen von R. DEDEKIND [2] und von R. BAER [1] kann man, als eine Verallgemeinerung eines ringtheoretischen Analogon der berühmten Hamiltonschen Gruppen, die Klasse aller (assoziativen) Ringe untersuchen, deren Unterringe Ideale sind. Bekanntlich hat L. RÉDEI [6] alle durch ein Element erzeugten Ringe explizit bestimmt, deren Unterringe Ideale sind. Im allgemeinsten Fall scheint sowohl die Charakterisierung aller Ringe, deren Unterringe Ideale sind, als auch die Bestimmung aller Ringe, deren Unterringe Rechtsideale sind, sehr schwer, und diese Probleme sind bisher noch ungelöst.

Nach der Terminologie von JACOBSON ist ein Untermodul S (bzw. Rechtsideal R) eines A -Rechtsmoduls M (bzw. eines Ringes A) streng zyklisch genannt [4], wenn es $S = mA$ (bzw. $R = aA$) mit einem $m \in M$ ($a \in A$) gilt. Um kurz zu sprechen, nennen wir einen Ring A ein Ω -Ring, wenn jeder echte Unterring S ein streng zyklisches Rechtsideal aA ($a \in A$) von A ist. (Hier hängt $a \in A$ natürlich von S ab). Man versteht in dieser Arbeit unter einem Ring immer einen assoziativen Ring. Für die Grundbegriffe verweisen wir auf [3], [4] und [5]. \mathcal{J} bezeichnet immer den Ring der ganzen Rationalen Zahlen, und $\{\dots, x_a, \dots\}$ den durch die eingeklammerten Elemente erzeugten Unterring. A^+ ist die additive Gruppe von A und $O(a)$ die Ordnung von $a \in A^+$, d. h. der Annulator von a im natürlichen Operatorbereich \mathcal{J} der Gruppe A^+ .

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun alle Ω -Ringe ganz explizit zu bestimmen. Jedes homomorphe Bild eines Ω -Ringes ist ebenfalls ein Ω -Ring. Ein Unterring eines Ω -Ringes braucht aber nicht immer ein Ω -Ring sein. Im Ω -Ring \mathcal{J} ist nämlich der Unterring $2\mathcal{J}$ der geraden Zahlen kein Ω -Ring, denn der Unterring $6\mathcal{J}$ von $2\mathcal{J}$ ist kein streng zyklisches Rechtsideal in $2\mathcal{J}$. Jeder echte Unterring S ist wegen $S = aA \subseteq \{a\}A \subseteq \{a\}$ sicher kommutativ, und jeder Unterring ist in A ein Rechtsideal.

Leichtere verwandte Fragen haben wir in [7] erörtert und gelöst, wobei auch das Problem, dessen Lösung den Stoff der vorliegenden Arbeit bildet, noch in 1956 aufgeworfen wurde. Satz 3 unserer Note [9] liefert die Lösung eines schwereren, aber weniger eleganten Problems, als Satz 2 in [9], weil der Beweis des Satzes 3 in [9] viel länger und komplizierter ist, als der von Satzes 2 in [9]. In [9] Sätze 2 und 3 wurden nur ohne Beweis ausgesprochen und Satz 2 betrachtet genau die Ω -Ringe. Also werden wir hier Satz 2 von [9] beweisen. (Satz 3 von [9] erörtert die Ringe, deren echte Unterringe

Hauptrechtsideale sind, und neulich haben wir auch die solchen Ringe ganz explizit bestimmt, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechtsideale sind.)

Es gilt der

Satz. Jeder Ω -Ring ist einem der folgenden Ringe isomorph:

1. die Faktorringe $\mathcal{J}/(m)$ des Ringes \mathcal{J} der ganzen rationalen Zahlen nach einem Ideal (m) , wobei $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ist;
2. die Ringe $\{a\}$ mit $p^k a = a^2 - pa = 0$, d. h. $\{a\} \cong p(\mathcal{J}/(p^{k+1}))$, $k = 1, 2, 3, \dots$
3. die Ringe $\{a\}$ mit $pa = a^3 = 0$ ($a^2 \neq 0$)
4. die nichtkommutativen endlichen Ringe $\{a, b\}$ mit $pa = pb = a^2 = ab - a = b^2 - b = ba = 0$.

Wir bemerken, dass man im Fall 1. mit $m = 0$ den Ring \mathcal{J} als den einzigen unendlichen Ω -Ring erhält. In allen anderen Fällen sind also die Ω -Ringe endlich. Im Fall 1. mit $m \neq 0$ besitzen die Ringe ein Einselement und eine endliche zyklische additive Gruppe. Im Fall 2. ist der Ring A nilpotent mit endlicher zyklischer additiver Gruppe. Im Fall 3. besitzt der nilpotente Ring p^2 Elemente und eine nicht-zyklische additive Gruppe. Im Falle 4. besitzt der Ring ebenfalls p^2 Elemente und eine nicht-zyklische additive Gruppe. Ferner ist dann der nichtkommutative Ring weder nilpotent noch halbeinfach, und enthält sowohl rechtsseitige Einselemente, als Rechtsannullatoren. Im Fall 4. mit $p = 2$ ergibt sich der Ring, den L. RÉDEI als »Szeleschen Ring für alles« genannt hat.

Beweis. Da im Satz alle erwähnten Ringe offenbar Ω -Ringe sind, es genügt zu bestätigen, dass es keinen anderen Ω -Ring gibt, nur die Ringe, die im Satz vorkommen. Es sei also in den weiteren A ein beliebiger Ω -Ring. Die explizite Bestimmung aller Ω -Ringe werden wir in mehreren Schritten erledigen.

1. Wir zeigen zuerst, dass A^+ keine vollständige Gruppe ist. Dann gibt es also eine natürliche Zahl n mit $nA \neq A$ und $n^2 A^+$ ist mit jeder solchen n zyklisch.

Zum Beweis nehmen wir $nA = A$ mit jeder natürlichen Zahl $n (\neq 0)$ an. Dann ist S^+ mit jedem Unterring S von A ebenfalls vollständig wegen $S = aA$ ($a \in A$). Da $\{a\}^+$ mit einem nilpotenten Element $a \in A$ die direkte Summe endlich vieler zyklischer Gruppen ist, muss $a^m \neq 0$ für jede natürliche Zahl m bestehen. Aus $a^3 = a^2 \cdot a \in \{a^2\} = bA$ ($b \in A$) erhält man nun eine Gleichung $m_1 a + m_2 a^2 + \dots + m_s a^s = 0$ mit $m_s a^s \neq 0$ ($m_i \in \mathcal{J}$). Dann ist aber $\{m_s a\}^+$, als ebenfalls eine direkte Summe endlich vieler zyklischer Gruppen, keine vollständige Gruppe. Dieser Widerspruch zeigt die Existenz einer natürlichen Zahl $n (\neq 0)$ mit $nA \neq A$. Ferner gibt es Elemente $a, x \in A$ mit $nA = aA$ und $na = ax$. Da $ax^k = n^k a$ mit jeder natürlichen Zahl k besteht, es gilt $n^2 A = n(aA) = na \cdot A \subseteq \{na\} = \{ax\} = a\{x\}$, wobei $a\{x\}^+$ zyklisch ist.

2. Wir beweisen nun, dass A^+ entweder torsionsfrei, oder periodisch ist.

Zum Beweis setzen wir voraus, dass A^+ eine gemischte Gruppe wäre. Es sei das Ideal P von A die maximale periodische Untergruppe von A^+ . Dann besteht $P = cA$ ($\neq 0, c \in A$). Im Fall $O(c) = k > 0$ erhält man $kP = 0$, d. h. P^+ ist eine k -beschränkte periodische Gruppe. Im Falle $O(c) = 0$ besteht aber ebenfalls $mP = 0$ mit $O(c^2) = m > 0$, denn es gilt $c^2 \in cA = P$ und die

unendliche zyklische Gruppe $m\{c\}^+$ enthält $mP(=mcA)$. P ist also in beiden Fällen beschränkt, und als eine Servanzuntergruppe von A^+ ein direkter Summand in A^+ , d. h. besteht $A^+ = P \oplus U$ mit einer torsionsfreier Untergruppe U von A^+ [3]. Da P eine beschränkte periodische Gruppe ist, existiert eine Primzahl p mit $pP = P$. Dann gilt $pA^+ = P \oplus pU \neq A^+$. Also ist $p^2A = P \oplus p^2U$ nach 1. zyklisch und gleichzeitig gemischt, was unmöglich ist. Hiernach ist A^+ entweder torsionsfrei, oder periodisch.

3. Wir zeigen, dass jeder Ω -Ring mit torsionsfreier additiver Gruppe dem Ring \mathcal{J} isomorph ist.

Es sei A^+ torsionsfrei, und $A^+ \neq nA^+ (\neq 0)$. Eine solche natürliche Zahl n existiert sicher nach 1); und dann ist n^2A^+ zyklisch. Die Abbildung $x \rightarrow n^2x$ ($x \in A^+$) ist aber ein Isomorphismus wegen der Torsionsfreiheit von A^+ , und somit ist A^+ selbst auch zyklisch. Es gibt also ein Element $a \in A$ mit $A = \{a\}$ und $a^2 = da$; $d \in \mathcal{J}$. Offenbar besteht $pA \neq A$ für jede Primzahl p . Dann existiert ein $b \in A$ mit $pA = bA$. Dies bedeutet aber $pa = sa \cdot ta = stda$, d. h. $p = std$ mit $b = sa$; $s, t \in \mathcal{J}$. Aus der Bedingung, dass d/p für jede Primzahl p besteht, erhält man $s = \pm 1$, $a^2 = \pm a$ und $A \cong \mathcal{J}$, w. z. b. w.

4. Nun beweisen wir, dass jeder Ω -Ring mit periodischer additiver Gruppe endlich ist.

Zum Beweis sei A^+ periodisch, also die direkte Summe ihrer p -Komponenten A_p , d. h. $A = \sum_p A_p$. Es gibt nach 1. eine Primzahl p mit $pA \neq A$ und ein Element $b \in A$ mit $pA = bA$. Dann ist A^+ wegen $O(b)p \cdot A^+ = 0$ eine beschränkte periodische Gruppe. Jeder A_p ist ein endomorphes Bild von A , also ein Ω -Ring, und es gibt in A nur endlich viele verschiedene p -Komponenten. Hiernach genügt es zeigen, dass eine beliebige p -Komponente A_p endlich ist. Es gilt offenbar: $\text{Rang } A_p = \text{Rang } (A_p/pA_p)^+$, denn A_p^+ ist die direkte Summe zyklischer Gruppen. Wir werden aus der Annahme: $\text{Rang } A_p^+ = \infty$ einen Widerspruch folgenderweise ableiten, der die Endlichkeit von A bedeuten wird. Es sei $B_p = A_p/pA_p$ unendlich. B_p ist ein homomorphes Bild von A , also ein Ω -Ring mit $pB_p = 0$. Dann ist die Abbildung $x \rightarrow e_x$ mit $se_x = s \cdot x$; $s \in \mathcal{S}$, $x \in B_p$ für jeden echten Unterring S von B_p ein Homomorphismus des Ringes B_p in den Endomorphismenring der additiven Gruppe S^+ . Es sei \mathcal{K} der Kern von diesem Homomorphismus. Jeder echte Unterring $S = bB_p$ von B_p ist wegen $S \subseteq \{b\}$, $pb = 0$, $b^3 \in \{b^2\}$, $b^{m+1} + k_1 b^m + \dots + k_m b = 0$ ($m, k_i \in \mathcal{J}$) endlich, und so besteht notwendig $\mathcal{K} = B_p$, also $B_p^2 = 0$. Ein unendlicher Zeroring B_p mit $pB_p = 0$ besitzt aber echte unendliche Unterringe, und dieser Widerspruch beweist die Endlichkeit sowohl von B_p als auch von $\text{Rang } A_p$, bzw. von A_p und von A .

5. Wir werden nun zeigen, dass der endliche Ω -Ring A unter der Voraussetzung, dass A sich durch ein Element erzeugen nicht lässt, einem Ringe $\{a, b\}$ mit $pa = pb = ab - a = a^2 = ba = b^2 - b = 0$ isomorph ist.

Zum Beweis bestehe $A \neq \{a\}$ für alle $a \in A$, wobei A ein endlicher Ω -Ring ist. Dann existieren in A sicher zwei verschiedene maximale echte Unterringe aA und bA ($a, b \in A$). Aus $A \neq \{a\}$, $A \neq \{b\}$ und $aA \subseteq \{a\}$, $bA \subseteq \{b\}$ folgt wegen der Maximalität der Unterringen: $\{a\} = aA$ und $\{b\} = bA$. Es gibt Elemente $u, v \in A$ mit $a = au$ und $b = bv$. Dann ist aber sowohl $\{a\}^+ = \{au\}^+ = a\{u\}^+$ als $\{b\}^+$ zyklisch. Hiernach ist S^+ für jeden echten Unterring S von A zyklisch, denn S ist ein Unterring eines maximalen

echten Unterringes in A , und der eine von $\{a\}$ oder $\{b\}$ lässt sich beim Anfang ganz beliebig wählen. Unserer Satz in [8] betrachtet nunmehr die Ringe, deren echte Unterringe zyklische additive Untergruppen besitzen. So folgt aus [8], dass A genau p^2 Elemente enthält, wobei p eine Primzahl ist. Hiernach bestehen $a^2 = 0$ oder a , bzw. $b^2 = 0$ oder b mit $\{a\} \cap \{b\} = 0$. Wir zeigen nun, dass A nicht kommutativ ist. Aus $ab = ba$ erhielte man wegen $\{a\} = aA$ und $\{b\} = bA$ offenbar $ab = ba \in \{a\} \cap \{b\}$ also $ab = ba = 0$. Im Unterfall $a^2 = b^2 = 0$ bedeutete dies $A^2 = 0$, und so wäre A kein Ω -Ring. Im Unterfall $a^2 = a (\neq 0)$, $b^2 = b (\neq 0)$ ist aber der echte Unterring $\{a + b\}$ ein Körper, aber kein Rechtsideal in A . Drittens kann im Fall $ab = ba = 0$ höchstens der eine der Unterfälle $a^2 = 0$, $b^2 = b$ oder $a^2 = a$, $b^2 = 0$ vorkommen. Wäre aber z. B. $a^2 = 0$, $b^2 = b$, $ab = ba = 0$, so bestände $A = \{a + b\}$ wegen $b = (a + b)^2$ und $a = (a + b) - (a + b)^2$, was ausgeschlossen ist, denn A lässt sich durch ein Element nicht erzeugen. Folglich ist $ab \neq ba$. Dann besteht entweder $a^2 \neq 0$ oder $b^2 \neq 0$, denn aus $ab = ka$, $ba = lb$ ($k, l \in \mathcal{J}$) folgte im Falle $a^2 = b^2 = 0$ sowohl $0 = ab^2 = k ab = k^2 a$, $p \nmid k^2, p \nmid k$, $ab = 0$, als auch $ba = 0$, also die Kommutativität von A , die ein Widerspruch ist. Hiernach können wir neulich drei Unterfälle unterscheiden. Es sei erstens $a^2 = 0$, $b^2 = b$, $ab \neq ba$, $ab = ka$, $ba = lb$ ($k, l \in \mathcal{J}$). Aus $0 = ba^2 = lba = l^2 b$ erhält man $p \nmid l^2$, also $ba = 0$. Aus $ab \neq 0$ und aus $ab^2 = ab$ folgt aber $k \equiv 1 \pmod{p}$, also $ab = a$. Dies ist im Satze der vorliegenden Arbeit der am letzten erwähnte Ring. Der zweite Unterfall $a^2 = a$, $b^2 = 0$, $ab \neq ba$ lässt sich aus dem ersten durch die Abbildung

$$a \rightarrow b$$

$$b \rightarrow a$$

erhalten. Der dritte Unterfall $a^2 = a$, $b^2 = b$, $ab \neq ba$, $pa = pb = 0$, $ab = ka$, $ba = lb$ ($k, l \in \mathcal{J}$) liefert unter der Abbildung

$$a \rightarrow \bar{a} + \bar{b}$$

$$b \rightarrow \bar{b}$$

einen zum Ring $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ isomorphen Ring, und in $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ gelten — ähnlich dem ersten Unterfall — ebenfalls die Relationen $p\bar{a} = p\bar{b} = \bar{a}^2 = \bar{a}\bar{b} - \bar{a} = \bar{b}^2 - \bar{b} = \bar{b}\bar{a} = 0$. Damit haben wir unsere Behauptung 5. vollständig bewiesen.

6. Wir beweisen nun, dass jeder endliche nilpotente Ω -Ring $A = \{a\}$ mit $pa = 0$ sich entweder durch $a^2 = 0$ oder durch $a^3 = 0$ ($a^2 \neq 0$) charakterisieren lässt.

Zum Beweis sei $A = \{a\}$ ein endlicher Ω -Ring mit $pa = 0$ und $a^k = 0$ ($a^{k-1} \neq 0$). Aus $a^3 \in \{a^2\}$ erhält man $a^3 = n_1 a^2 + \dots + n_s a^{2s}$ ($n_i \in \mathcal{J}$). Ist nun $(p, n_1) = 1$, so besteht $a^2 \in \{a^3\}$, also $a^2 \in \{a^k\} = 0$ d. h. $a^2 = 0$. Im Falle p/n_1 gilt aber $a^3 \in \{a^4\}$ also $a^3 \in \{a^k\} = 0$, $a^3 = 0$. Dann ist $\{a\}$ ein Ω -Ring mit nicht zyklischer additiver Gruppe.

7. Wir werden nun zeigen, dass jeder nicht-nilpotente endliche Ω -Ring $A = \{a\}$ mit $pa = 0$ einem Primkörper K_p isomorph ist.

Zum Beweis sei N das Radikal von A . Der halbeinfache Faktoring A/N ist nach dem Wedderburn-Artinschen Struktursatz und wegen der Definition der Ω -Ringe die direkte Summe von Primkörper, und zwar existiert in A/N nur ein direkter Summand. In einem vollen Matrizenring des Grades

$n > 1$ bilden nämlich die Skalarmatrizen einen Unterring, der kein Rechtsideal ist, und die Summe der Einselemente der vollen Matrizenringe erzeugt einen einzigen Primkörper. Da A/N ein Primkörper $\{e + N\}$ mit $e^2 - e \in N$ ist, $e (\in A)$ lässt sich wegen der Nilpotenz von N als ein Idempotent $e (= e^2 \neq 0)$ wählen. Dann ist $\{e\}$ ebenfalls ein Primkörper mit $\{e\} \cap N = 0$. Hiernach folgt wegen der Kommutativität $A = \{e\} \oplus N$, also eine ringtheoretische direkte Zerlegung. Es gibt ferner ein Element $b \in N$ mit $N = \{b\}$, denn N ist ein endomorphes Bild von A . Nach 6. besteht nun sicher $b^3 = 0$. Ferner existieren solche $m_i \in \mathcal{J}$ ($0 \leq m_i \leq p-1$; $i = 1, 2, 3$), dass $N = (m_1 e + m_2 b + m_3 b^2) \cdot A$ besteht. Daraus erhält man $b = sb^2$ ($s \in \mathcal{J}$) wegen $b^3 = eb = be = 0$. Dies bedeutet aber

$$b = b(sb) = \dots = b(sb)^3$$

also $N = 0$, $A = \{e\}$, denn es gilt $b^3 = 0$ und $(sb)^3 = 0$. Hiernach besteht $A \cong I/(p)$.

8. Wir werden beweisen, dass jeder endliche Ω -Ring $A = \{a\}$ über einer p -Gruppe A^+ mit $pA^+ \neq 0$ eine zyklische additive Gruppe besitzt, und zwar gilt dann entweder $A \cong \mathcal{J}/(p^k)$ oder $A \cong p(\mathcal{J}/(p^{k+1}))$.

Zum Beweis können wir $pA = bA$ ($b \in A$) annehmen. Dann besteht $pA \subseteq \{a^2\}$, also $pa = a \cdot g(a)$ mit einem Polynom $g(x) (\neq 0, \in x \cdot (\mathcal{J}/(O(a)))[x])$. Hiernach ist $pA^+ = a \cdot g(\{a\})^+$ zyklisch, und es gilt $\text{Rang } A^+ = \text{Rang } (A/pA)^+$, wenn A^+ eine p -Gruppe ist.

Erstens nehmen wir an, dass A^+ eine p -Gruppe ist. Nach 6. und 7. besteht $\text{Rang } (A/pA)^+ \leq 2$. Wir werden aus der Voraussetzung $\text{Rang } (A/pA)^+ = 2$ einen Widerspruch ableiten, und ebendies wird zeigen, dass A^+ zyklisch ist. Es sei also $\text{Rang } (A/pA)^+ = 2$. Da pA^+ zyklisch ist, und nach 6. und 7. $a^3 \in \{pa\}$, $a^2 \in \{pa\}$ oder $a^2 - a \in \{pa\}$ hervorkommen, besteht wegen der Voraussetzung über den Rang offenbar $a^3 = lpa$ ($l \in \mathcal{J}$). Ferner gilt auch $pa^2 = kpa$ ($k \in \mathcal{J}$) wegen $pa^2 = pa \cdot a \in \{pa\}$. Aus $k^2 pa = kpa^2 = pa^3 = lp^2 a$ erhält man wegen $p^2/O(a)$ sicher $k = ps$ ($s \in \mathcal{J}$). Ferner besitzt jedes Element von A die Gestalt $n_1 a + n_2 a^2$ mit $n_i \in \mathcal{J}$; $0 \leq n_2 \leq p-1$ wegen $pa^2 = sp^2 a$. Es sei nun $\{pa, a^2\} = (m_1 a + m_2 a^2) \cdot A$, also $pa = (m_1 a + m_2 a^2)(k_1 a + k_2 a^2)$ mit $m_i, k_i \in \mathcal{J}$; $0 \leq m_2, k_2 \leq p-1$. Da $\text{Rang } A^+ = 2$, und $a^2 \notin \{pa\}$ ist, besteht $p/m_1 \cdot k_1$. Hiernach gilt aber auch $(p, l) = 1$ wegen $pa^2 = sp^2 a$ und wegen $pa = m_1 k_1 a^2 + (m_1 k_2 + m_2 k_1)lpa + m_2 k_2 lsp^2 a$. Im Fall $p^3 \mid O(a)$ bestände $lp^2 a = pa^3 = sp^2 a \cdot a = sp \cdot pa^2 = s^2 p^3 a$, also $lp^2 \equiv s^2 p^3 \pmod{p^3}$ und p/l , was der Voraussetzung $(p, l) = 1$ widerspricht. Also gilt $O(a) = p^2$, $pa^2 = 0$, $a^3 = lpa$ ($A = \{a\}$, $pa = 0$, $a^2 \neq 0$). Hiernach ist $\{a^2\}^+$ zyklisch, und aus $\{pa, a^2\} = (m_1 a + m_2 a^2) \cdot A$ folgt $\{pa, a^2\} \subseteq \{a^2\}$, $a^2 \in \{pa\}$, d. h. $\text{Rang } A^+ = 1$, was der Voraussetzung $\text{Rang } A^+ = 2$ widerspricht.

Also ist A^+ zyklisch. Bestehe $A = \{a\}$, $O(a) = p^k$, $a^2 = da$, d/p^k . Dann gilt p/d , wenn $d \neq 1$ ist. Wir können nämlich nach einer eventuellen Durchsetzung $a \rightarrow (-a)$ auch $d \geq 0$ annehmen. Aus $pA = bA$ ($b \in A$) folgt nun $pa = sa \cdot ra = sr da$ ($s, r \in \mathcal{J}$), also $p \equiv srd \pmod{p^k}$, d/p , folglich $d = p$. Hiernach besteht $A \cong p(I/(p^{k+1}))$, wenn $d > 1$ ist, und $A \cong I/(p^k)$, wenn $d = 1$ ist.

9. Wir möchten zum Schluss beweisen, dass jeder endliche Ω -Ring A , dessen additive Gruppe A^+ keine p -Gruppe ist, einem Ringe $\mathcal{J}/(m)$ isomorph ist.

Zum Beweis bemerken wir, dass im Falle $A = \sum_p \oplus A_p$ wobei A_p die p -Komponente von A bezeichnet, notwendig $qA = A_p \oplus qC_p$ besteht, wobei q eine von p verschiedene Primzahl und $C_p = \sum_{p' \neq p} \oplus A_{p'}$ ist. Dann gilt $qA \neq A$ für eine geeignete Primzahl $q (\neq p)$, und somit ist $q^2 A^+$ nach 1. zyklisch. Aus $A_p \subseteq q^2 A$ erhält man, dass jede A_p^+ und somit auch A_p^+ selbst zyklisch ist. Es sei $A = \{a\}$, $a^2 = da$, $ma = 0$, d/m . Wäre nun p ein Primteiler von d , so folgte — ähnlich der Diskussion von 8. — die Bedingung $d = p$. Da aber A^+ keine p -Gruppe ist, gibt es eine Primzahl $q (\neq p)$ mit q/m und mit $qA = cA$ ($c \in A$). Hiernach bestände $qa = l_1 pa$ mit einer $l_1 \in \mathcal{I}$, denn es gilt $d = p$. Daraus folgt aber $q \equiv lp \pmod{m}$ und p/q , was unmöglich ist. Dies bedeutet $d = 1$ und $A = \{a\} \cong \mathcal{I}/(m)$, w. z. b. w.

Damit haben wir den Satz bewiesen.

(Eingegangen: 24. März, 1960.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BAER, R.: "Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe." *S. B. Heidelberg Akad. Wiss.* **2** (1933) 12—17.
- [2] DEDEKIND, R.: "Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind." *Mathematische Annalen* **48** (1898) 548—561.
- [3] FUCHS, L.: *Abelian Groups*. Budapest, 1958.
- [4] JACOBSON, N.: *Structure of rings*. Providence, 1956.
- [5] RÉDEI, L.: *Algebra*, I. Leipzig, 1959.
- [6] RÉDEI, L.: "Die Vollidellringe im weiteren Sinn, I." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **3** (1952) 243—268.
- [7] SZÁSZ, F.: "Über die homomorphen Bilder des Rings der ganzen Zahlen und über eine verwandte Ringfamilie." *Monatshefte für Mathematik* **61** (1957) 37—41.
- [8] SZÁSZ, F.: "Les anneaux ne contenant que des sousanneaux propres cycliques." *Czechoslovak Mathematical Journal* **7** (82) (1957) 21—25.
- [9] SZÁSZ, F.: "Die explizite Bestimmung von einigen Klassen der assoziativen Ringe." *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III* **7**: 3 (1959) 107—110.

КОЛЬЦА A , КАЖДОЕ ИСТИННОЕ ПОДКОЛЬЦО КОТОРЫХ ЯВЛЯЕТСЯ КОЛЬЦОМ ВИДА aA ($a \in A$)

F. SZÁSZ

Резюме

Каждое истинное подкольцо S (ассоциативного) кольца A имеет вид aA ($a \in A$) тогда и только тогда, если A изоморфно одному из следующих колец:

- 1) факторкольцо $I/(m)$ кольца I целых чисел по идеалу (m) , где $m = 0$, ± 1 , $\pm 2, \dots$,
 - 2) p -кратное $p(I/(p^{k+1}))$ кольцо $I/(p^{k+1})$, где p простое число и $k = 1, 2, 3, \dots$,
 - 3) кольцо $A = \{x\}$, где $px = x^3 = 0$ ($u^2 \neq 0$),
 - 4) кольцо $A = \{x, y\}$, где $px = py = x^2 = y^2 - y = xy - x = yx = 0$.
- Доказательство вполне элементарно.

ON THE COMPARISON OF TWO SAMPLES WITH SLIGHTLY DIFFERENT SIZES

by

J. REIMANN and I. VINCZE

Introduction

In our following considerations we suggest the possibility of a two sample test of SMIRNOV-type for comparison of samples with slightly different sizes.

If we denote by $F_n(x)$ and $G_m(x)$ the empirical distribution functions of the two samples taken independently from populations with continuous distribution functions $F(x)$ and $G(x)$ resp., then the test of SMIRNOV is based on the statistics

$$\max_{(x)} (F_n(x) - G_m(x))$$

or

$$\max_{(x)} |F_n(x) - G_m(x)|.$$

The distributions of these statistics under the hypotheses $F(x) \equiv G(x)$ and in case $m = n$ are due to GNEDENKO and KOROLYUK and have simple forms. In other cases the formulae are more complicated or only asymptotical representations are at disposal. (See: J. BLACKMAN [1], V. OZOLS [6], J. L. HODGES [3], V. S. KOROLYUK [5].

In practice the case $m = n$ is of great importance. At the design of experiments the equal size of samples often can be ensured and the corresponding statistics can be evaluated without much calculations by means of the following very simple method of GNEDENKO and KOROLYUK [2]:

Let us denote by

$$\zeta_1^* < \zeta_2^* < \dots < \zeta_{n+m}^*$$

the union of the mentioned two samples $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ and $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ resp., arranged in order of magnitude. Let now be

$$\vartheta_i = \begin{cases} +1, & \text{if } \zeta_i^* = \xi_j \\ -1, & \text{if } \zeta_i^* = \eta_l. \end{cases}$$

As it is easy to see in case $m = n$ the known relations

$$\max_{(x)} (F_n(x) - G_n(x)) = \frac{\max_{(i)} (\vartheta_1 + \dots + \vartheta_i)}{n} = \frac{\max_{(i)} S_i}{n}$$

and

$$\max_{(x)} |F_n(x) - G_n(x)| = \frac{\max_{(x)} |\vartheta_1 + \dots + \vartheta_i|}{n} = \frac{\max_{(i)} |S_i|}{n}$$

hold.

The idea lies at hand to make use of the statistics $\max_{(i)} S_i$ and $\max_{(i)} |S_i|$ in case of different sample sizes too the distribution of which can be obtained easily. The necessity of making use of these statistics for nearly equal sample sizes arises for instance if some of the experiments cannot be used and to obtain equal sample sizes elements of one of the samples have to be omitted. This sometimes would mean the loss of valuable information.¹

In the following we shall determine the distributions and limiting distributions of these statistics, or more precisely the distributions of the following statistics: supposed that $m > n$

$$B_{n,m}^+ = \max_{(x)} (n F_n(x) - m G_m(x)),$$

and

$$B_{n,m} = \max_{(x)} \left| n F_n(x) - m G_m(x) + \frac{m-n}{2} \right| - \frac{m-n}{2}.$$

We shall give the limiting distributions in the case when the sizes of the two samples only "slightly differ", i. e. if $n \rightarrow \infty$ and $\frac{(m-n)^2}{m+n} \rightarrow 4c^2$,

where $c > 0$ is a constant. We shall prove furthermore that in this case *the test based on the statistics $B_{n,m}$ is asymptotically consistent against all continuous alternatives, and the statistics $B_{n,m}^+$ is asymptotically consistent against all continuous alternatives $F(x) > G(x)$.*

Thus this test can be suggested in cases mentioned above. (In the finite case in lack of nearer investigations $c < 1$ may be used.)

Let $R_{n,m}^+$ and $T_{n,m}^+$ resp. denote the first and last of the indices i for which the sum S_i is maximal. Let us further denote by $R_{n,m}$ the first index for which $\left| S_i + \frac{m-n}{2} \right| - \frac{m-n}{2}$ is maximal. We shall determine the joint distributions and limiting distributions of the pairs of statistics $(B_{n,m}^+, R_{n,m}^+)$, $(B_{n,m}^+, T_{n,m}^+)$ and $(B_{n,m}, R_{n,m})$. These pairs of statistics evidently enable more efficient tests, but their tabulations afford considerable efforts.

In the case $m = n$, i. e. $c = 0$. we obtain the distributions of GNEDENKO and KOROLJUK and the distributions contained in article [8] resp.

We wish to mention that our method is connected with that of J. L. HODGES [3] used for the determination of the significance probabilities of the SMIRNOV two sample test. As standard methods are used and our reflecting procedure is simpler in the following above article will not be mentioned.

Our § 1 and § 2 cover the mentioned distribution and limiting distribution theorems, § 3 is devoted to the asymptotic consistency, while in § 4 a remark is made concerning the limiting stochastic process.

¹See HODGES [3] § 4. p. 477.

§ 1. Distribution theorems

With the notations of the introduction the following hold:

Theorem 1. In the case $F(x) \equiv G(x)$ and for $m > n$

$$(1.1) \quad \mathbf{P}(B_{n,m}^+ = k) = \frac{2k + 1 + m - n}{m + k + 1} \frac{\binom{m+n}{n-k}}{\binom{m+n}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$(1.2) \quad \mathbf{P}(B_{n,m}^+ = k, R_{n,m}^+ = r) = \begin{cases} 0, & \text{if } k < 0 \text{ or } r + k \text{ odd,} \\ \frac{m - n + 1}{m + 1}, & \text{if } k = 0, r = 0, \\ \frac{2k(m - n + k + 1)}{r(2m - r + k + 2)} \frac{\binom{r}{r+k}}{2} \frac{\binom{m+n-r}{n - \frac{r+k}{2}}}{\binom{m+n}{n}}, & \\ \text{if } k = 1, 2, \dots, n; r = k, k + 2, \dots, 2n - k, \end{cases}$$

$$(1.3) \quad \mathbf{P}(B_{n,m}^+ = k, T_{n,m}^+ = t) = \begin{cases} 0, & \text{if } k < 0 \text{ or } t + k \text{ odd,} \\ \frac{1}{t + 1} \frac{m - n}{m + n - t} \frac{\binom{t}{t}}{2} \frac{\binom{m+n-t}{n - \frac{t}{2}}}{\binom{m+n}{n}}, & \text{if } k = 0, \quad t = 0, 2, \dots, 2n, \\ \frac{2(k+1)(k+m-n)}{(t+k+2)(m+n-t)} \frac{\binom{t}{t+k}}{2} \frac{\binom{m+n-t}{n - \frac{t+k}{2}}}{\binom{m+n}{n}}, & \text{if } k = 1, 2, \dots, n, \\ & t = k, k + 2, \dots, 2n - k. \end{cases}$$

Remarks. The proofs of formulae (1.1) and (1.2) are derived independently and thus by replacing $r = k + 2s$ the following combinatorial relation is obtained:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{k}{k+2s} \frac{m-n+k+1}{m-s+1} \binom{k+2s}{s} \binom{m+n-k-2s}{m-s} &= \\ &= \frac{m-n+2k+1}{m+k+1} \binom{m+n}{m+k}, \end{aligned}$$

which is valid for $m > n$ and $k = 1, 2, \dots, n$. Analogous relation follow from (1.3).

Before turning to the two sided case, we wish to make some previous remarks. As the random function $nF_n(x) - mG_m(x)$ equals to 0 for $x = -\infty$ and equals to $n - m < 0$ for $x = +\infty$, the maximum of $|nF_n(x) - mG_m(x)|$ cannot be smaller than $|n - m|$. Consequently concerning the absolute deviation the following event may be of interest

$$\begin{aligned} -\frac{m-n}{2} - k &< \min_{(x)} (nF_n(x) - mG_m(x)) + \frac{m-n}{2} \leq \\ &\leq \max_{(x)} (nF_n(x) - mG_m(x)) + \frac{m-n}{2} \leq \frac{m-n}{2} + k \end{aligned}$$

or in other words the value k is the deviation from 0 in the positive direction and from $n - m$ in the negative direction. If now the absolute maximum of this deviation is denoted by $B_{n,m}$, i. e.

$$B_{n,m} = \max_{(x)} \left| nF_n(x) - mG_m(x) + \frac{m-n}{2} \right| - \frac{m-n}{2},$$

then the following theorem holds:

Theorem 2. If $F(x) \equiv G(x)$, $m > n$ and with the notations $s = 2k + m - n$, $p = m + n - r$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_{n,m} = k) &= \frac{1}{\binom{m+n}{n}} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \left[\binom{m+n}{m+\gamma s} - \binom{m+n}{m+k+\gamma s} \right] = \\ (1.4) \quad &= \frac{2^{m+n+1}}{s \binom{m+n}{n}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \cos^{m+n} \frac{\lambda\pi}{s} \sin \frac{k\lambda\pi}{s} \sin \frac{(s-k)\lambda\pi}{s}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_{n,m} = k, R_{n,m} = r) &= \frac{2}{\binom{m+n}{n}} \times \\ &\times \left[\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \frac{k+2\gamma s}{r} \binom{r}{\frac{1}{2}(r+s)+\gamma s} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \frac{s-k+1+2\lambda(s+2)}{p+s-k+2+\lambda(s+2)} \times \right. \\ (1.5) \quad &\times \left(\frac{1}{2}(p+s-k)+\lambda(s+2) \right) + \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \frac{s-k+2\gamma s}{r} \times \\ &\times \left. \left(\frac{1}{2}(r+s-k)+\gamma s \right) \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \frac{k+1+2\lambda(s+2)}{p+k+2+\lambda(s+2)} \left(\frac{1}{2}(p+k)+\lambda(s+2) \right) \right]. \end{aligned}$$

2. Let us turn now to the proof of our assertions. According to our introduction let $\zeta_1^* < \zeta_2^* < \dots < \zeta_{n+m}^*$ be the union of the entirely independent elements of samples $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ and $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ arranged in order of magnitude. Of the definition it follows that the system $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n+m})$ consists of $n + 1$ -s and $m - 1$ -s. In consequence of the independency and the common distribution of the sample elements all of the $\binom{m+n}{n}$ possible arrangements of the $+1$ -s and -1 -s are of the same probability

$$\frac{1}{\binom{m+n}{n}}.$$

Let us now consider the partial sum

$$S_i = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_i, \quad (S_0 = 0)$$

which gives the difference between the number of ξ_j -s and η_l -s smaller than ζ_i^* i. e. S_i is equal to $nF_n(\zeta_i^* + 0) - mG_m(\zeta_i^* + 0)$.

Therefore in proving relations (1.1), (1.2) and (1.3) of theorem 1, we have to determine the probabilities of the events

$$(2.1) \quad \max_{1 \leq i \leq 2n} S_i = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$(2.2') \quad S_i \leq 0 \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq 2n \quad \text{in case} \quad k = 0, r = 0$$

$$(2.2'') \quad \begin{cases} S_i < k & \text{for} \quad 1 \leq i \leq r-1 \\ S_r = k \\ S_r \leq k & \text{for} \quad r+1 \leq i \leq 2n-k \quad \text{in case} \quad k=1, 2, \dots, n \\ & r=k, k+2, \dots, 2n-k \end{cases}$$

$$(2.3') \quad \begin{cases} S_i \leq 0 & \text{for} \quad 1 \leq i \leq t-1 \\ S_t = 0 \\ S_i < 0 & \text{for} \quad t+1 \leq i \leq 2n \quad \text{in case} \quad k=0, t=0, 2, 4, \dots, 2n \end{cases}$$

$$(2.3'') \quad \begin{cases} S_i \leq k & \text{for} \quad 1 \leq i \leq t-1 \\ S_t = k \\ S_i < k & \text{for} \quad t+1 \leq i \leq 2n-k \quad \text{in case} \quad k=1, 2, \dots, n, \\ & t=k, k+2, \dots, 2n-k. \end{cases}$$

In the same way the proof of relation (1.4) of theorem 2 requires the probability of the event

$$(2.4) \quad \max_{0 \leq i \leq m+n} \left| S_i + \frac{m-n}{2} \right| - \frac{m-n}{2} = k,$$

while for relation (1.5) of theorem 2, the probability of the event

$$(2.5) \quad \begin{cases} \left| S_i + \frac{m-n}{2} \right| - \frac{m-n}{2} < k \text{ for } 1 \leq i \leq r-1, \\ \left| S_r + \frac{m-n}{2} \right| - \frac{m-n}{2} = k, \\ \left| S_i + \frac{m-n}{2} \right| - \frac{m-n}{2} \leq k \text{ for } r+1 \leq i \leq m+n-k \end{cases}$$

is needed.

In order to determine the probabilities of the events (2.1) — (2.5) we consider the following random walk on the points of the straight line: Let us start in the origin and arrive after $n + m$ steps to the point $-(m - n)$.

According to our assumptions each of the possible $\binom{n+m}{n}$ paths have the same probability, so we have to determine the number of paths satisfying the restrictions given by relations (2.1) — (2.5). In determining the probabilities belonging to the events (2.1) — (2.3) we shall make use of the method applied in [8], in case (2.4) and (2.5) we shall refer to a lemma due to ELLIS.

3. Relation (2.1). The number of paths reaching the point $+k$ is counted. If we consider such a path and reflect it from the point reaching the height $+k$ for the first time about the point $+k$, then we obtain a path which starts from the origin and reaches after $n + m$ steps the height $2k + (m - n)$. The number of steps made in the positive direction is $m + k$, in the negative direction $n - k$, thus the number of all such paths is equal to $\binom{n+m}{n-k}$.

Therefore the number of paths not reaching the height $+k$ is $\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n-k}$ which equals $\binom{n+m}{n-k} \mathbf{P}(\max_{(i)} S_i < k)$ and a subtraction leads to relation (1.1).

4. The case (2.2'), i. e. $k = 0$; $r = 0$. In this case our assertion follows directly from the following known lemma (see e. g. [7] exercise 37 p. 74, solution p. 604): The probability of the event, that in a random sequence consisting of $\alpha - 1$ -s and $\beta + 1$ -s, the number of $+1$ -s never exceeds that of the -1 -s (i. e. no partial sum exceeds 0) is equal to $\frac{\alpha - \beta + 1}{\alpha + 1}$.

5. In determining the probability of the event (2.2'') we shall proceed as in paper [8] for $m = n$ (loc. cit. § 3, p. 190—191). According to this the number of paths reaching the height k for the first time at the r -th step is

$$\frac{k}{r} \binom{r}{\frac{r+k}{2}} \quad \text{for } k > 0.$$

For the further part of the path, i. e. for the succeeding $m + n - r$ steps, it is required that the height $+k$ must not be exceeded. According to the lemma in 4. with $\alpha = m - \frac{r-k}{2}$ and $\beta = n - \frac{r+k}{2}$ only the $\frac{2(m-n+k+1)}{2m-r+k+2}$ -th portion of the possible $\binom{m+n-r}{n-\frac{r+k}{2}}$ paths satisfy

this condition ($k = 1, 2, \dots$). As each of the considered first r steps and following $m + n - r$ steps may be combined we obtain the last formula of (1.2).

In the case of $T_{n,m}^+$ of theorem 1 the same procedure may be carried through, but starting at the endpoint $(n - m)$ and arriving to the origin and considering in this case the *first* maximum place.

6. In derivation of the further probabilities we shall make use of the following general lemma due to ELLIS (see e. g. JORDAN [4] p. 404—408):

Let us consider the random walk on the integer points a of the interval $(0, s)$ of the straight line. Let us start at the point $a = i$ ($0 < i < s$) and arrive after N steps to the point $a = j$ ($0 < j < s$) passing neither the origin nor the point s . The number of such paths is given by

$$\begin{aligned} f(s, N, i, j) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\binom{N}{\frac{1}{2}(N-i+j)+\gamma s} - \binom{N}{\frac{1}{2}(N+i+j)+\gamma s} \right] = \\ &= \frac{2^{N+1}}{s} \sum_{k=1}^{s-1} \cos^{N-1} \frac{\lambda \pi}{s} \sin \frac{i \lambda \pi}{s} \sin \frac{j \lambda \pi}{s}. \end{aligned}$$

This expression is obtained by putting in the cited formulae $p = q = \frac{1}{2}$ and multiplying them by 2^N , i. e. by the number of all possible paths in the case investigated there and finally changing to our notations.

In our case the random walk takes place in the interval $-(m-n)-k, k$ starting at point 0 and arriving after $m + n$ steps to the point $-(m-n)$. For applying our above formulae the interval has to be translated by $(m-n) + k$. Thus the probability of the event (2.3) is obtained by replacing in above formulae $s = 2k + m - n$, $N = m + n$, $i = m + n - k$, $j = k$

$$\frac{f(2k + m - n, m + n, k + m - n, k)}{\binom{m+n}{n}},$$

which gives our formulae in (1.4).

Formula (1.5) is obtained in the following way: The number of paths starting from the origin and reaching the point $k - 1$ in $r - 1$ steps without passing the points $-(m-n) - k$ and $+k$ is

$$f(2k + m - n, r - 1, k + m - n, 2k + m - n - 1) = f(s, r - 1, s - k, s - 1)$$

using the notation $s = 2k + m - n$.

The next step of each path must lead from $k-1$ to k . Now the number of paths starting from k and reaching after $m+n-r$ steps the point $-(m-n)$ without having passed $-(m-n)-k-1$ or $k+1$ is

$$f(s+2, m+n-r, s+1, k+1).$$

Therefore the number of paths reaching the point k at the r -th step for the first time without previously having passed $-(m-n)-k$ and in the following reaching neither point $k+1$ nor $-(m-n)+1$ is the product of above two expressions.

We may determine in the same way the number of paths starting from the origin, arriving at the $(m+n)$ -th step to the point $-(m-n)$ and reaching the lowest position $-(m-n)-k$ for the first time at the r -th step, without having passed the height k before, further without reaching the heights $k+1$ and $-(m-n)-1$. Then we obtain

$$f(s, r-1, s-k, 1) \cdot f(s+2, m+n-r, 1, k+1).$$

Expression (1.5) is obtained from above quantities after the following modifications:

$$\begin{aligned} & f(s, r-1, s-k, s-1) = \\ &= \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \left[\binom{r-1}{\frac{1}{2}(r+k)-1+\gamma s} - \binom{r-1}{\frac{1}{2}(r-k)-1+(\gamma+1)s} \right] = \\ &= \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \left[\binom{r-1}{\frac{1}{2}(r+k)-1+\gamma s} - \binom{r-1}{\frac{1}{2}(r+k)-(\gamma+1)s} \right]. \end{aligned}$$

As we have only a finite nonvanishing number of terms we may replace in the second term $\gamma+1$ by $-\gamma$ thus the result is only the reverse order translated by 1 in the second terms. Finally each difference in the sum equals the corresponding term in (1.2). For $f(s, r-1, s-k, 1)$, $f(s+2, m+n-r, s+1, k+1)$ and $f(s+2, m+n-r, 1, k+1)$ analogous modifications lead to our results in (1.5).

§ 2. Limiting distribution theorems

7. Under the conditions $F(x) \equiv G(x)$ and if $\frac{m-n}{\sqrt{m+n}} \rightarrow 2c$ ($m \geq n$, $c \geq 0$) the following limiting relations are valid (in each case let be $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 1$):

Theorem 3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{B_{n,m}^+}{\sqrt{n+m}} < y \right) = 1 - e^{-2y^2 - 4cy}.$$

Theorem 4.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{B_{n,m}^+}{\sqrt{n+m}} < y, \frac{R_{n,m}^+}{n+m} < z \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{B_{n,m}^+}{\sqrt{n+m}} < y, \frac{T_{n,m}^+}{n+m} < z \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \int_0^z \frac{u(u+2c)}{[v(1-v)]^{3/2}} e^{-\frac{(u+2cv)^2}{2v(1-v)}} du dv. \end{aligned}$$

Theorem 5.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{B_{n,m}}{\sqrt{n+m}} < y \right) &= e^{2c^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [e^{-2[2iy+(2i+1)c]^2} - e^{-2[(2i+1)(y+c)]^2}] = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{e^{2c^2}}{y+c} \left[\sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2 \pi^2}{8(y+c)^2}} \left(\cos \frac{c \lambda \pi}{y+c} - (-1)^\lambda \right) \right]. \end{aligned}$$

Remark. In case $c = 0$ we obtain from theorem 5 the following forms of the Kolmogorov distribution:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2 y^2}$$

and

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2y} \sum_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\frac{(2\lambda+1)^2 \pi^2}{8y^2}}$$

resp.

Using the notations

$$f_c(y, z) = \frac{1}{z^{3/2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [(1-4i)y - 4ic] e^{-\frac{[(4i-1)y+4ic]^2}{2z}},$$

$$\varphi_c(y, z) = \frac{1}{z^{3/2}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(4j+1)y + (4j+2)c] e^{-\frac{[(4j+1)y+(4j+2)c]^2}{2z}}$$

the following theorem is valid:

Theorem 6.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{B_{n,m}}{\sqrt{n+m}} < y, \frac{R_{n,m}}{n+m} < z \right) &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \int_0^z [f_c(u, v) \varphi_c(u, 1-v) + f_c(u, 1-v) \varphi_c(u, v)] du dv. \end{aligned}$$

Remark. In the case $c = 0$ we obtain the following joint distribution theorem:

Corollary. If $m - n = o(\sqrt{m + n})$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{B_{n,m}}{\sqrt{n+m}} < y, \frac{R_{n,m}}{m+n} < z \right) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^y \int_0^z f(u, v) f(u, 1-v) du dv,$$

where

$$f(y, z) = \frac{1}{z^{3/2}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (2i+1) e^{-\frac{(2i+1)y^2}{2z}},$$

which contains as a special case for $m - n = 0$ the result of [8] (see p. 188. theorem 4).

8. Proofs. As to the measure theoretical background of our limiting distribution theorems we refer to the proof in [8] (see loc. cit. § 4, p. 197.).

For derivation of the formulae of theorems 3—6, the following notations are introduced:

$$m + n = 2N,$$

$$m - n = 2l \sim 2c\sqrt{2N},$$

$$r \sim 2Nz,$$

$$k \sim y\sqrt{2N}$$

and from these follow

$$m + n - r \sim 2N(1 - z),$$

$$m = N + O(\sqrt{N}),$$

$$n = N + O(\sqrt{N}),$$

$$s = 2k + (m - n) \sim 2(y + c)\sqrt{2N},$$

$$dy \sim \frac{t}{\sqrt{2N}}, \quad dz \sim \frac{1}{N} (dr = 2(!)).$$

We shall make use of the following well-known relations:

$$(8.1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\binom{2N}{N-l}}{\binom{2N}{N}} = e^{-2c^2},$$

$$(8.2) \quad \binom{2N}{N} \sim \frac{2^{2N+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi N}},$$

$$(8.3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{2\sqrt{N}} \right)^N = e^{-\frac{a^2}{8}}.$$

a) **Proof of theorem 3.** The distribution function of the corresponding final case is (according) to formula (1.1) of theorem 1)

$$P(B_{n,m}^+ < k) = 1 - \frac{\binom{m+n}{m-k}}{\binom{m+n}{n}} = 1 - \frac{\binom{2N}{N-l-k}}{\binom{2N}{N}} \frac{\binom{2N}{N}}{\binom{2N}{N-l}}.$$

Applying (8.1) we obtain:

$$P\left(\frac{B_{n,m}^+}{\sqrt{m+n}} < y\right) \rightarrow 1 - e^{-2y^2 - 4yc}.$$

b) In deriving theorem 4 we start from (1.2) of theorem 1 in case $k > 1$:

$$P(B_{n,m}^+ = k, R_{n,m}^+ = r) = \frac{2k(m-n+k+1)}{r(2m-r+k+2)} \frac{\binom{r}{\frac{r+k}{2}} \binom{m+n-r}{n - \frac{r+k}{2}}}{\binom{m+n}{n}},$$

where $r = k, k+2, \dots, 2n-k$.

Using above relations we obtain

$$\frac{2k}{r} \frac{m-n+k+1}{2m-r+k+2} \sim \frac{y(y+2c)}{z(1-z)} \cdot \frac{1}{N}.$$

Of (8.1) and (8.2) it follows that

$$\frac{\binom{r}{\frac{r}{2}}}{\binom{r}{\frac{r}{2}}} \rightarrow e^{-\frac{y^2}{2z}} \quad \text{if } r = 2Nz \rightarrow \infty.$$

$$\frac{\binom{m+n-r}{n - \frac{r+k}{2}}}{\binom{m+n-r}{\frac{1}{2}(m+n-r)}} \rightarrow e^{-\frac{(y+2c)^2}{2(1-z)}},$$

$$\frac{\binom{m+n}{\frac{1}{2}(m+n)}}{\binom{m+n}{n}} \rightarrow e^{2c^2},$$

$$\frac{\binom{r}{\frac{r}{2}} \binom{m+n-r}{\frac{1}{2}(m+n-r)}}{\binom{m+n}{\frac{1}{2}(m+n)}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{[z(1-z)]^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2N}}.$$

By multiplication of above relations we obtain

$$\mathbf{P}(B_{n,m}^+ = k, R_{n,m}^+ = r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y(y+2c)}{[z(1-z)]^{3/2}} e^{-\frac{(y+2c)^2}{z(1-z)}} \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\sqrt{2N}},$$

which gives the density function of the joint distribution function in theorem 4. The same procedure leads to result for $T_{n,m}^+$ as well.

c) We may obtain in the same way as in a) theorem 5 from the first formula of (1.4) in theorem 2.

In deriving the second form of the distribution function in theorem 5, we may make use of (8.3)

$$\left(\cos \frac{\lambda\pi}{s} \right)^{m+n} \rightarrow e^{-\frac{\lambda^2\pi^2}{s(y+c)^2}}, \quad \text{where } s \sim 2(y+c)\sqrt{m+n},$$

further

$$\begin{aligned} \sin \frac{k\lambda\pi}{s} \sin \frac{(k+m-n)\lambda\pi}{s} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{m-n}{s} \lambda\pi - (-1)^k \right) \sim \\ &\sim \frac{1}{2} \left[\cos \frac{c\lambda\pi}{y+c} - (-1)^k \right] \end{aligned}$$

and

$$\frac{2^{n+m+1}}{s \binom{m+n}{n}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{2c^2}.$$

d) From formula (1.5) of theorem 2 we may obtain the density function of theorem 6 in the same way as for the one sided case in b).

§ 3. Proof of the asymptotic consistency

Let us suppose that instead of the null hypothesis $H_0: F(x) \equiv G(x)$ the alternative hypothesis $H_1: G(x) = F_1(x) \not\equiv F(x)$ holds, where the distribution functions are continuous. We shall prove that in the case of a test based on the statistics $\frac{B_{n,m}}{\sqrt{m+n}}$ and on the level (the error of first kind) α , the probability of rejecting H_0 if it is not true tends to 1 in case $n, m \rightarrow \infty$, $(m-n)^2 \sim 4c^2(m+n)$.

Let us denote by $\Delta = \max_{(x)} |F(x) - F_1(x)|$ and let be x_0 a point for which $|F(x_0) - F_1(x_0)| = \Delta$; as mentioned before

$$P\left(\frac{B_{n,m}}{\sqrt{m+n}} > d_\alpha | H_0\right) = \alpha$$

holds, where in case of $B_{n,m} > d_\alpha \sqrt{m+n}$ H_0 is rejected.

The probability of this event is evidently not less than that of the event that for the point x_0 the following relation holds

$$\left| n F_n(x_0) - m G_m(x_0) + \frac{m-n}{2} \right| - \frac{m-n}{2} > d_\alpha \sqrt{m+n}.$$

Now it will be shown that under the validity of H_1 the probability of the latter event tends to 1. Making use of the fact that $F_1(x_0) = F(x_0) \pm \Delta$ this event may be written in the following form:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{n}{m+n} \sqrt{m+n} (F_n(x_0) - F(x_0)) - \frac{m}{m+n} \sqrt{m+n} (G_m(x_0) - F_1(x_0)) + \right. \\ & \left. + \frac{n-m}{\sqrt{m+n}} F(x_0) \pm \sqrt{m+n} \frac{n}{m+n} \Delta + \frac{m-n}{\sqrt{m+n}} \right| - \frac{m-n}{2\sqrt{m+n}} > d_\alpha. \end{aligned}$$

The terms on the left are — except that of $\frac{n}{\sqrt{m+n}} \Delta$ which tends to infinity — bounded with probability near to 1. Hence the probability that this event will occur if H_1 is valid tends to 1.

In the same way the consistency of the $B_{n,m}^+$ statistics can be proved, under the alternative hypothesis.

§ 4. Remark on the limiting process

Let us suppose now that $F(x) \equiv G(x) \equiv x$ in $0 \leq x \leq 1$, i. e. let us consider the case of the uniform distribution in the interval $(0, 1)$. For the stochastic process

$$\varphi_{n,m}(x) = \frac{n(F_n(x) - x) - m(G_m(x) - x)}{\sqrt{n+m}}$$

defined in the interval $(0, 1)$

$$M(\varphi_{n,m}(x)) = 0,$$

$$M[\varphi_{n,m}(x) \varphi_{n,m}(x')] = x(1-x') \quad 0 \leq x \leq x' \leq 1$$

hold for any x, x' . Hence the limiting process is a Gaussian one in $(0, 1)$ with the same expected value 0 and covariance function as above. Our statistic $nF_n(x) - mG_m(x)/\sqrt{m+n}$ has the limiting expected value $-2cx$ and covariance function $x - xx'(1+4c^2)$.

(Received March 30, 1960.)

REFERENCES

- [1] BLACKMAN, J.: „Correction to »An extension of the Kolmogorov distribution«.” *Annals of Mathematical Statistics* **29** (1958) 318—322.
- [2] ГНЕДЕНКО, Б. В. — КОРОЛЮК В. С.: „О максимальном расхождении двух эмпирических распределений”. *Доклады Академии Наук СССР* **80** (1951) 525—528.
- [3] HODGES, J. L.: „The significance probability of the Smirnov two-sample test.” *Arkiv för Matematik* **3** (1958) 469—486.
- [4] JORDAN, K.: *Fejezetek a klasszikus valószínűség-számításból*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.
- [5] КОРОЛЮК, В. С.: „Асимптотический анализ распределений максимальных уклонов в схеме Бернулли.” *Теория вероятностей и ее применения* **4** (1959) 369—397.
- [6] ОЗОЛС, В.: „О векторандах и непараметрическом критерии согласия для двух конечных выборок”. *Известия АН СССР* **8** (1956) 150—158.
- [7] RÉNYI A.: *Valószínűség-számítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1955.
- [8] VINCZE, I.: „Einige zweidimensionale Verteilungs- und Grenzverteilungssätze in der Theorie der geordneten Stichproben.” *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 183—209.

ТЕОРЕМЫ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ И ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ, СВЯЗАННЫЕ С ДВУМЯ ВЫБОРКАМИ С НЕЗНАЧИТЕЛЬНО РАЗЛИЧНЫМ ЧИСЛОМ ЭЛЕМЕНТОВ

J. REIMANN и I. VINCZE

Резюме

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ — выборки относительно случайных величин ξ и η с непрерывными функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$, а $F_n(x)$ и $G_m(x)$ соответствующие эмпирические функции распределения.

Авторы определяют теоремы распределения и предельного распределения относительно следующих статистик:

$$B_{n,m}^+ = \max_{(x)} [n F_n(x) - m G_m(x)]$$

$$B_{n,m} = \max_{(x)} \left| n F_n(x) - m G_m(x) + \frac{m-n}{2} \right| - \frac{m-n}{2}.$$

Относительно числа элементов они предполагают, что $m > n$ и в случае $n \rightarrow \infty$, $\frac{(m-n)^2}{m+n} \rightarrow 4c^2$, где $c > 0$ постоянная, т. е. числа элементов «незначительно» различны.

Пусть $R_{n,m}^+$ и $T_{n,m}^+$ означают нижнюю и верхнюю грань мест максимумов относительно статистики $B_{n,m}^+$, т. е. порядок первого и последнего элемента в соединенной последовательности элементов для которых имеет место максимум. Аналогичным образом пусть $R_{n,m}$ обозначает нижнюю грань мест максимумов относительно статистики $B_{n,m}$. Тогда при предположении $F(x) \equiv G(x)$ имеют место следующие теоремы о распределении и предельном распределении:

а) Теоремы о распределении:

Теорема 1.

$$(1.1) \quad \mathbf{P}(B_{n,m}^+ = k) = \frac{2k+1+m-n}{m+k+1} \cdot \frac{\binom{m+n}{n-k}}{\binom{m+n}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m).$$

$$(1.2) \quad \mathbf{P}(B_{n,m}^+ = k, R_{n,m}^+ = r) = \begin{cases} 0 & \text{если } k < 0 \text{ или } k+r \text{ нечетно,} \\ \frac{m-n+1}{m+1}, & \text{если } k=0, r=0, \\ \frac{2k(m-n+k+1)}{r(2m-r+k+2)} \cdot \frac{\binom{r}{r+k} \binom{m+n-r}{n-\frac{r+k}{2}}}{\binom{m+n}{n}}, & \\ \text{если } k=1, 2, \dots, n; r=k, k+2, \dots, 2n-k. \end{cases}$$

$$(1.3) \quad \mathbf{P}(B_{n,m}^+ = k, T_{n,m}^+ = t) = \begin{cases} \frac{1}{t+1} \frac{m-n}{m+n-t} \frac{\binom{t}{\frac{t}{2}} \binom{m+n-t}{n-\frac{t}{2}}}{\binom{m+n}{n}}, & \\ \text{если } k=0; t=0, 2, \dots, 2n, \\ \frac{2(k+1)(k+m-n)}{(t+k+2)(m+n-t)} \frac{\binom{t}{\frac{t+k}{2}} \binom{m+n-t}{n-\frac{t+k}{2}}}{\binom{m+n}{n}}, & \\ \text{если } k=1, 2, \dots, n; r=k, k+2, \dots, 2n-k. \end{cases}$$

Теорема 2. При обозначении $s = 2k + m - n$

$$(1.4) \quad \mathbf{P}(B_{n,m} < k) = \frac{1}{\binom{m+n}{n}} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \left[\binom{m+n}{m+\gamma s} - \binom{m+n}{m+k+\gamma s} \right] =$$

$$= \frac{2^{m+n+1}}{s} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \cos^{n+m} \frac{\lambda\pi}{s} \sin \frac{k\lambda\pi}{s} \sin \frac{(s-k)\lambda\pi}{s},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(B_{n,m} = k, R_{n,m} = r) &= \frac{2}{\binom{m+n}{n}} \left[\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \frac{k+2\gamma s}{r} \binom{r}{\frac{1}{2}(r+s)+\gamma s} \right] \times \\
 (1.5) \quad &\times \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \frac{s-k+1+2\lambda(s+2)}{m+n-r+s-k+2+\lambda(s+2)} \binom{m+n-r}{\frac{1}{2}(m+n-r)+\frac{1}{2}(s-k)+\lambda(s+2)} + \\
 &+ \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \frac{s-k+2\gamma s}{r} \binom{r}{\frac{1}{2}(r+s-k)+\gamma s} \times \\
 &\times \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \frac{k+1+2\lambda(s+2)}{m+n-r+k+2+\lambda(s+2)} \binom{m+n-r}{\frac{1}{2}(m+n-r)+\frac{1}{2}k+\lambda(s+2)}.
 \end{aligned}$$

Замечание: в случае $m = n$ из (1.1) и (1.4) получаются распределения Гнеденко—Королюк-а.

б) Теоремы о предельном распределении:

Если $F(x) \equiv G(x)$ и $\frac{m-n}{\sqrt{n+m}} \rightarrow 2c \quad (m \geq n, c \geq 0)$,

то в случае $y \geq 0, 1 \geq z \geq 0$

Теорема 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{B_{n,m}^+}{\sqrt{n+m}} < y \right) = 1 - e^{-2y^2 - 4cy}.$

Теорема 4.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{B_{n,m}^+}{\sqrt{n+m}} < y, \frac{R_{n,m}^+}{n+m} < z \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{B_{n,m}^+}{\sqrt{n+m}} < y, \frac{T_{n,m}^+}{n+m} < z \right) = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \int_0^z \frac{u(u+2c)}{[v(1-v)]^{3/2}} e^{-\frac{(u+2cv)^2}{2v(1-v)}} du dv.
 \end{aligned}$$

Теорема 5.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{B_{n,m}}{\sqrt{n+m}} < y \right) &= e^{2c^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [e^{-2[2iy+(2i+1)c]^2} - e^{-2[(2i+1)(y+c)]^2}] = \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{e^{2c^2}}{y+c} \left[\sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2 \pi^2}{8(y+c)^2}} \left(\cos \frac{c \lambda \pi}{y+c} - (-1)^\lambda \right) \right].
 \end{aligned}$$

Замечание: в случае $c = 0$ из теоремы 5 получается следующая форма распределения Колмогоров-а:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2 y^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2y} \sum_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\frac{(2\lambda+1)^2 \pi^2}{8y^2}}.$$

Теорема 6. При обозначениях

$$f_c(y, z) = \frac{1}{z^{3/2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [(1 - 4i)y - 4ic] e^{-\frac{[(4i-1)y + 4ic]^2}{2z}}$$

$$\varphi_c(y, z) = \frac{1}{z^{3/2}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(4j+1)y + (4j+2)c] e^{-\frac{[(4j+1)y + (4j+2)c]^2}{2z}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{B_{n,m}}{\sqrt{n+m}} < y, \frac{R_{n,m}}{n+m} < z \right) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \int_0^z [f_c(u, v) \varphi_c(u, 1-v) + f_c(u, 1-v) \varphi_c(u, v)] du dv. \end{aligned}$$

Замечание: в случае $c = 0$, когда $m - n = O(\sqrt{m+n})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{B_{n,m}}{\sqrt{n+m}} < y, \frac{R_{n,m}}{m+n} < z \right) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^y \int_0^z f(u, v) f(u, 1-v) du dv,$$

где

$$f(y, z) = \frac{1}{z^{3/2}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (2i+1) e^{-\frac{(2i+1)^2 y^2}{2z}}.$$

Эта формула в качестве специального случая содержит теорему 4 на стр. 188 работы [8].

Авторы доказывают, что критерий, основывающийся на статистике $B_{n,m}$, асимптотично состоятелен относительно всякой непрерывной альтернативной гипотезы, а критерий основывающийся на статистике $B_{n,m}^+$, асимптотично состоятелен относительно непрерывной альтернативной гипотезы.

Авторы замечают, что предельный процесс стохастического процесса

$$\psi_{n,m}(x) = \frac{n F_n(x) - m G_m(x)}{\sqrt{n+m}}$$

является Гауссовым с математическим ожиданием $-2cx$ и корреляционной функцией $x - x'$ $(1 + 4c^2)$ $(0 \leq x \leq x' \leq 1)$.

ON BIVARIATE STOCHASTIC CONNECTION

by

PÉTER CSÁKI and JÁNOS FISCHER

Introduction

In this paper the problems of bivariate connection are discussed with the aid of Hilbert space theory and not by classical methods. This enables a more general treatment.

The maximal correlation is shown to be a highly adapt measure for the intensity of bivariate stochastic connection. The calculation of the maximal correlation leads to the determination of the eigenvalues of a pair of operators. Some characteristics of this pair of operators will be discussed.

In § 1 the main notions and symbols will be introduced and the conditional expected value will be considered, further some characteristics of the correlation ratio and the maximal correlation will be discussed. Moreover a generalized definition of the mean square contingency will be given. In § 2 this generalized definition will be proved to include the former definitions of this notion. Conditions under which the mentioned pair of operators forms a pair of integral operators will be given.

Finally, a method will be described for replacing any given distribution by a symmetric one apt to our purposes.

Some characteristics of maximal correlation will be treated with the aid of these results in our following paper.

§ 1. Basic notions

1.1. First of all, the notions, terminology and symbols used in this paper will be explained.

Let $(\Omega, \mathbf{S}, \mathbf{P})$ be a probability space, i. e. Ω a space of events, \mathbf{S} a σ -algebra of its subsets and \mathbf{P} a probability measure defined on \mathbf{S} ($\mathbf{P}(\Omega) = 1$).

Let ξ be any random variable (real measurable function defined on Ω). In the following, two random variables which coincide with probability 1 are considered as identical. The expected value of ξ — if it exists — is denoted by $\mathbf{M}(\xi)$, so $\mathbf{M}(\xi) = \int_{\Omega} \xi d\mathbf{P}$. \mathbf{S}_{ξ} denotes the smallest σ -algebra with respect

to which ξ is measurable, i. e. such a σ -algebra of events \mathcal{A} for which $\mathcal{A} = \{\xi \in B\}$, where B is any Borel set on the real line. It is pointed out by J. L. DOOB ([2] p. 603) that the random variable ζ is measurable with respect to \mathbf{S}_{ξ} if and only if it is a function of ξ , i. e. if there exists a Borel measurable function $f(x)$ such that $\zeta = f(\xi)$.

$L^2 = L^2(\Omega, S, \mathbf{P})$ denotes a space of random variables ζ for which $\mathbf{M}(\zeta^2)$ is finite. This space L^2 forms such a complete Hilbert space in which $(\zeta_1, \zeta_2) = \mathbf{M}(\zeta_1 \zeta_2)$ is the scalar product of $\zeta_1 \in L^2$ and $\zeta_2 \in L^2$, thus $\|\zeta\| = \sqrt{\mathbf{M}(\zeta^2)}$ is the norm of $\zeta \in L^2$. The standard deviation of $\zeta \in L^2$ is denoted by $\mathbf{D}(\zeta)$, i. e. $\mathbf{D}(\zeta) = \|\zeta - \mathbf{M}(\zeta)\|$. We call the random variable $\frac{\zeta - \mathbf{M}(\zeta)}{\mathbf{D}(\zeta)}$

where $\mathbf{D}(\zeta) \neq 0$ the standardized of $\zeta \in L^2$, and denote it by ζ^* ; ζ is called standard if $\zeta = \zeta^*$ (i. e. if $\mathbf{M}(\zeta) = 0$, $\mathbf{D}(\zeta) = 1$). The correlation coefficient of $\zeta_1 \in L^2$, $\mathbf{D}(\zeta_1) \neq 0$ and $\zeta_2 \in L^2$, $\mathbf{D}(\zeta_2) \neq 0$ is denoted by $\mathbf{R}(\zeta_1, \zeta_2)$, thus $\mathbf{R}(\zeta_1, \zeta_2) = (\zeta_1^*, \zeta_2^*)$.

Let us denote the distribution function of any random variable ξ by $F(x)$, further

$$L_F^2 = \left\{ f(x) : \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dF(x) < \infty \right\}.$$

L_F^2 is a complete and separable Hilbert space in which the scalar product is defined by $(f_1(x), f_2(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dF(x)$. In case of ξ being a discrete random variable which can take on n different values, the space L_F^2 is an n -dimensional Euclidean space.

Let be $f(x) \in L_F^2$. Then the random variable $f = f(\xi)$ is such that $f \in L^2$. The space of random variables of this form are denoted by L_ξ^2 . Obviously $L_\xi^2 = L^2(\Omega, S_\xi, \mathbf{P})$. Between the elements of the space L_F^2 and L_ξ^2 there exists a one-to-one correspondence preserving the scalar product — and so the norm as well. Consequently, L_ξ^2 is a complete and separable Hilbert space and it is of finite dimension if ξ takes on only a finite number of values. All what has been stated for L_F^2 is valid for L_ξ^2 , too.

1.2. Every random variable $\zeta \in L^2$ can be uniquely decomposed in the form $\zeta = \zeta' + \zeta''$ where $\zeta' \in L_\xi^2$ and ζ'' is orthogonal to any element of L_ξ^2 . Accordingly, for ζ there exists such a unique $\zeta' \in L_\xi^2$ that $(\zeta', f) = (\zeta, f)$ for any $f \in L_\xi^2$, i. e. $\zeta - \zeta'$ is orthogonal to L_ξ^2 . For ζ' , $\min \|\zeta - f\| = \|\zeta - \zeta'\|$ holds. The operator transforming ζ into its orthogonal projection on L_ξ^2 (i. e. into ζ') is denoted by \mathbf{A}_ξ . Therefore

$$(1.1) \quad (\mathbf{A}_\xi \zeta, f) = (\zeta, f) \text{ whenever } \zeta \in L^2, f \in L_\xi^2.$$

Later we shall see for any $\zeta \in L^2$, that $\mathbf{A}_\xi \zeta$ is the regression curve of ζ on ξ (i. e. the conditional expected value of ζ on ξ).

The conditional expected value is defined by KOLMOGOROV in the following way: the conditional expected value of the integrable random variable ζ on the conditioning random variable ξ is such an S_ξ -measurable random variable $\mathbf{M}(\zeta | \xi)$ for which

$$(1.2) \quad \int_{\mathcal{A}} \mathbf{M}(\zeta | \xi) d\mathbf{P} = \int_{\mathcal{A}} \zeta d\mathbf{P} \quad \text{for any } \mathcal{A} \in S_\xi.$$

$\mathbf{M}(\zeta | \xi)$ is with probability 1 uniquely determined by the Radon—Nikodym theorem, further

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\zeta | \xi)) = \mathbf{M}(\zeta)$$

and for any S_ξ -measurable random variable f such that ζf is integrable,

$$\mathbf{M}(\zeta f | \xi) = f \mathbf{M}(\zeta | \xi)$$

holds. Consequently,

$$(1.3) \quad \int_{\Omega} f \mathbf{M}(\zeta | \xi) d\mathbf{P} = \int_{\Omega} \zeta f d\mathbf{P}.$$

We can point out (see also R. R. BAHADUR [1]) that if $\zeta \in L^2$ then $\mathbf{A}_\xi \zeta = \mathbf{M}(\zeta | \xi)$ with probability 1, i. e. the regression (conditional expected value) of ζ on ξ coincides with the orthogonal projection of ζ on L^2_ξ . Namely, let $\mathcal{A} \in S_\xi$ — for which there exists a Borel set B such that $\mathcal{A} = \{\xi \in B\}$ — then especially for

$$f = \chi_{\mathcal{A}} = \begin{cases} 1 & \xi \in B \\ 0 & \xi \notin B; \end{cases}$$

$f \in L^2_\xi$ and from (1.1)

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{A}_\xi \zeta d\mathbf{P} = \int_{\mathcal{A}} \zeta d\mathbf{P}$$

wherefrom $\mathbf{A}_\xi \zeta = \mathbf{M}(\zeta | \xi)$ with probability 1.

1.3. The correlation ratio of the random variable $\zeta \in L^2$ on ξ is according to the above

$$(1.4) \quad \theta_\xi(\zeta) = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{M}(\zeta | \xi))}{\mathbf{D}(\zeta)} = \frac{\|\mathbf{M}(\zeta - \mathbf{M}(\zeta) | \xi)\|}{\|\zeta - \mathbf{M}(\zeta)\|} = \|\mathbf{A}_\xi \zeta^*\|$$

from which

$$(1.5) \quad \theta_\xi^2(\zeta) = (\mathbf{A}_\xi \zeta^*, \mathbf{A}_\xi \zeta^*) = (\zeta^*, \mathbf{A}_\xi \zeta^*).$$

Dividing (1.5) by (1.4) we have

$$(1.6) \quad \theta_\xi(\zeta) = \frac{(\zeta^*, \mathbf{A}_\xi \zeta^*)}{\|\mathbf{A}_\xi \zeta^*\|} = \mathbf{R}(\zeta, \mathbf{A}_\xi \zeta).$$

If $\zeta \in L^2$ and $f \in L^2_\xi$,

$$\|\mathbf{A}_\xi \zeta^* - (f^*, \zeta^*) f^*\|^2 = \|\mathbf{A}_\xi \zeta^*\|^2 - (f^*, \zeta^*)^2$$

hence

$$(1.7) \quad \theta_\xi^2(\zeta) = (f^*, \zeta^*)^2 + \|\mathbf{A}_\xi \zeta^* - (f^*, \zeta^*) f^*\|^2 \quad (\text{see Fig. 1}).$$

It is evident, that in case $f \in L^2_\xi$ we have $L_f^2 \subset L^2_\xi$, further $L_f^2 = L^2_\xi$ if and only if $f(x)$ is univalent, i. e. if it has an inverse function. Hence as for $\zeta \in L^2$ the relation $\mathbf{A}_f \mathbf{A}_\xi \zeta = \mathbf{A}_f \zeta$ is valid,

$$(1.8) \quad \|\mathbf{A}_f \zeta\| \leq \|\mathbf{A}_\xi \zeta\|$$

follows, where equality holds if and only if $\mathbf{A}_\xi \zeta$ is a function of f (in this case $\mathbf{A}_f \zeta = \mathbf{A}_\xi \zeta$ holds, too).

1.4. As $\zeta_c \equiv c \in L^2$ for any real number c , consequently the subspace orthogonal to ζ_c may be considered and denoted by L_0^2 . This is the space of random variables with expected values zero and finite standard deviations. Analogously, $L_{F,0}^2$ for such a subspace of L_F^2 and $L_{\xi,0}^2$ for L_ξ^2 .

Let us consider ξ and η , an arbitrary pair of random variables. In 1.4. and 1.5 the domains of the operators A_η and A_ξ are restricted to the spaces $L_{\xi,0}^2$ and $L_{\eta,0}^2$, respectively.

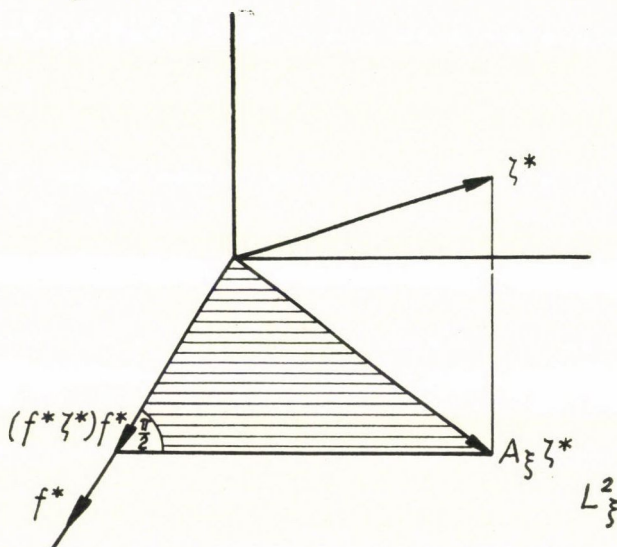


Figure 1.

The maximal correlation of ξ and η is defined as

$$(1.9) \quad S(\xi, \eta) = \sup_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2 \\ g \in L_{\eta,0}^2}} R(f, g).$$

This measure of stochastic connection was first defined by H. GEBELEIN [3]. Recently O. SARMANOV [6], [7] dealt with this problem and A. RÉNYI [5] generalized the notion.

Relating to the maximal correlation the following lemma is true:

Lemma 1.

$$(1.10) \quad S(\xi, \eta) = \|A_\eta\| = \|A_\xi\|.$$

Proof. As

$$\sup_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2 \\ \|f\|=1}} \|A_\eta f\| = \sup_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2 \\ \|f\|=1}} \left(\frac{A_\eta f}{\|A_\eta f\|}, f \right) \leq S(\xi, \eta)$$

and in case $f \in L_{\xi,0}^2$, $\|f\| = 1$, $g \in L_{\eta,0}^2$, $\|g\| = 1$, according to equation (1.7)

$$|(f, g)| \leq \left(\frac{A_\eta f}{\|A_\eta f\|}, f \right),$$

thus

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) \leq \sup_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2 \\ \|f\|=1}} \left(\frac{\mathbf{A}_\eta f}{\|\mathbf{A}_\eta f\|}, f \right),$$

consequently

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sup_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2 \\ \|f\|=1}} \|\mathbf{A}_\eta f\| = \|\mathbf{A}_\eta\|.$$

Similarly, $\mathbf{S}(\xi, \eta) = \|\mathbf{A}_\xi\|$. Thus our Lemma is proved.

A. RÉNYI [5] has shown that in the space $L_{\xi,0}^2$ the operator $\mathbf{A}_\xi \mathbf{A}_\eta$ is self-adjoint, positive definite and

$$(1.11) \quad \mathbf{S}^2(\xi, \eta) = \sup_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2 \\ \|f\|=1}} (\mathbf{A}_\xi \mathbf{A}_\eta f, f) = \|\mathbf{A}_\xi \mathbf{A}_\eta\|.$$

If

$$(1.12) \quad \begin{cases} \mathbf{A}_\eta f = \lambda g \\ \mathbf{A}_\xi g = \lambda f \end{cases} \quad f \in L_{\xi,0}^2, \quad g \in L_{\eta,0}^2$$

holds then we call λ an eigenvalue and f, g a pair of eigenfunctions of the pair of operators $\mathbf{A}_\eta, \mathbf{A}_\xi$. According to the results of the authors mentioned above, in (1.9) the supremum is the maximum if and only if $\mathbf{S}(\xi, \eta)$ is the highest of the values $|\lambda|$ in (1.12). In case of completely continuous $\mathbf{A}_\xi \mathbf{A}_\eta$, this condition is fulfilled.

1.5. Let $\{f_n\}$ and $\{g_n\}$ be complete orthonormal systems in $L_{\xi,0}^2$ and $L_{\eta,0}^2$, respectively. The positive square roots of the quantities

$$(1.13) \quad \begin{cases} ||| \mathbf{A}_\eta |||^2 = \sum_i \sum_k (\mathbf{A}_\eta f_i, g_k)^2 \\ ||| \mathbf{A}_\xi |||^2 = \sum_i \sum_k (f_i, \mathbf{A}_\xi g_k)^2 \end{cases}$$

are called the double norms of \mathbf{A}_η resp. \mathbf{A}_ξ . Of course, these double norms may be infinite, too. As

$$\|\mathbf{A}_\eta f_i\|^2 = \sum_k (\mathbf{A}_\eta f_i, g_k)^2 \quad \text{and} \quad \|\mathbf{A}_\xi g_k\|^2 = \sum_i (f_i, \mathbf{A}_\xi g_k)^2$$

hence

$$(1.14) \quad ||| \mathbf{A}_\eta |||^2 = \sum_i \|\mathbf{A}_\eta f_i\|^2 \quad \text{and} \quad ||| \mathbf{A}_\xi |||^2 = \sum_k \|\mathbf{A}_\xi g_k\|^2.$$

From (1.1) and (1.13)

$$(1.15) \quad ||| \mathbf{A}_\eta |||^2 = \sum_i \sum_k (f_i, g_k)^2 = ||| \mathbf{A}_\xi |||^2.$$

By means of the double norm the notion of the mean square contingency introduced by K. PEARSON may be extended to arbitrary pairs of random variables ξ, η , by defining the contingency as

$$(1.16) \quad \mathbf{C}(\xi, \eta) = ||| \mathbf{A}_\eta ||| = ||| \mathbf{A}_\xi |||.$$

According to the definition and (1.14)

$$(1.17) \quad C^2(\xi, \eta) = \sum_i \theta_\eta^2(f_i) = \sum_k \theta_\xi^2(g_k).$$

As shown later this definition is equivalent to that proposed by A. RÉNYI [4].

§ 2. An operator discussion of bivariate problems

2.1. Let the joint distribution function of ξ and η be $H(x, y)$ generating the measure P on the plane $[x, y]$; similarly, the marginal distribution functions $H_1(x)$ of ξ and $H_2(y)$ of η generating the measures P_1 and P_2 , respectively, on the real line. The spaces L_ξ^2 and $L_{H_1}^2$, resp. L_η^2 and $L_{H_2}^2$ are isomorphic in the sense explained in 1.1. To the operator A_η defined in the space L_ξ^2 there corresponds an operator A_1 transforming the elements of $L_{H_1}^2$ into $L_{H_2}^2$ in the following way: let be $f(x) \in L_{H_1}^2$ and $f = f(\xi) \in L_\xi^2$; then to the random variable $g = A_\eta f$ there exists such a unique $g(y) \in L_{H_2}^2$ that $g = g(\eta)$. Then A_1 is the operator which transforms $f(x)$ into this $g(y)$. Similarly, to A_ξ there corresponds an operator A_2 transforming the elements of $L_{H_2}^2$ into $L_{H_1}^2$. It follows from the construction that A_1 and A_2 , per analogiam, have the properties of A_η resp. A_ξ . The question arises, under which conditions are A_1 and A_2 integral operators. Concerning this problem there holds the following

Theorem 1. *The pair of operators A_1, A_2 forms a pair of integral operators if and only if $P \ll P_1 \times P_2$. In this case there exists a function $K(x, y)$ such that $P(E) = \iint_E K(x, y) dP_1 dP_2$ for any Borel set E in the plane $[x, y]$; furthermore,*

$$A_1 f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(x) dH_1(x) \quad \text{and} \quad A_2 g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) g(y) dH_2(y)$$

hold.

Proof. If $P \ll P_1 \times P_2$ then according to the Radon—Nikodym theorem there exists such a function $K(x, y)$ that for any Borel set E in the plane $[x, y]$

$$(2.1) \quad P(E) = \iint_E K(x, y) dH_1(x) dH_2(y)$$

holds. For $f(x) \in L_{H_1}^2$ and $g(y) \in L_{H_2}^2$

$$(f(\xi), g(\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) dH(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(x) g(y) dH_1(x) dH_2(y),$$

consequently $K(x, y) f(x) g(y)$ is integrable according to the measure $P_1 \times P_2$ for any $f(x) \in L_{H_1}^2$, $g(y) \in L_{H_2}^2$. The Fubini theorem implies that

$$k(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(x) dH_1(x)$$

exists for any $f(x) \in L_{H_1}^2$ and

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(y) g(y) dH_2(y)$$

exists for any $g(y) \in L_{H_2}^2$. Hence, (see e. g. A. C. ZAAZEN [8] p. 137), $k(y) \in L_{H_2}^2$

follows. Let be $k = k(\eta) \in L^2_\eta$. Then in case $f = f(\xi)$ and arbitrary $g = g(\eta) \in L^2_\eta$

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(x) g(y) dH_1(x) dH_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} k(y) g(y) dH_2(y) = (k, g)$$

wherefrom $(f - k, g) = 0$ for any $g \in L^2_\eta$; this results $k = \mathbf{A}_\eta f$, i. e.

$$(2.2) \quad \mathbf{A}_1 f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(y) dH_2(y) \quad \text{for any } f(y) \in L^2_{H_2};$$

analogously,

$$(2.3) \quad \mathbf{A}_2 g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) g(x) dH_1(x) \quad \text{for any } g(x) \in L^2_{H_1}.$$

Conversely, if for operator \mathbf{A}_1 there exists a function $K(x, y)$ specified by (2.2), then for any pair of Borel sets A, B —using the notations $\mathcal{A} = \{\xi \in A\}$, $\mathcal{B} = \{\eta \in B\}$; $\chi_{\mathcal{A}} = \begin{cases} 1 & \xi \in A \\ 0 & \xi \notin A \end{cases}$ and $\chi_{\mathcal{B}} = \begin{cases} 1 & \eta \in B \\ 0 & \eta \notin B \end{cases}$ —the following are true:

$$\begin{aligned} P(A \times B) &= P(\xi \in A, \eta \in B) = \mathbf{M}(\chi_{\mathcal{A}} \chi_{\mathcal{B}}) = (\chi_{\mathcal{A}}, \chi_{\mathcal{B}}) = \\ &= (\mathbf{A}_\eta \chi_{\mathcal{A}}, \chi_{\mathcal{B}}) = (\mathbf{A}_1 \chi_A(x), \chi_B(y)) = \int_{A \times B} K(x, y) dH_1(x) dH_2(y). \end{aligned}$$

For any Borel set E in the plane the above equation can be uniquely extended to (2.1) from which $P \ll P_1 \times P_2$ follows. (Similarly from \mathbf{A}_2 being an integral operator.) Thus the Theorem is proved.

Remark. The proof shows that either both of \mathbf{A}_1 and \mathbf{A}_2 are integral operators or none of them.

A. RÉNYI [4] defined the contingency as

$$(2.4) \quad \mathbf{C}^2(\xi, \eta) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [K(x, y) - 1]^2 dH_1(x) dH_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(x, y) dH_1(y) dH_2(y) - 1 & \text{if } P \ll P_1 \times P_2 \\ \infty & \text{in all other cases} \end{cases}$$

(where $K(x, y)$ is the function figuring in (2.1)).

A. RÉNYI proves his definition to involve the classical one for cases treated by K. PEARSON.

Theorem 2. *The definition of contingency given in (1.16) is equivalent to that of (2.4).*

Proof. Let

$$\{f_0(x), f_1(x), \dots\} \quad \text{and} \quad \{g_0(y), g_1(y), \dots\}$$

be complete orthonormal systems in $L^2_{H_1}$ resp. $L^2_{H_2}$, further $f_0(x) \equiv g_0(y) \equiv 1$. Then $\{f_1(x), f_2(x), \dots\}$ and $\{g_1(y), g_2(y), \dots\}$ will be complete orthonormal systems in the spaces $L^2_{H_1,0}$ resp. $L^2_{H_2,0}$.

Therefore

$$(2.5) \quad \mathbf{C}^2(\xi, \eta) = ||| \mathbf{A}_\eta |||^2 = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} (\mathbf{A}_1 f_i(x), g_k(y))^2 = \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} (\mathbf{A}_1 f_i(x), g_k(y))^2 - 1,$$

viz. in case $i \geq 1$

$$(\mathbf{A}_1 f_i(x), g_0(y)) = (f_i(x), \mathbf{A}_2 g_0(y)) = (f_i(x), f_0(x)) = 0,$$

similarly in case $k \geq 1$

$$(\mathbf{A}_1 f_0(x), g_k(y)) = (g_0(y), g_k(y)) = 0;$$

further

$$(\mathbf{A}_1 f_0(x), g_0(y)) = 1.$$

If $P \ll P_1 \times P_2$, i. e. by Theorem 1 if \mathbf{A}_1 is an integral operator then

$$(2.6) \quad ||| \mathbf{A}_1 |||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(x, y) dH_1(x) dH_2(y) = \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} (\mathbf{A}_1 f_i(x), g_k(y))^2.$$

From (2.5) and (2.6) $\mathbf{C}^2(\xi, \eta) = ||| \mathbf{A}_\eta |||^2 = ||| \mathbf{A}_1 |||^2 - 1$, which is identical to (2.4).

On the other hand, if $||| \mathbf{A}_1 ||| < \infty$, then \mathbf{A}_1 is known to be a completely continuous integral operator, thus according to Theorem 1 $P \ll P_1 \times P_2$ must hold; consequently if the latter does not hold, then $\mathbf{C}(\xi, \eta) = ||| \mathbf{A}_1 ||| = \infty$. Thus our statement is proved.

2.2. Let the measure P be generated on the plane by the joint distribution of ξ and η , further let be

$$(2.7) \quad \begin{cases} P_A(B) = P(A \times B) \\ P^B(A) = P(A \times B) \end{cases}$$

where A and B are arbitrary Borel sets. $P_A(B)$ for fixed A and $P^B(A)$ for fixed B are measures on the class of Borel sets on the real line. As

$$(2.8) \quad P_A(B) \leq P_2(B) \quad \text{and} \quad P^B(A) \leq P_1(A),$$

consequently $P_A \ll P_2$ and $P^B \ll P_1$. According to the Radon—Nikodym theorem there exist functions $P_1(A|y)$ and $P_2(B|x)$ such that

$$(2.9) \quad \begin{cases} P_A(B) = \int_B P_1(A|y) dP_2 \\ P^B(A) = \int_A P_2(B|x) dP_1, \end{cases}$$

respectively.

Further let be $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ where A is any Borel set on the real line; then

$$\int_B \mathbf{A}_1 \chi_A(x) dP_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_B(y) \mathbf{A}_1 \chi_A(x) dH_2(y) = (\mathbf{A}_1 \chi_A(x), \chi_B(y)) = P_A(B),$$

therefore

$$(2.10) \quad \mathbf{A}_1 \chi_A(x) = P_1(A|y)$$

for almost every y according to the measure P_2 . Similarly,

$$(2.11) \quad \mathbf{A}_2 \chi_B(y) = P_2(B|x)$$

for almost every x according to the measure P_1 . Thus $P_1(A|y)$ resp. $P_2(B|x)$ are the conditional distributions, which generate probability measures (see J. L. DOOB [2] p. 29).

If $P_1(A) = 0$ then by (2.8)

$$P_A(B) = \int_B P_1(A|y) dP_2 = 0,$$

whence $P_1(A|y) = 0$ follows for almost every y according to the measure P_2 . This does not imply however, $P_1(A|y) \ll P_1(A)$. As to the validity of the latter there holds the following

Lemma 2. $P_1(A|y) \ll P_1(A)$, $P_2(B|x) \ll P_2(B)$ and $P \ll P_1 \times P_2$ do or do not hold simultaneously

Proof. If $P \ll P_1 \times P_2$ then $P_1(A|y) = \int_A K(x, y) dP_1$ and $P_2(B|x) = \int_B K(x, y) dP_2$ because of

$$\int_B \left[\int_A K(x, y) dP_1 \right] dP_2 = P(A \times B) = P_A(B)$$

and

$$\int_A \left[\int_B K(x, y) dP_2 \right] dP_1 = P(A \times B) = P^B(A),$$

wherefrom $P_1(A|y) \ll P_1(A)$ resp. $P_2(B|x) \ll P_2(B)$ follow.

Further if $P_1(A|y) \ll P_1(A)$ then according to the Radon—Nikodym theorem there exists a function $K(x, y)$ for which

$$P_1(A|y) = \int_A K(x, y) dP_1.$$

For this function $K(x, y)$

$$\iint_{A \times B} K(x, y) dP_1 dP_2 = \int_B \left[\int_A K(x, y) dP_1 \right] dP_2 = \int_B P_1(A|y) dP_2 = P(A \times B),$$

which means that $P \ll P_1 \times P_2$. (Similarly from $P_2(B|x) \ll P_2(B)$.)

Thus our lemma is true.

Corollary. In consequence of Theorem 1 and Lemma 2, the following three statements are equivalent:

$$1^\circ P_1(A|y) \ll P_1(A) \text{ (and } P_2(B|x) \ll P_2(B))$$

$$2^\circ P \ll P_1 \times P_2$$

$$3^\circ \mathbf{A}_1 \text{ is an integral operator (and } \mathbf{A}_2 \text{ too).}$$

2.3. In many cases by the symmetry of the bivariate distribution in its variables ($H(x, y) = H(y, x)$) the solution of the problems discussed before may be facilitated. Namely, if $H(x, y) = H(y, x)$, the problem reduces to the

spectral decomposition of a single operator. Viz. if we have a symmetric distribution $P(A \times B) = P(B \times A)$ then $P_1 = P_2$, thus $L_{H_1}^2 = L_{H_2}^2$ and by this $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$. The pair of operator equations becomes

$$(2.12) \quad \begin{cases} \mathbf{A}_1 f(x) = \lambda g(y) \\ \mathbf{A}_1 g(x) = \lambda f(y) \end{cases}$$

If $f(x) = g(x)$, these equations are identical and $f(x)$ is an eigenfunction of \mathbf{A}_1 . If $f(x) \neq g(x)$, then by subtracting the second equation of (2.12) from the first one we obtain

$$\mathbf{A}_1(f(x) - g(x)) = -\lambda(f(y) - g(y))$$

whence $f(x) - g(x)$ is an eigenfunction of \mathbf{A}_1 . Above considerations show the possibility of reducing the spectral decomposition of a pair of operators to that of a single operator.

It will be shown that any bivariate distribution may be usefully replaced by a symmetric one. Let us consider instead of the original bivariate distribution P the symmetric distribution \bar{P} defined by

$$(2.13) \quad \bar{P}(A \times B) = (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \chi_A(x), \chi_B(x)) = (\mathbf{A}_1 \chi_A(x), \mathbf{A}_1 \chi_B(x)),$$

where A and B are arbitrary Borel sets on the real line and the first scalar product is calculated in $L_{H_1}^2$ and the second one in $L_{H_2}^2$, respectively. It is easy to see that \bar{P} is a probability measure on the plane. Furthermore, trivially $\bar{P}(A \times B) = \bar{P}(B \times A)$ and for the corresponding distribution function $\bar{H}(x, y) = \bar{H}(y, x)$. It is also obvious that both marginal distributions of \bar{P} are equal to the distribution of ξ , i. e.

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = P_1$$

and thus

$$L_{\bar{H}_1}^2 = L_{\bar{H}_2}^2 = L_{H_1}^2.$$

The last term of (2.13) — equaling $\int_{-\infty}^{\infty} P_1(A | y) P_1(B | y) dH_2(y)$ — suggests the following interpretation of the distribution \bar{P} : Let us fix any arbitrary value of η and choose an independent pair of values of ξ ; then \bar{P} is the mixture of the distributions of such pairs with respect to η .

Such transformations were proposed in special cases by H. GEBELEIN [3] and O. SARMANOV [7], too. The role of both operators \mathbf{A}_1 and \mathbf{A}_2 will be taken over by $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$ according to the distribution \bar{P} , as shown in

Theorem 3.

$$(2.14) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) d\bar{H}(x, y) = (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 f(x), g(x))$$

where $f(x) \in L_{H_1}^2$ and $g(x) \in L_{H_1}^2$.

Proof. According to the definition of \bar{P} in (2.13), for characteristic functions (2.14) holds. Therefore our statement is valid for any pair of step functions. Furthermore any function can be approximated to any desired exactness

by step functions. Thus in consequence of the continuity of its terms, (2.14) holds in general.

Remark. It is evident from (2.14) that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(y) d\bar{H}(x, y) = \theta_{\eta}^2(f(\xi)) \quad f(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|f(x)\| = 1.$$

Corollary 1. $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$ is the operator generating the conditional expectation in the sense

$$(2.15) \quad \bar{\mathbf{A}} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\bar{H}_1(x | y) \quad f(x) \in L_{H_1}^2$$

where $\bar{H}_1(x | y)$ denotes the conditional distribution function corresponding to $\bar{H}(x, y)$.

Proof. The definition of the conditional expectation — see (1.2) — may be written in function terminology in the form

$$(2.16) \quad \int_A \mathbf{A}_1 f(x) dP_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \chi_A(y) dP \quad f(x) \in L_{H_1}^2$$

for any Borel set A on the real line. We shall see that $\bar{\mathbf{A}} f(x)$ satisfies (2.16) and therefore (2.15), too. Namely, because of Theorem 3

$$\int_A \bar{\mathbf{A}} f(x) dP_1 = (\bar{\mathbf{A}} f(x), \chi_A(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \chi_A(y) d\bar{P}.$$

Hence also $\bar{P}_1(A | y) = \bar{\mathbf{A}} \chi_A(x)$ holds and the correlation ratios concerning \bar{P} equal $\|\bar{\mathbf{A}} f(x)\|$ ($f(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|f(x)\| = 1$).

Corollary 2. The maximal correlation of $\bar{H}(x, y)$ is equal to the square of that of $H(x, y)$.

Proof. In consequence of (1.11) and (2.14)

$$\mathbf{S}^2(\xi, \eta) = \sup_{\substack{f(x) \in L_{H_1, 0}^2 \\ \|f(x)\|=1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(y) d\bar{P} \leq \sup_{\substack{f(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|f(x)\|=1 \\ g(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|g(x)\|=1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) d\bar{P}.$$

On the other hand from (2.14)

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|f(x)\|=1 \\ g(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|g(x)\|=1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) d\bar{P} = \sup_{\substack{f(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|f(x)\|=1 \\ g(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|g(x)\|=1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 f(x), g(x)) = \\ & = \sup_{\substack{f(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|f(x)\|=1 \\ g(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|g(x)\|=1}} (\mathbf{A}_1 f(x), \mathbf{A}_1 g(x)) \leq \sup_{\substack{f(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|f(x)\|=1 \\ g(x) \in L_{H_1, 0}^2, \|g(x)\|=1}} \|\mathbf{A}_1 f(x)\| \|\mathbf{A}_1 g(x)\| = \mathbf{S}^2(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Hence our statement follows.

The mean square contingency belonging to the measure \bar{P} equals

$$(2.17) \quad \sum_i \sum_k (\mathbf{A}_1 f_i(x), \mathbf{A}_1 f_k(x))^2 = \sum_i \|\bar{\mathbf{A}} f_i(x)\|^2$$

where $\{f_i(x)\}$ is a complete orthonormal system in $L^2_{H_1,0}$. If \mathbf{A}_1 is an integral operator with kernel $K(x, y)$ then $\bar{\mathbf{A}}$ is an integral operator with kernel

$$(2.18) \quad \bar{K}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, z) K(y, z) dH_2(z)$$

and (2.17) can be calculated as

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}^2(x, y) dH_1(x) dH_1(y) - 1.$$

If the pair of operators $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ has a pair of eigenfunctions $f(x), g(y)$ belonging to the eigenvalue λ then $f(x)$ is an eigenfunction of $\bar{\mathbf{A}}$ and belongs to λ^2 . (This can be seen by substituting one of the operator equations into the other.)

It is easy to see that (2.17) — if it is finite — is not less than $\sum_i \theta_i^4(f_i)$ and the equality holds if and only if $\{f_i(x)\}$ is a system of eigenfunctions (for $(\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 f_i(x), f_i(x)) = \|\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 f_i(x)\|^2$ holds in the case $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 f_i(x) = \lambda_i^2 f_i(x)$). If $\bar{\mathbf{A}}$ has a complete eigenfunction system, (2.17) may be written as $\sum_i \lambda_i^4$ where the λ_i -s are the eigenvalues of the pair of operators $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$.

Evidently, all what has been stated in this part for $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$ may be shown analogously for $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$ as well.

The fact that both marginals of the distribution \bar{P} equal one of the original marginal distributions is evidently advantageous in cases we have one discrete or differentiable marginal.

(Received April 28, 1960.)

REFERENCES

- [1] BAHADUR, R. R.: „Measurable subspaces and subalgebras”. *Proc. of the Amer. Math. Soc.* **6** (1955) 565—570.
- [2] DOOB, J. L.: *Stochastic processes*. Wiley, New York, 1953.
- [3] GEBELEIN, H.: „Das statistische Problem der Korrelation als Variations- und Eigenwertproblem und sein Zusammenhang mit der Ausgleichsrechnung”. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **21** (1941) 364—379.
- [4] RÉNYI, A.: „New version of the probabilistic generalization of the large sieve”. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 218—226.
- [5] RÉNYI, A.: „On measures of dependence”. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 441—451.
- [6] САРМАНОВ, О. В.: „Максимальный коэффициент корреляции (симметричный случай)”. *Доклады Академии Наук* **120** (1958) 715—718.
- [7] САРМАНОВ, О. В.: „Максимальный коэффициент корреляции (несимметричный случай)”. *Доклады Академии Наук* **121** (1958) 52—55.
- [8] ZAAENEN, A. C.: *Linear analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956.

О СТОХАСТИЧЕСКИХ СВЯЗЯХ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

P. CSÁKI и J. FISCHER

Резюме

Работа исследует ряд свойств стохастических связей с двумя переменными с помощью гильбертовых пространств. Этот метод исследования возможен потому, что некоторые характеристики стохастической связи между случайными величинами ξ и η (условное распределение, условное математическое ожидание, ряд мер силы стохастической связи) могут быть описаны определенными в соответствующих гильбертовых пространствах парами операторов A_ξ , A_η или A_1 , A_2 . Так условное распределение ξ относительно η

$$P_1(A|y) = A_1 \chi_A(x),$$

условное математическое ожидание

$$M(\xi|\eta) = A_\eta \xi,$$

корреляционное отношение

$$\theta_\eta(\xi) = \|A_\eta \xi\|$$

(относительно стандартного ξ). Далее максимальная корреляция ξ и η

$$S(\xi, \eta) = \|A_\eta\| = \|A_\xi\|;$$

а понятие контингенции обобщается для любой пары случайных величин ξ , η :

$$C(\xi, \eta) = \| \| A_\eta \| \| = \| \| A_\xi \| \|.$$

Доказывается, что A_1 , A_2 тогда и только тогда пара интегральных операторов, если $P \ll P_1 \times P_2$ (теорема 1). На основании этого доказывается, что вышеприведенное определение контингенции совпадает с определением А. РЕНУИ (теорема 2).

С помощью некоторой леммы, обобщая теорему 1, доказывается эквивалентность следующих трех определений:

1. $P_1(A|y) \ll P_1(A)$ и $P_2(B|x) \ll P_2(B)$,
2. $P \ll P_1 \times P_2$,
3. A_1 и A_2 интегральные операторы.

С помощью оператора $\bar{A} = A_1 A_2$ дается метод замены любой плоскостной вероятностной меры P симметричной мерой \bar{P} , эквивалентной с точки зрения рассматриваемых вопросов. В связи с этим доказывается, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(y) d\bar{P} = (\bar{A}f(x), g(x))$$

(теорема 3). На основании этого доказывается, что относящаяся к \bar{P} максимальная корреляция $S^2(\xi, \eta)$.

CONTRIBUTIONS TO THE PROBLEM OF MAXIMAL CORRELATION¹

by

PÉTER CSÁKI and JÁNOS FISCHER

Introduction

The classical indices of bivariate stochastic connection are far from being perfect. The maximal correlation may be regarded as a good measure of the correlation in its broadest sense, i. e. the intensity of stochastic connection. This paper aims at giving some contributions to the approach of the problem of maximal correlation.

In this paper our notations of [1] will be used. A short survey of the main notions used therein seems desirable.

Let ξ and η be arbitrary measurable functions defined on the probability space $(\Omega, \mathbf{S}, \mathbf{P})$ and \mathbf{S}_ξ denote the smallest σ -algebra with respect to which ξ is measurable, further $L_\xi^2 = L^2(\Omega, \mathbf{S}_\xi, \mathbf{P})$. The subspace of L_ξ^2 consisting of its elements with zero expected values will be denoted by $L_{\xi,0}^2$. Naturally, \mathbf{S}_η , L_η^2 and $L_{\eta,0}^2$ can be analogously defined. The symbol \mathbf{A}_ξ denotes the operator of the orthogonal projection of the elements of $L_{\eta,0}^2$ on $L_{\xi,0}^2$ (conditional expected value, i. e. regression curve) and \mathbf{A}_η analogously the projection of the elements of $L_{\xi,0}^2$ on $L_{\eta,0}^2$.

Thus the correlation ratio of a standard random variable ζ on ξ is

$$(0.1) \quad \theta_\xi(\zeta) = \|\mathbf{A}_\xi \zeta\|,$$

the maximal correlation of ξ and η

$$(0.2) \quad \mathbf{S}(\xi, \eta) = \sup_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2, \|f\|=1 \\ g \in L_{\eta,0}^2, \|g\|=1}} (f, g) = \|\mathbf{A}_\xi\| = \|\mathbf{A}_\eta\|$$

and the mean square contingency

$$(0.3) \quad \mathbf{C}(\xi, \eta) = \|\mathbf{A}_\xi\| = \|\mathbf{A}_\eta\|.$$

If the number λ and the pair of random variables f, g satisfy both equations

$$(0.4) \quad \begin{cases} \mathbf{A}_\xi g = \lambda f \\ \mathbf{A}_\eta f = \lambda g \end{cases} \quad \begin{cases} f \in L_{\xi,0}^2 \\ g \in L_{\eta,0}^2 \end{cases}$$

we call λ an eigenvalue and the pair f, g a pair of eigenfunctions belonging to λ .

¹ A previous version of this paper has been read on 7. Sept. 1959 at the Biometric Symposium (Budapest).

In § 1 some questions concerning the maximal correlation and the linearity of correlation are dealt with. Further a method of solving (0.4) in particular cases is shown. In § 2 some examples are presented.

§ 1. Maximal correlation and conditional expectation

1.1. Both theoretical and practical considerations make it desirable to have linear correlation. Thus the problem of linearizing the regressions often arises. In the following some remarks on this question are given.

Theorem 1. *For two standard random variables $f \in L^2_{\xi,0}$ and $g \in L^2_{\eta,0}$ the following three statements are equivalent:*

1° *f and g form a pair of eigenfunctions.*

2° $\theta_{\xi}(g) = \theta_{\eta}(f) = (f, g)$.

3° *f and g are linearly correlated and $\theta_f(g) = \theta_{\xi}(g)$; $\theta_g(f) = \theta_{\eta}(f)$.*

Proof. Let us suppose at first that 1° holds. Then from (0.1) and considering the norms in (0.4) 2° follows.

For the second, if 2° holds then as from $\mathbf{A}_f g = \mathbf{A}_f \mathbf{A}_{\xi} g$ the inequality $\|\mathbf{A}_f g\| \leq \|\mathbf{A}_{\xi} g\|$ follows whence

$$(1.1) \quad (f, g) \leq \theta_f(g) \leq \theta_{\xi}(g),$$

— according to our assumption — equalities in (1.1) are obtained. On the analogy of (1.1) we have equalities in

$$(1.2) \quad (f, g) \leq \theta_g(f) \leq \theta_{\eta}(f)$$

as well.

Equalities on the left side in both (1.1) and (1.2) imply the linear correlation between f and g while those on the right side the other assumptions of 3°.

Finally, let us consider 3°. The linear correlation provides $\mathbf{A}_f g = \lambda f$. On the other hand, $\theta_f(g) = \theta_{\xi}(g)$ implies $\mathbf{A}_f g = \mathbf{A}_{\xi} g$, with respect to $\mathbf{A}_f g = \mathbf{A}_f \mathbf{A}_{\xi} g$, as the norms of a function and its projection may equal only if this function is a fix element of the actual projection \mathbf{A}_f . From the above

$$\mathbf{A}_{\xi} g = \lambda f.$$

Similarly

$$\mathbf{A}_{\eta} f = \lambda g$$

and so we obtain 1°.

As 2° has been deduced from 1°, 3° from 2° and 1° from 3°, our Theorem is proved.

It is noteworthy that the linear correlation between the members of a pair of eigenfunctions was already pointed out by H. O. HIRSCHFELD [2] for the finite discrete case.

Corollary. *If the standard random variables $f = f(\xi)$ and $g = g(\eta)$ are linearly correlated further $f(x)$ and $g(y)$ are univalent functions then f and g form a pair of eigenfunctions.*

Proof. In consequence of the univalence $L^2_f = L^2_{\xi}$ and $L^2_g = L^2_{\eta}$, 3° of Theorem 1 is satisfied, thus 1° holds, too.

1.2. The distance of the standard eigenfunctions belonging to the maximal correlation, turns out to be $2(1 - \mathbf{S}(\xi, \eta))$ as if $f \in L_{\xi,0}^2$, $g \in L_{\eta,0}^2$ are standard variables, then

$$\|f - g\|^2 = 2(1 - (f, g)),$$

hence

$$(1.3) \quad \inf_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2, \|f\|=1 \\ g \in L_{\eta,0}^2, \|g\|=1}} \|f - g\|^2 = 2(1 - \sup_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2, \|f\|=1 \\ g \in L_{\eta,0}^2, \|g\|=1}} (f, g)) = 2(1 - \mathbf{S}(\xi, \eta)).$$

Let the preceding infimum problem be modified as

$$(1.4) \quad \inf_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2, \|f\|=1 \\ g \in L_{\eta,0}^2, \|g\|=1 \\ -\infty < \lambda < \infty}} \|f - \lambda g\|^2 = \inf_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2, \|f\|=1 \\ g \in L_{\eta,0}^2, \|g\|=1 \\ -\infty < \lambda < \infty}} (1 - 2\lambda(f, g) + \lambda^2) = 1 - \mathbf{S}^2(\xi, \eta)$$

Obviously the infimum in (1.4) is lower than in (1.3) save the case $\mathbf{S}(\xi, \eta) = 1$, when they coincide.

It is evident from (1.3) that $\mathbf{S}(\xi, \eta) = 1$ holds if and only if the distance of the unit-spheres of $L_{\xi,0}^2$ and $L_{\eta,0}^2$ equals zero. This case may be treated in four subcases, namely:

a) The unit-spheres are disjoint (example see in [4]). Here maximal correlation is not attainable (supremum but not maximum in (0.2)).

b) Both differences of the unit-spheres are non-empty sets. Now $f(\xi) = g(\eta)$ holds but both $f(x)$ and $g(y)$ have to be non-invertible functions.

c) One of the unit-spheres contains the other. Now one of ξ and η is a non-invertible function of the other.

d) The unit-spheres are coincident ($L_{\xi,0}^2 = L_{\eta,0}^2$). This means that ξ and η are univalent functions of each other.

The relation

$$\theta_{\eta}(\zeta) \leq \theta_{\xi}(\zeta) \quad \text{for all } \zeta \in L^2$$

is necessary and sufficient for $\eta = f(\xi)$ (cases c) and d)) as follows from a theorem, see e. g. A. C. ZAAZEN ([5], p. 250).

1.3. The value of (1.4) is equal to the mean conditional variance of the pair of eigenfunctions belonging to the maximal correlation, as

$$(1.5) \quad \inf_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2 \\ \|f\|=1}} \|f - \mathbf{A}_{\eta} f\|^2 = \inf_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2 \\ \|f\|=1}} (1 - \|\mathbf{A}_{\eta} f\|^2) = \inf_{\substack{f \in L_{\xi,0}^2 \\ \|f\|=1}} (1 - \theta_{\eta}^2(f)) = 1 - \mathbf{S}^2(\xi, \eta).$$

For practical purposes the homoscedasticity (constant conditional variance), i. e. for standard ξ the relation $\mathbf{A}_{\xi} \zeta^2 - (\mathbf{A}_{\xi} \zeta)^2 \equiv 1 - \theta_{\xi}^2(\zeta)$, is desired. As to this we can state

Theorem 2. For the linearly correlated standard random variables ξ and η the following statements are equivalent:

1° ξ and η are homoscedastically correlated.

2° $\xi^2 - 1$ and $\eta^2 - 1$ form a pair of eigenfunctions belonging to $(\xi, \eta)^2$.

Proof. Both $A_\xi \eta = (\xi, \eta) \xi$ and $A_\eta \xi = (\xi, \eta) \eta$ are true. Let us first suppose 1° . From this

$$(1.6) \quad \begin{cases} A_\xi \eta^2 - (\xi, \eta)^2 \xi^2 = A_\xi \eta^2 - (A_\xi \eta)^2 \equiv 1 - \theta_\xi^2(\eta) = 1 - (\xi, \eta)^2 \\ A_\eta \xi^2 - (\xi, \eta)^2 \eta^2 = A_\eta \xi^2 - (A_\eta \xi)^2 \equiv 1 - \theta_\eta^2(\xi) = 1 - (\xi, \eta)^2 \end{cases}$$

which implies

$$(1.7) \quad \begin{cases} A_\xi(\eta^2 - 1) = (\xi, \eta)^2 (\xi^2 - 1) \\ A_\eta(\xi^2 - 1) = (\xi, \eta)^2 (\eta^2 - 1). \end{cases}$$

Conversely, from the linear correlation and (1.7) by (1.6) 1° follows.

Corollary. If the correlation of the standard variables ξ and η is both linear and homoscedastic, further if $0 < |(\xi, \eta)| < 1$ then the third moments of ξ and η vanish.

Proof. According to Theorem 2 $(\xi, \xi^2 - 1) = (\eta, \eta^2 - 1) = 0$ since eigenfunctions belonging to different eigenvalues are orthogonal, and thus

$$M(\xi^3) = M(\xi) = M(\eta^3) = M(\eta) = 0.$$

Remark. In case of the bivariate normal distribution the conditions of Theorem 2 and the Corollary are evidently fulfilled.

1.4. The calculation of the value of the maximal correlation is in general rather complicated and practically intractable. In special cases however, — as will be seen in the following — it can be managed fairly easy.

Let $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ resp. ψ_1, ψ_2, \dots be linearly independent systems in the spaces $L_{\xi,0}^2$, resp. $L_{\eta,0}^2$. In this case we have the following

Theorem 3. The functions

$$(1.8) \quad f_n = \sum_{k=1}^n a_{kn} \varphi_k, \quad g_n = \sum_{k=1}^n a'_{kn} \psi_k \quad a_{nn} a'_{nn} \neq 0; \quad n = 1, 2, \dots$$

are the eigenfunctions of the pair of operators A_ξ, A_η if and only if such coefficients b_{kn} and b'_{kn} exist that

$$(1.9) \quad A_\eta \varphi_n = \sum_{k=1}^n b_{kn} \psi_k, \quad A_\xi \psi_n = \sum_{k=1}^n b'_{kn} \varphi_k \quad n = 1, 2, \dots$$

and in this case the appropriate eigenvalues are

$$(1.10) \quad \lambda_n = \sqrt{b_{nn} b'_{nn}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

moreover, for the coefficients a_{kn} and a'_{kn} the equations

$$(1.11) \quad \sum_{k=i}^n b_{ik} a_{kn} = \lambda_n a'_{in}, \quad \sum_{k=i}^n b'_{ik} a'_{kn} = \lambda_n a_{in} \quad i = 1, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots$$

are fulfilled.

Proof. If the functions (1.8) are the eigenfunctions belonging to the eigenvalues λ_n , that is

$$A_\eta f_n = \lambda_n g_n \quad \text{and} \quad A_\xi g_n = \lambda_n f_n \quad n = 1, 2, \dots$$

then

$$\sum_{k=1}^n a_{kn} \mathbf{A}_\eta \varphi_k = \lambda_n \sum_{k=1}^n a'_{kn} \psi_k$$

and

$$\sum_{k=1}^n a'_{kn} \mathbf{A}_\xi \psi_k = \lambda_n \sum_{k=1}^n a_{kn} \varphi_k;$$

this shows that both $\mathbf{A}_\eta \varphi_n$ and $\mathbf{A}_\xi \psi_n$ are linear combinations of ψ_1, \dots, ψ_n , resp. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Formulae (1.11) result from the linear independence of the systems $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$, wherefrom for $i=n$ $a_{nn} b_{nn} = \lambda_n a'_{nn}$ and $a'_{nn} b'_{nn} = \lambda_n a_{nn}$ which implies (1.10).

Conversely, if (1.9) and (1.11) hold then for the functions (1.8)

$$\mathbf{A}_\eta f_n = \sum_{k=1}^n a_{kn} \mathbf{A}_\eta \varphi_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_{kn} b_{ik} \psi_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n a_{kn} b_{ik} \psi_i = \lambda_n \sum_{i=1}^n a'_{in} \psi_i = \lambda_n g_n$$

and similarly $\mathbf{A}_\xi g_n = \lambda_n f_n$, where $\lambda_n = \sqrt{b_{nn} b'_{nn}}$, thus our statements are verified.

If $\{\lambda_n\}$ provides all the non-zero eigenvalues then — in case of maximum in (0.2) —

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \max_n \sqrt{b_{nn} b'_{nn}}$$

holds.

If the joint distribution is symmetric in its variables the equalities (1.9) and (1.11) reduce to $a'_{kn} = a_{kn}$ and $b'_{kn} = b_{kn}$, consequently $\lambda_n = b_{nn}$.

Corollary. *This theorem may be applied if the linearly independent functions can be chosen so that*

$$\varphi_n = \xi^n - \mathbf{M}(\xi^n) \in L_{\xi,0}^2, \quad \psi_n = \eta^n - \mathbf{M}(\eta^n) \in L_{\eta,0}^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

In these particular cases, our Theorem implies that the eigenfunctions are polynomials if and only if for each n the n^{th} conditional moment is an at most n^{th} -degree polynomial of the conditioning variable.

In consequence of Theorem 3 the eigenvalues can be found without any further computation and the coefficients of the eigenfunctions can be determined from a linear system of equations provided that in both spaces $L_{\xi,0}^2$ and $L_{\eta,0}^2$ respective systems of linearly independent functions are known such that their conditional expected values can be written in the form (1.9).

§ 2. Examples

Some examples of calculating the maximal correlation will be presented. The following symbols will be used:

$h(x, y)$	for the joint density function of ξ and η ,
$h_1(x)$	for the density function of ξ ,
$h_2(y)$	for the density function of η ,
$h_1(x y)$	for the conditional density function of ξ on η ,
$h_2(y x)$	for the conditional density function of η on ξ ,
p_{ik}	for the joint probability of $\xi = i$ and $\eta = k$,
p_i	for the probability of $\xi = i$ and
p_k	for the probability of $\eta = k$.

1. In this example the maximal correlation coincides with the correlation coefficient. Let be

$$h(x, y) = \begin{cases} \log \frac{1}{(1-x)y} & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ \log \frac{1}{x(1-y)} & 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

In this case the joint distribution is symmetric, i. e. $h(x, y) = h(y, x)$. Hence, one-sided treatment of the problem is sufficient. Now

$$h_1(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$$

and

$$h_1(x|y) = h(x, y) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Therefore, using Theorem 3

$$A_n \xi^n = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{i=1}^n \frac{\eta^i}{i} \right) \quad n = 1, 2, \dots$$

and

$$\lambda_n = b_{nn} = \frac{1}{n(n+1)} \quad n = 1, 2, \dots$$

The functions $\xi^n - \mathbf{M}(\xi^n)$ form a complete system of linearly independent polynomials in $L_{\xi,0}^2$. Thus $\{\lambda_n\}$ is the set of all eigenvalues, from which we obtain

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \lambda_1 = \frac{1}{2}.$$

2. a) Trinomial distribution.

$$p_{ik} = \frac{N!}{i!k!(N-i-k)!} p_1^i p_2^k (1-p_1-p_2)^{N-i-k},$$

where $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_1 + p_2 < 1$; $i = 0, 1, \dots, N$; $k = 0, 1, \dots, N$; $i + k \leq N$. Then the marginal distributions are

$$p_{i\cdot} = \binom{N}{i} p_1^i (1-p_1)^{N-i} \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$p_{\cdot k} = \binom{N}{k} p_2^k (1-p_2)^{N-k} \quad k = 0, 1, \dots, N$$

and the conditional distributions

$$\frac{p_{ik}}{p_{\cdot k}} = \binom{N-k}{i} \left(\frac{p_1}{1-p_2} \right)^i \left(\frac{1-p_2-p_1}{1-p_2} \right)^{N-k-i} \quad i = 0, \dots, N-k,$$

$$\frac{p_{ik}}{p_{i\cdot}} = \binom{N-i}{k} \left(\frac{p_2}{1-p_1} \right)^k \left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_1} \right)^{N-i-k} \quad k = 0, \dots, N-i.$$

Now applying Theorem 3:

$$A_{\eta} \xi^n = \sum_{j=1}^n a_{jn} \left(\frac{p_1}{1-p_2} \right)^j (N-\eta)(N-\eta-1) \dots (N-\eta-j+1) \quad n=1, \dots, N,$$

$$A_{\xi} \eta^n = \sum_{j=1}^n a_{jn} \left(\frac{p_2}{1-p_1} \right)^j (N-\xi)(N-\xi-1) \dots (N-\xi-j+1) \quad n=1, \dots, N$$

where $a_{nn} = 1$; thus the eigenvalues are

$$\lambda_n = \left(\frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)} \right)^{\frac{n}{2}} \quad n=1, \dots, N$$

and the maximal correlation is

$$S(\xi, \eta) = \left| \sqrt{\frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}} \right|.$$

b) Trihypergeometric distribution.

$$p_{ik} = \frac{\binom{N_1}{i} \binom{N_2}{k} \binom{N-N_1-N_2}{n-i-k}}{\binom{N}{n}},$$

where n, N_1, N_2, N are positive integers, $N_1 + N_2 < N$; $i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n$; $i + k \leq n$. Similarly to a) we obtain the eigenvalues

$$\lambda_m = \left[\frac{\binom{N-N_1-m}{N_2-m} \binom{N-N_2-m}{N_1-m}}{\binom{N-N_1}{N_2} \binom{N-N_2}{N_1}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

and especially

$$S(\xi, \eta) = \lambda_1 = \left| \sqrt{\frac{N_1 N_2}{(N-N_1)(N-N_2)}} \right|.$$

$$\left(p_1 = \frac{N_1}{N}, p_2 = \frac{N_2}{N} \text{ result for } S(\xi, \eta) \text{ in the same formula as obtained in a.)} \right)$$

3. A case of $S(\xi, \eta) = C(\xi, \eta)$.

Let us consider the symmetric density function

$$(2.1) \quad h(x, y) = p_1 a(x) a(y) + p_2 [a(x) b(y) + b(x) a(y)] + p_3 b(x) b(y)$$

where $a(x)$ and $b(x)$ are linearly independent. For sake of simplicity let us suppose that $a(x)$ and $b(x)$ are density functions, further $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_3 \geq 0$ and $p_1 + 2p_2 + p_3 = 1$. Then

$$h_1(x) = pa(x) + qb(x) \quad p = p_1 + p_2; q = p_2 + p_3.$$

The construction of $h(x, y)$ allows at most one non-zero eigenvalue, whence

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \mathbf{C}(\xi, \eta).$$

$\mathbf{C}^2(\xi, \eta)$ being equal to the square-integral of

$$\frac{h(x, y) - h_1(x)h_1(y)}{\sqrt{h_1(x)}\sqrt{h_1(y)}} = P \frac{a(x) - b(x)}{\sqrt{pa(x) + qb(x)}} \cdot \frac{a(y) - b(y)}{\sqrt{pa(y) + qb(y)}} \quad \text{where } P = p_1 p_3 - p_2^2,$$

we have

$$\mathbf{C}(\xi, \eta) = |P| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x) - b(x)]^2}{pa(x) + qb(x)} dx = \frac{|P|}{pq} \left\{ 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(x)b(x)}{pa(x) + qb(x)} dx \right\}.$$

Therefore

$$(2.2) \quad \mathbf{S}(\xi, \eta) = \frac{|P|}{pq} \left\{ 1 - \int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{a(x)}{2q}, \frac{b(x)}{2p}\right) dx \right\},$$

where $H(x, y) = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, the related eigenfunction being $\frac{a(x) + b(x)}{pa(x) + qb(x)}$.

In the particular case $p_2 = 0$, we have

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{a(x)}{2p_3}, \frac{b(x)}{2p_1}\right) dx$$

and in case $p_2 = \frac{1}{2}$ ($p_1 = p_3 = 0$)

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} H(a(x), b(x)) dx.$$

Let us consider now

a) an example due to A. RÉNYI ([3] p. 317), where

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left\{ (\sqrt{2} e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}) e^{-y^2} + (\sqrt{2} e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-y^2}) e^{-x^2} \right\}.$$

In this case the marginal distributions are normal and have the density functions

$$h_1(x) = h_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

They are uncorrelated, but not independent. In this example $p_1 = p_3 = 0$, $p_2 = \frac{1}{2}$ and

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{2} e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}), \quad b(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

hence

$$S(\xi, \eta) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2} e^{-x^2} - e^{-\frac{3x^2}{2}}) dx = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0,1547.$$

b) A further simple special case:

$$h(x, y) = 4p_1 xy + 2p_2(x + y) + p_3 \quad 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1,$$

where

$$a(x) = 2x, \quad b(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1;$$

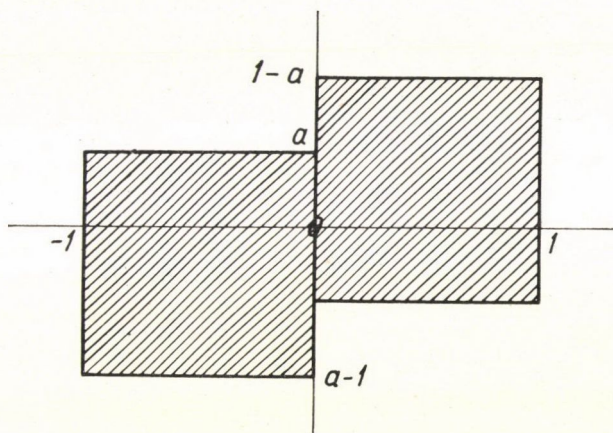


Figure 1.

the maximal correlation is

$$S(\xi, \eta) = \frac{|P|}{p^3} (\text{arth } p - p).$$

E. g. if $h(x, y) = x + y$ or $h(x, y) = 2xy + \frac{1}{2}$, then

$$S(\xi, \eta) = \log 3 - 1 \approx 0,0986.$$

c) An example where the parallelity between the intensity of connection and the value of the maximal correlation is manifest.

Let us consider a domain T consisting of two squares of unit area

$$[-1 \leq x \leq 0; a-1 \leq y \leq a] \text{ and } [0 \leq x \leq 1; -a \leq y \leq 1-a]$$

where $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ (see Fig. 1) and let the joint distribution of ξ and η be uniform in T . This may be transformed in a symmetric distribution with density function of type (2.1)

$$(2.3) \quad \bar{h}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x, t) h(y, t)}{h_2(t)} dt.$$

The eigenvalues of the joint density function (2.3) are the squares of the original ones (see [1] (2.18)).

In the present case

$$p_1 = p_3 = \frac{1-a}{2}, \quad p_2 = \frac{a}{2}; \quad a(x) = 1 \quad -1 \leq x \leq 0, \quad b(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Thus by (2.2)

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{|P|}{pq}} = \sqrt{1-2a}.$$

4. An example for multiple eigenvalues. (See A. C. Zaanen [5] p. 539.) Let us consider the symmetric joint density function (generating a completely continuous operator)

$$h(x, y) = k(x - y) \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi$$

where the function $k(x)$ has the following properties: $k(x) \geq 0$ with period 2π , summable over $(0, 2\pi)$ and $\int_0^{2\pi} k(x) dx = \frac{1}{2\pi}$, further $k(-x) = k(x)$. Then

$$h_1(x) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

and

$$h_1(x|y) = 2\pi k(x-y) \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi.$$

Now the eigenvalues are

$$\lambda_n = 2\pi \int_0^{2\pi} k(x) \cos nx dx \quad n = 1, 2, \dots$$

and the respective eigenfunctions

$$f_{n1} = \cos n\xi, \quad f_{n2} = \sin n\xi \quad n = 1, 2, \dots$$

i. e. the λ_n -s are double eigenvalues. Therefore

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \max_n |\lambda_n|.$$

5. Let the domain T be defined on the plane $[x, y]$ by

$$T = \{(x, y) : |x|^p + |y|^q \leq 1\} \quad p > 0, \quad q > 0$$

and let ξ, η be uniformly distributed in T .²

² This example is the generalization of P. BARTFAR's unpublished solution for $p = q = 2$.

We shall see that — in case $p = q$ — to the narrower T -s higher maximal correlations are attached. Now,

$$h(x, y) = \frac{1}{t} \quad \text{for } (x, y) \in T,$$

where

$$t = \int \int_T dx dy = 4 \int_0^1 \int_0^{(1-y^q)^{\frac{1}{p}}} dx dy = 4 \int_0^1 (1-y^q)^{\frac{1}{p}} dy = \frac{4}{q} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p} + 1\right).$$

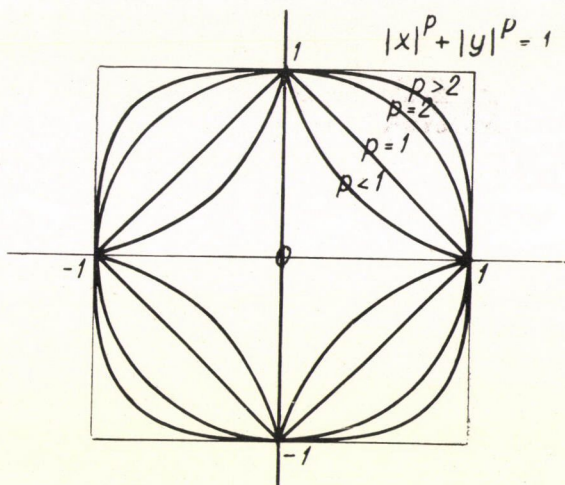


Figure 2.

The density functions of the marginal distributions are

$$h_1(x) = \frac{2}{t} (1 - |x|^p)^{\frac{1}{q}} \quad |x| \leq 1,$$

$$h_2(y) = \frac{2}{t} (1 - |y|^q)^{\frac{1}{p}} \quad |y| \leq 1$$

and the conditional density functions

$$h_1(x|y) = \frac{1}{2(1 - |y|^q)^{\frac{1}{p}}} \quad |x| \leq (1 - |y|^q)^{\frac{1}{p}}, \quad |y| \leq 1,$$

$$h_2(y|x) = \frac{1}{2(1 - |x|^p)^{\frac{1}{q}}} \quad |y| \leq (1 - |x|^p)^{\frac{1}{q}}, \quad |x| \leq 1.$$

Let us choose the linearly independent functions (see Theorem 3) as

$$\varphi_n = |\xi|^{pn} - \mathbf{M}(|\xi|^{pn}), \quad \psi_n = |\eta|^{qn} - \mathbf{M}(|\eta|^{qn}) \quad n = 1, 2, \dots$$

Then as results from

$$\int_{-1}^1 |x|^{pn} h_1(x|y) dx = \frac{1}{(1-|y|^q)^{\frac{1}{p}}} \int_0^{(1-|y|^q)^{\frac{1}{p}}} x^{pn} dx = \frac{1}{pn+1} (1-|y|^q)^n,$$

we have

$$A_\eta \varphi_n = \frac{1}{pn+1} (1-|\eta|^q)^n - \mathbf{M}(|\xi|^{pn}), \quad A_\xi \psi_n = \frac{1}{qn+1} (1-|\xi|^p)^n - \mathbf{M}(|\eta|^{qn})$$

consequently

$$b_{nn} = \frac{(-1)^n}{pn+1}, \quad b'_{nn} = \frac{(-1)^n}{qn+1} \quad n=1, 2, \dots$$

whence the eigenvalues are

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{(pn+1)(qn+1)}} \quad n=1, 2, \dots$$

The eigenfunctions belonging to such eigenvalues do not by all means form complete systems and thus $\mathbf{C}(\xi, \eta)$ is to be determined. These are, however, all the non-zero eigenvalues as

$$\begin{aligned} 1 + \mathbf{C}^2(\xi, \eta) &= \iint_T \frac{h^2(x, y)}{h_1(x) h_2(y)} dx dy = \frac{1}{4} \iint_T \frac{dx dy}{(1-|x|^p)^{\frac{1}{q}} (1-|y|^q)^{\frac{1}{p}}} = \\ &= \int_0^1 \int_0^{(1-y^q)^{\frac{1}{p}}} \frac{dx dy}{(1-|x|^p)^{\frac{1}{q}} (1-|y|^q)^{\frac{1}{p}}} = \int_0^1 \frac{1}{(1-y^q)^{\frac{1}{p}}} \int_0^{(1-y^q)^{\frac{1}{p}}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{q}\right) x^{pn} dx dy = \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{q}\right) \frac{1}{pn+1} (1-y^q)^n dy = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{q} - 1\right) \frac{1}{pn+1} \frac{1}{q} \int_0^1 u^{\frac{1}{q}-1} (1-u)^n du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn+1)(qn+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2, \end{aligned}$$

where binominal expansion and beta-function were applied. Accordingly, the maximal correlation proves to be

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \max_n \frac{1}{\sqrt{(pn+1)(qn+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(p+1)(q+1)}}$$

and the related eigenfunctions

$$f_1 = |\xi|^p - \frac{1}{p+2}, \quad g_1 = |\eta|^q - \frac{1}{q+2}.$$

It is to be noted that in this example:

a) the correlation coefficient as well as the correlation ratios vanish.

b) in calculating the maximal correlation — if it is attainable — ξ and η may be replaced by $|\xi|$ and $|\eta|$, respectively, if and only if to $S(\xi, \eta)$ there belongs a pair of even eigenfunctions. Consequently, the domain T may be reduced e. g. to its upper half or even to its positive quadrant without altering the value of the maximal correlation.

(Received April 28, 1960.)

REFERENCES

- [1] CSÁKI, P.—FISCHER, J.: „On bivariate stochastic connection”. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **5** (1960) 311—323.
- [2] HIRSCHFELD, H. O.: „A connection between correlation and contingency”. *Proc. of the Camb. Phil. Soc.* **31** (1935) 520—524.
- [3] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
- [4] RÉNYI, A.: „On measures of dependence”. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 441—451.
- [5] ZAAANEN, A. C.: *Linear analysis*. North.-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956.

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРОБЛЕМЕ МАКСИМАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

Р. CSÁKI и J. FISCHER

Резюме

Работа занимается максимальной корреляцией, являющейся со многих точек зрения наилучшей мерой силы стохастической связи. В § 1 даются необходимые и достаточные условия того, чтобы стандартные случайные величины $f = f(\xi)$ и $g = g(\eta)$ были парой собственных функций пары операторов A_ξ и A_η (теорема 1). В дальнейшем характеризуется случай $S(\xi, \eta) = 1$ и дается необходимое и достаточное условие того, чтобы η была функцией от ξ : $\theta_\eta(\xi) \leq \theta_\xi(\xi)$ для всех ξ с конечной дисперсией.

Для случая взаимно линейной регрессии дается необходимое и достаточное условие того, чтобы и условная дисперсия регрессий была постоянной (теорема 2).

Кроме того дается метод вычисления собственных значений и функций пары операторов A_ξ , A_η в том случае, когда известны линейно независимые системы функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ и ψ_1, ψ_2, \dots величин ξ и η с конечной дисперсией, удовлетворяющих (1.9) (теорема 3). В качестве специального случая получается, что собственные функции в том и только в том случае многочлены, если n -ые условные моменты суть многочлены не выше n -ой степени условной величины.

В § 2 приводится ряд примеров вычисления максимальной корреляции.

EVALUATION OF INTEGRALS BY MONTE CARLO METHODS BASED ON THE ONE-DIMENSIONAL RANDOM SPACE FILLING

by

GEORGE BÁNKÖVI

§ 1. Introduction

The fundamental problem. In paper [1] A. RÉNYI solved the following problem. Let us place at random on the interval $(0, x)$ successively unit intervals, the left endpoints uniformly distributed on the interval $(0, x - 1)$, but discarded if the new interval intersects with one of the previous intervals. The procedure comes to an end when no more "free interval" longer than unity remains. $M(x)$ denotes the expectation of the number of unit intervals thus placed. $M(x)$ satisfies the functional equation

$$(1) \quad M(x + 1) = \frac{2}{x} \int_0^x M(t) dt + 1 \quad (x > 0)$$

and the initial condition

$$(2) \quad M(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \leq 1.$$

It is proved that

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M(x)}{x} = \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^z \frac{1 - e^{-u}}{u} du \right) dz.$$

The fundamental idea of this paper. The model described above is a very special case of the random space filling. There are various ways of generalization by modification of the placing procedure. This paper deals with generalizations in direction of Monte Carlo methods resulting in procedures for obtaining the approximative value of integrals of type

$$(4) \quad I\{g\} = \int_0^\infty \exp \left(\int_0^z g(u) du \right) dz.$$

Before a specified discussion we wish to mention in the following section two general Monte Carlo methods applied for the evaluation of integrals (see [2], [3], [4]).

Two general methods. a) A general Monte Carlo method applied for evaluating is as follows. We wish to evaluate the integral

$$(5) \quad I = \int_{D_n} h(x) dx$$

where D_n is a domain in n -space and x is a vector. Let ξ be a random vector variable with density function $f(x)$,

$$(6) \quad \int_{D_n} f(x) dx = 1,$$

($f(x) \geq 0$ ($x \in D_n$), and equality can hold only for $h(x)=0$); let x_1, x_2, \dots, x_N be independent observations concerning the values of ξ . Then the random variable

$$(7) \quad S = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{h(x_j)}{f(x_j)}$$

is an unbiased estimator of I , i. e.

$$(8) \quad \mathbf{E}(S) = \int_{D_n} \frac{h(x)}{f(x)} f(x) dx = I,$$

and

$$(9) \quad \mathbf{D}^2(S) = \frac{1}{N} \int_{D_n} \left(\frac{h(x)}{f(x)} - I \right)^2 f(x) dx.$$

b) An other method is the following: It can be assumed without loss of generality that $0 \leq h(x) \leq R$. Let us define two random variables ξ and η uniformly distributed on D_n and $(0, R)$, respectively. Let $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_N, \eta_N)$ be independent pairs of observations concerning the values (ξ, η) and s_j a set of random variables defined by

$$(10) \quad s_j = \begin{cases} 1, & \text{if } h(\xi_j) \leq \eta_j \\ 0, & \text{if } h(\xi_j) > \eta_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Then the random variable

$$(11) \quad S = \frac{R \text{ mes } D_n}{N} \sum_{j=1}^N s_j$$

is an unbiased estimator of I and

$$(12) \quad \mathbf{D}^2(S) = \frac{I(R \text{ mes } D_n - I)}{N}.$$

Several Monte Carlo techniques applied for evaluating integrals are simple modifications of these methods.

Natural models. The great advantage of the methods mentioned above is their general applicability, i. e. theoretically almost every integral can be evaluated by these methods. Considering the goodness of these methods their great generality is not always favourable; it seems that the probabilistic models are related to the *operation of integration* but not the *nature of the particular integrals considered*. We shall call such models *artificial models*; while models having a close connection with the nature of the problem will be called *natural models*. The field of applicability of the natural models is in general smaller than that of the artificial ones, but the natural models (if their application is possible) come up to the non-probabilistic approximative

methods in such cases too, where the application of artificial models is obviously unfavourable. In this paper a class of natural models is connected to a class G of functions; by realization of these models estimates for the integrals $I\{g\}$ are obtained. Integrals of this type occur e. g. in the solution of Riccati differential equations (see [5]).

In applying artificial models or numerical integration as well the substitution in the integrand cannot be avoided; if the integrand is a complicated function (e. g. it consists of a large number of terms) this circumstance causes difficulties. These difficulties can be eliminated by applying natural models.

We wish to remark we regard the results of this paper only as first steps in this direction and our further investigations will aim at finding other types of random space filling models connected to certain problems of analysis (solution of differential equations, integral equations, etc.).

§ 2. A simple model

In this paragraph the procedure applied by A. RÉNYI is adapted to a simple modification and generalization of his model. Our model (in a special case) does not differ from the fundamental model in its limiting properties and it is convenient for theoretical and numerical computations.

Let $x_1, x_2, \dots, x_N, \dots$ be observations of a random variable ξ uniformly distributed on the interval $(0, x)$ and let us place in these points *weights* in accordance with the following rules:

1° In the point x_1 we put a weight $w(x)$ (where $w(x)$ satisfies conditions to be determined later); the argument denotes the length of the "free interval" containing the point x_1 .

2° We establish a "prohibitive interval" with the endpoints $x_1 - a, x_1 + b$, where a and b are positive numbers.

3° We "multiply the free intervals" $(0, x_1 - a)$ and $(x_1 + b, x)$ by the positive constants c_1 and c_2 , respectively, in the sense that all weights (determined by the values of the function $w(x)$) falling subsequently into these intervals must be multiplied by these constants.

4° The point x_2 is discarded if it falls into the prohibitive interval; otherwise it is placed.

5° If the point x_2 is placed we put in x_2 a weight the value of which depends on the length of the free interval containing x_2 .

6° A second prohibitive interval is established with the endpoints $x_2 - a, x_2 + b$.

7° We multiply the two new free intervals by c_1 and c_2 , respectively (i. e. the new intervals are multiplied by one of the values $c_1^2, c_1 c_2, c_2^2$). Evidently where a new prohibitive interval intersects with one of the endpoints of the interval $(0, x)$ or with one of the previous prohibitive intervals no new free interval comes to exist.

8° If the point x_3 falls into one of the prohibitive intervals it is discarded; otherwise it is placed, and so on.

9° The procedure comes to an end when the interval $(0, x)$ contains no more free intervals.

This method of the random space filling will be called *strategy A*.

The sum of the weights put thus on the interval $(0, x)$ is a random variable; let us denote its expectation by $m(x)$. Considering that the points

are uniformly distributed on every free interval, it is easily shown that $m(x)$ satisfies the functional equation

$$(13) \quad m(x) = \frac{c_1}{x} \int_0^x m(t-a) dt + \frac{c_2}{x} \int_0^x m(x-t-b) dt + w(x) \quad (x > 0)$$

and the initial condition

$$(14) \quad m(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \leq 0.$$

In the following we are giving a limiting relation for the quotient $m(x)/x$. Let be in (13)

$$(15) \quad w(x) = x^n \quad (n \geq 0).$$

In the following only the properties that $w(x)$ is a positive function ($0 < x < +\infty$) and that the Laplace-transform of $\frac{d}{dx}(xw(x))$ exists, are utilized.

Multiplying (13) by x and taking derivatives we obtain

$$(16) \quad m(x) + xm'(x) = c_1 m(x-a) + c_2 m(x-b) + (n+1)x^n.$$

Multiplying (16) by e^{-sx} and integrating with respect to x from 0 to ∞ :

$$(17) \quad \begin{aligned} & \int_0^\infty m(x) e^{-sx} dx + \int_0^\infty x m'(x) e^{-sx} dx = \\ & = c_1 \int_0^\infty m(x-a) e^{-sx} dx + c_2 \int_0^\infty m(x-b) e^{-sx} dx + \frac{\Gamma(n+2)}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

Introducing the Laplace transform

$$(18) \quad \varphi(s) = \int_0^\infty m(x) e^{-sx} dx \quad (\operatorname{Re} s > 0)$$

equation (17) obtains the form

$$(19) \quad \varphi'(s) + \varphi(s) \frac{c_1 e^{-as} + c_2 e^{-bs}}{s} + \frac{\Gamma(n+2)}{s^{n+2}} = 0.$$

In our further considerations the following three lemmas are applied:

Lemma 1.

$$(20) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi(s) = 0,$$

where $\varphi(s)$ is defined by (18).

Proof. It can be seen by simple considerations that there exists a constant K depending on a and b only so that the number of points resulting from strategy A is not greater than $Kx + 1$; thus

$$(21) \quad m(x) \leq L(x) (Kx + 1) x^n$$

where

$$(22) \quad L(x) = (\max(c_1, c_2, 1))^{Kx+1}.$$

From (21) considering (18)

$$(23) \quad \varphi(s) \leq \int_0^\infty L(x) (Kx+1) x^n e^{-sx} dx,$$

and from this fact the statement of the lemma follows.

Lemma 2. (See [6] Theorem 108 and [1].) *If $\alpha(x)$ is a monotonically increasing function ($0 < x < +\infty$), $\beta > 0$ and*

$$(24) \quad \lim_{s \rightarrow +0} s^\beta \int_0^\infty e^{-sx} d\alpha(x) = C,$$

then

$$(25) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{x^\beta} = \frac{C}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Lemma 3. *The function $m(x)$ satisfying (13) and (14) is monotonically increasing ($0 < x < +\infty$) for the weight function (15).*

Proof. Let us arrange the numbers $a, 2a, 3a, \dots, b, 2b, 3b, \dots$ according to their order of magnitude and denote the elements of the ordered set (discarding the duplicates) by $0 < a_1^* < a_2^* < a_3^* < \dots$. It follows from (13)–(16)

$$(26) \quad xm'(x) = c_1 \left(m(x-a) - \frac{1}{x} \int_0^{x-a} m(t) dt \right) + c_2 \left(m(x-b) - \frac{1}{x} \int_0^{x-b} m(t) dt \right) + nx^n.$$

From (14) and (26) it follows that

$$(27) \quad m'(x) \geq 0 \quad \text{for} \quad 0 < x \leq a_1^*.$$

Equality holds only for $n = 0$.) Assuming that

$$(28) \quad m'(x) \geq 0 \quad \text{for} \quad 0 < x \leq a_k^* \quad (k = 1, 2, \dots),$$

(and so $m(x)$ is monotonically increasing in this interval), it is shown that

$$(29) \quad m'(x) > 0 \quad \text{for} \quad a_k^* < x \leq a_{k+1}^*.$$

Namely if $f(x)$ is a monotonically increasing function in the interval $(0, x_0)$ then for all values of $0 < x \leq x_0$

$$(30) \quad f(x) - \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \geq 0,$$

and as

$$(31) \quad m(x-\alpha) - \frac{1}{x} \int_0^{x-\alpha} m(t) dt > m(x-\alpha) - \frac{1}{x-\alpha} \int_0^{x-\alpha} m(t) dt$$

$$(\alpha = a \quad \text{or} \quad \alpha = b, \quad \alpha < x \leq a_k^* + \alpha),$$

considering (26) the statement of the lemma holds. By an analogous induction the monotony of the function $m(x)$ can be proved in case of more complicated models as well.

Solving the equation (19) under the initial condition (20) we obtain

$$(32) \quad \varphi(s) = \frac{\Gamma(n+2)}{s^{n+2}} \int_s^\infty \exp \left(\int_s^z \frac{c_1 e^{-au} + c_2 e^{-bu} - (n+2)}{u} du \right) dz.$$

Applying Lemma 2 (and Lemma 3) with $\alpha(x) = m(x)$, $\beta = n+1$, and considering that

$$(33) \quad \int_0^\infty e^{-sx} dm(x) = s \varphi(s),$$

we obtain

$$(34) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m(x)}{x^{n+1}} = \int_0^\infty \exp \left(\int_0^z \frac{c_1 e^{-au} + c_2 e^{-bu} - (n+2)}{u} du \right) dz.$$

Obviously only the case $c_1 + c_2 = n+2$ deserves attention as otherwise the value of the integral in (34) equals either 0 or $+\infty$. This model is advisable only for integer values of n , as otherwise a modification given in § 3 is more suitable for computations.

Connection between the functions $M(x)$ and $m(x)$. Let us consider the special case of

$$(35) \quad a = b = c_1 = c_2 = 1 \quad \text{and} \quad n = 0;$$

thus the value of $m(x)$ is equal to the expectation of the number of points placed and we denote it by $m_0(x)$. Substituting in (34) we obtain the expression

$$(36) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m_0(x)}{x} = \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^z \frac{1 - e^{-u}}{u} du \right) dz.$$

The function $M(x)/x$ in [1] converges to the same limit.

This fact and the circumstance that RÉNYI's placing procedure is similar to strategy A in the case of (35) (namely the restriction, that the unit intervals must not intersect with one another, means in our terminology for the left endpoints of the subsequent unit intervals the extension of each of the unit prohibitive intervals already placed with a further unit to the left), suggest a close connection between the functions $M(x)$ and $m_0(x)$. Indeed the following lemma is true:

Lemma 4. *The function $m_0(x)$ is identically equal to $M(x+1)$.*

Proof. It follows from the initial conditions (2) and (14) that

$$(37) \quad m_0(x) = M(x+1) = 0 \quad \text{for} \quad x \leq 0$$

and obviously both functions satisfy the following equations:

$$(38) \quad m_0(x) = M(x+1) = 1 \quad \text{for} \quad 0 < x \leq 1.$$

Let us suppose that the statement of the lemma holds for all $x \leq x_0 - 1$.
From this assumption it follows that

$$(39) \quad \frac{2}{x} \int_0^x M(t) dt = \frac{2}{x} \int_0^x m_0(t-1) dt \quad \text{for } x \leq x_0,$$

and thus considering (1), (13), (15) and (35)

$$(40) \quad M(x+1) = m_0(x) \quad \text{for } x \leq x_0.$$

The proof is completed by induction.

§ 3. Some further examples

In this paragraph some tricks are described by the aid of which the value of $I\{g\}$ can be evaluated for various $g \in G$. The according models are modifications of *Model 1*. The index ν of the function $m_\nu(x)$ characterizes the model in question. We remark that *per definitionem*

$$(41) \quad m_\nu(x) = 0 \quad \text{for } x \leq 0 \quad \text{and for all } \nu.$$

Analogous lemmas to Lemma 1 and Lemma 3 can be obtained by simple modifications of the proofs.

The models described below must be considered only as illustrative simple examples; further models can be obtained by the combination of these and the introduction of new tricks in the placing procedure. In practice if an integral similar to one of those occurring in the known models is given the problem arises how to find a model corresponding to this integral.

A simple modification of Model 1. The model described in § 2 is applicable by a simple modification to evaluate $I\{g_1^*\}$, where

$$(42) \quad g_1^*(u) = \frac{\sum_{j=1}^r c_j^* e^{-a_j u} - (n+2)}{u}, \quad a_j, c_j^* > 0 \quad (j=1, 2, \dots, r) \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^r c_j^* = n+2.$$

In this case (if we denote by t the place of the first point) we consider the intervals $(0, t-a_1)$, $(0, t-a_2)$, \dots , $(0, t-a_r)$ as free intervals, multiplied by c_1^* , c_2^* , \dots , c_r^* respectively (instead of considering the intervals $(0, t-a)$, $(t+b, x)$ multiplied by c_1 and c_2 , resp.). Denoting by $m_1^*(x)$ the expectation of the sum of weights placed in this way we obtain the equation

$$(43) \quad m_1^*(x) = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^r c_j^* \int_0^x m_1^*(t-a_j^*) dt + x^n \quad (x > 0).$$

Making use of the method described in § 2 we obtain from (43)

$$(44) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m_1^*(x)}{x^{n+1}} = I\{g_1^*\}.$$

We wish to remark that applying the weight-function

$$(45) \quad w(x) = x^{n-a} \quad (0 \leq a \leq n),$$

the result is modified in the form

$$(46) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m_1^*(x)}{x^{n+1}} = \int_0^\infty z^a \exp \left(\int_0^z g_1^*(u) du \right) dz.$$

Mixed strategy of placing. If in the function

$$(47) \quad g_1(u) = \frac{c_1 e^{-au} + c_2 e^{-bu} - y}{u} \quad (c_1 + c_2 = y)$$

$1 < y < 2$ holds the evaluation of $I\{g_1\}$ by the aid of strategy A meets theoretical and practical difficulties as the weight-function x^n ($-1 < n < 0$) has a singularity in 0.

The problem can be simply solved however by introducing a new strategy of placing called strategy B.

Strategy B consists of the following rules:

1° In a "free interval" $(0, x)$ a point t is placed at random. Thus the interval $(0, x)$ is divided into two parts.

2° The intervals $(0, t)$ and (t, x) are multiplied by the positive constant c_0 (in the sense mentioned in § 2).

Evidently strategy B cannot be applied alone but the mixed strategy

$$(48) \quad C = pA + qB$$

(i. e. every move of strategy C represents either a move according to strategy A or the application of strategy B with probabilities p and $q = 1 - p$, resp.) is suitable for our purpose.

In this manner we obtain the equation (modification of (13))

$$(49) \quad m_1(x) = \frac{2c_0 q}{x} \int_0^x m_1(t) dt + \frac{c_1 p}{x} \int_0^x m_1(t-a) dt + \frac{c_2 p}{x} \int_0^x m_1(t-b) dt + px^n (x > 0),$$

where

$$(50) \quad n \geq 0, \quad n + 2 = c_1 p + c_2 p + 2c_0 q$$

and $m_1(x)$ denotes the expectation of the sum of weights which can be placed on the interval $(0, x)$ according to strategy C. Using the method described in § 2 we obtain from (49)

$$(51) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m_1(x)}{x^{n+1}} = p I\{g_1\} = p \int_0^\infty \exp \left(-y \int_0^z \frac{1 - y_1 e^{-au} - y_2 e^{-bu}}{u} du \right) dz,$$

where

$$(52) \quad y_1 = \frac{c_1 p}{y}, \quad y_2 = \frac{c_2 p}{y}, \quad y = (c_1 + c_2) p = n + 2 - 2c_0 q.$$

We wish to remark that the value of $I\{g_1\}$ is equal to $+\infty$ if $y \leq 1$. This fact can be shown integrating by parts.

In the special case (35) a modification of (36) follows from (51):

$$(53) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m_1(x)}{x} = p \int_0^{\infty} \exp \left(-2p \int_0^z \frac{1 - e^{-u}}{u} dz \right) dz.$$

This method is of advantage for not integer values of y since in this case n can be chosen as an integer. Theoretically the placing procedure may consist of an infinite number of moves; but this event has probability zero. In practice the procedure always comes to an end as instead of intervals a finite number of points is considered.

Case of small intervals. The value of $m_1(x)$ can be exactly computed for $0 < x \leq \min(a, b)$ i. e. in this case by derivation of (49) and considering (41) the linear differential equation

$$(54) \quad m_1'(x) + \frac{1 - 2c_0 q}{x} m_1(x) - p(n+1)x^{n-1} = 0$$

is obtained.

Solving (54) under condition (41)

$$(55) \quad m_1(x) = \frac{p(n+1)}{n - 2c_0 q + 1} x^n \quad (0 < x \leq \min(a, b))$$

follows. Making use of this result the experimentation can be simplified (see § 4).

Model 2. In this section a method is described for evaluating $I\{g_2\}$,

$$(56) \quad g_2(u) = \frac{\sum_{j=0}^r d_j u^{r-j} e^{-a_j u} - (n+2)}{u^{r+1}}$$

where

$$(57) \quad r \text{ a positive integer, } n \geq r, a_j, d_j > 0 (j = 0, 1, \dots, r), \lim_{u \rightarrow 0} g_2(u) \text{ finite.}$$

For achieving our purpose we must introduce a new trick in the placing procedure. If the first point falls in t we consider the intervals $(0, t - a_0)$, $(0, t - a_1)$, $(0, t - a_2)$, \dots , $(0, t - a_r)$ and multiply them by d_0 , $d_1(x - t)$, $d_2(x - t)^2/2!$, \dots , $d_r(x - t)^r/r!$. In the following a branching procedure is carried out so that instead of the interval $(0, x)$ each of the intervals $(0, t - a_j)$ ($j = 0, 1, \dots, r$) is considered.

Applying the weight-function

$$(58) \quad w(x) = x^n \quad (n \geq r)$$

and denoting by $m_2(x)$ the expectation of the sum of weights thus placed in the interval $(0, x)$ we obtain

$$(59) \quad m_2(x) = \frac{1}{x} \sum_{j=0}^r \frac{d_j}{j!} \int_0^x (x-t)^j m_2(t-a_j) dt + x^n \quad (x > 0).$$

Deriving r times and making use of the method described in § 2 we obtain

$$(60) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m_2(x)}{x^{n+1}} = I\{g_2\}.$$

Model 3. Let be

$$(61) \quad g_3(u) = \frac{(n+2)k_0 e^{-du} + k_1 e^{-au} + k_2 e^{-bu} - (n+2)}{u(1 - k_0 e^{-du})}$$

where

$$(62) \quad n \geq 0, \quad a, b, d, k_0, k_1, k_2 > 0, \quad k_0 < 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} g_3(u) \text{ finite.}$$

For evaluating $I\{g_3\}$ a new trick must be introduced. Let us define a strategy of placing D as follows:

1° The free interval $(0, x)$ is divided by the point $x-d$ into two parts. The interval $(x-d, x)$ is discarded.

2° In the point $x-d$ a weight x^n is put.

3° The interval $(0, x-d)$ is multiplied by the positive constant c_0 (in the sense mentioned in § 2).

The expectation of the sum of weights (denoted by $m_3(x)$) placed on the interval $(0, x)$ by applying the mixed strategy

$$(63) \quad E = pA + qD$$

satisfies the equation

$$(64) \quad m_3(x) = c_0 q m_3(x-d) + \frac{c_1 p}{x} \int_0^x m_3(t-a) dt + \frac{c_2 p}{x} \int_0^x m_3(t-b) dt + x^n \quad (x > 0).$$

From (64) in the manner mentioned before (choosing c_0, c_1, c_2, p in such a way that $c_0 q = k_0, c_1 p = k_1, c_2 p = k_2$) the relation

$$(65) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m_3(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{1-k_0} I\{g_3\}$$

is obtained.

Model 4. In this section a trick is shown by the aid of which the integral

$$(66) \quad I(v) = \int_0^\infty \exp(-vz + \int_0^z g(u) du) dz \quad (v > 0)$$

can be evaluated for $g \in G$.

Let us consider as an example the model described in § 2. Strategy A is modified in the following way:

1° The constants c_1 and c_2 are replaced by $\frac{c_1 x}{x+v}$ and $\frac{c_2 x}{x+v}$, respectively,

where x denotes the length of the free interval divided by the point t , and v is a fixed positive number.

2° Let be the weight-function

$$(67) \quad w(x) = \frac{x^{n+1}}{x+v} \quad (n \geq 0).$$

Then the expectation of the sum of weights placed on the interval $(0, x)$ and denoted by $m_4(x)$ satisfies the equation

$$(68) \quad m_4(x) = \frac{c_1}{x+v} \int_0^x m_4(t-a) dt + \frac{c_2}{x+v} \int_0^x m_4(t-b) dt + \frac{x^{n+1}}{x+v} \quad (x > 0).$$

From (68)

$$(69) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m_4(x)}{x^{n+1}} = I(v)$$

is obtained.

§ 4. Some remarks and an experiment

Some remarks concerning convergence and variance estimation. In § 3 limiting relations are obtained concerning the functions $m_p(x)$. These theoretical results can be applied in the following way: a positive number x is fixed. On the interval $(0, x)$ experiments are accomplished according to the prescribed strategy. The mean value of the sum of weights placed on the interval $(0, x)$ is an estimator of $m_p(x)$. From this mean value and the according limiting relation an estimator of $I\{g\}$ is obtained.

Applying this method the results have two kinds of errors, one of which originates from the fact that a finite x is considered (instead of $+\infty$); the other kind of error is caused by the random fluctuation of experimental results. Theoretically the experimentation on a very large interval is advantageous but practically this is uncomfortable (the repeating of the experiments on a smaller interval is more advisable).

In paper [1] results are found concerning the asymptotic behaviour of $M(x)$ and the variance of the number of unit intervals placed on the interval $(0, x)$. According to Lemma 4 these results are valid in case of our simplest example but for more complicated models the theoretical treatment seems to be a rather difficult problem. Experimental experiences give the impression that by the application of an interval of length $x = 1000$ or even $x = 100$ (when the length of the prohibitive intervals is about unit) only a negligible

systematic error is caused as compared to the random fluctuations (unless the number of experiments is unreasonably large).

An estimate of the variance is obtained from the experimental data, the value of which is biased due to variance reducing techniques. If in the result an error of some percentages is admissible the application of the described Monte Carlo methods may be advantageous compared to numerical integration even in case of rather simple integrals.

Variance reducing techniques. There exist various techniques by the aid of which the amount of labour necessary to obtain a given accuracy can be reduced. We wish to mention below some of these techniques applicable in the case of random space filling.

Systematic sampling. In a mixed strategy of placing

$$(70) \quad S = \sum_{k=1}^r p_k S_k \quad \left(p_k > 0, \sum_{k=1}^r p_k = 1 \right)$$

the strategy of the first move is not chosen at random but determined systematically so that out of N experiments each strategy S_k ($k = 1, 2, \dots, r$) will occur about Np_k times.

Stratified sampling. The interval $(0, x)$ is divided into N equal parts. In the first move of j -th experiment ($j = 1, 2, \dots, N$) the point t is placed at random on the j -th subinterval.

Use of expected values. Let be x_0 such a value that for every $x \leq x_0$ a simple analytical term can be given for $m_v(x)$ (see e. g. (55)). The placing procedure consists now of two parts:

1° Reducing the length of the free intervals until the maximal length does not exceed x_0 ;

2° On these small intervals instead of further experimentation the exact values of $m_v(x)$ are considered.

Result of an experiment. We wished to compare on an example the results obtained and the amount of labour involved in the Monte Carlo method and the numerical integration, respectively. Thus we determined the value of the integral

$$(71) \quad I_0 = \int_0^{\infty} \exp \left(-1,5 \int_0^z \frac{1 - e^{-u}}{u} du \right) dz$$

in these two different ways. The according Monte Carlo method was based on the placing procedure resulting in (53) with $p = 0,75$. We wish to give a short description of the experimentation.

The experiments were performed on an interval of length $x = 100$. Six-digit random numbers were considered (we made use of the table of random numbers of [7]); The points x_1, x_2, \dots , were marked out by the first four digits (from 00,00 to 99,99) while the last two digits were used to determine whether strategy A (from 00 to 74) or strategy B (from 75 to 99) should be applied.

On the small free intervals the technique of the "use of expected values" was applied. For this model

$$(72) \quad m_1(x) = \frac{p}{2p-1} \quad \left(0 < x \leq 1, \frac{1}{2} < p \leq 1 \right)$$

holds. This follows from (55) considering (35) and (50) or directly from the equation

$$(73) \quad m_1(x) = p + 2q m_1(x) \quad \left(0 < x \leq 1, \frac{1}{2} < p \leq 1, p + q = 1 \right).$$

The mean value of the results of ten experiments gave for I_0 the approximation

$$(74) \quad I_0 \approx 1,362.$$

The standard deviation of the experimental results was

$$(75) \quad \sigma = 0,064$$

with each obtained value in the interval $(I_0 - 2\sigma, I_0 + 2\sigma)$. The realization of one experiment required about thirty minutes.

By numerical integration we obtained the result

$$(76) \quad I_0 = 1,345$$

(where the last digit is uncertain). The determination of this value by means of numerical computation required by far more efforts than that of the Monte Carlo method described above. The simplicity of the placing procedures renders the methods described in this paper suitable for machine work.

The author is indebted to Prof. A. RÉNYI for his helpful suggestions and to I. PALÁSTI for her valuable critical remarks.

(Received April 29, 1960.)

REFERENCES

- [1] RÉNYI A.: „Egy egydimenziós véletlen térkitöltési problémáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958) 109–127.
- [2] MEYER, H. A. (ed.): *Symposium on Monte Carlo methods*. Wiley, New York, 1956.
- [3] BROWN, G. W.: “Monte Carlo methods.” Beckenbach, E. F.: *Modern mathematics for the engineer*. Mc Graw-Hill, New York, 1956, 279–303.
- [4] PALÁSTI I.—RÉNYI A.: „A Monte-Carlo módszer mint minimax stratégia.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 529–545.
- [5] ABDELKADER, M. A.: “Solutions by Quadrature of Riccati and Second-order Linear Differential Equations.” *The American Mathematical Monthly* **66** (1959) 10 886–889.
- [6] HARDY, G. H.: *Divergent series*. Oxford University Press, 1949.
- [7] HALD, A.: *Statistical Tables and Formulas*. Wiley, New York, 1952.
- [8] JAHNKE-EMDE: *Tafeln Höherer Funktionen*. Teubner, Leipzig, 1952.

РАСЧЕТ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО, ОСНОВАННЫМ НА ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЙНОМ ЗАПОЛНЕНИИ ПРОСТРАНСТВА

G. BÁNKÖVI

Резюме

В работе предлагается метод приближенного вычисления интегралов вида

$$I\{g\} = \int_0^{\infty} \exp\left(\int_0^z g(u) du\right) dz.$$

Основная идея метода заключается в следующем: расположим на интервале $(0, x)$ точки и поместим в этих точках веса случайно, но соответственно некоторым правилам. При подходящем выборе этих правил, между моделью расположения и некоторой функцией g выполняется соотношение вида

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m(x)}{x^{n+1}} = I\{g\},$$

где $m(x)$ обозначает математическое ожидание суммы весов, помещенных на интервале $(0, x)$. Оценка величины $m(x)$ получается реализацией модели расположения.

Модель, описанная в § 2, является модификацией и обобщением модели А. РЕНУИ [1]. В § 3 автор описывает несколько моделей, с помощью которых интеграл $I\{g\}$ вычисляемый при функциях g разных типов. В § 4 описывается расчет интеграла

$$I_0 = \int_0^{\infty} \exp\left(-1,5 \int_0^z \frac{1 - e^{-u}}{u} du\right) dz$$

методом Монте-Карло.

ON SOME RANDOM SPACE FILLING PROBLEMS

by

ILONA PALÁSTI

§ 1. Introduction

A. RÉNYI solved in his paper [1] the one-dimensional case of a problem raised by L. SCHMETTERER, i. e. he considered the following problem. Let us place at random with uniform distribution disjoint unit intervals on the interval $(0, x)$ till this is possible, namely until the distances of all neighbouring unit intervals will be smaller than one. RÉNYI determined the mean value $M(x)$ of the number of unit intervals and showed that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} = c.$$

He solved the problem proving that $M(x)$ satisfies the following difference-differential equation

$$(x-1) M'(x) + M(x) = 2 M(x-1) + 1 \quad \text{for } x \geq 1$$

with the initial condition $M(x) = 0$, for $0 \leq x \leq 1$, further by showing that for $M(x)$ the asymptotical formula

$$(1) \quad M(x) = cx - (1-c) + O\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

holds, where n is an arbitrarily large number and

$$(2) \quad c = \int_0^\infty e^{-2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du} dt.$$

The numerical value of c was given in [1] to three decimals as 0,748.

This paper deals with the corresponding problem in the two- and three-dimensional case.

We consider in § 2 the following problem. Let us place at random (with uniform distribution) disjoint domains which are congruent and parallel, with a given domain D of unit area (this means that any domain can be carried over into D by a shift transformation $x' = x - a$, $y' = y - b$), into a rectangle with sides $x \gg 1$, $y \gg 1$. The process is repeated until this is possible. The question is, what is the mean value of the number of domains placed in such a way, i. e. how large part of the rectangle will be filled in average with these domains.

Let us denote by $M(x, y)$ the mean value of the number of domains placed in the above mentioned way into a rectangle T_{xy} with vertices $(0,0)$, $(x, 0)$, (x, y) , $(0, y)$ (where $x, y \gg 1$). By starting from a hypothesis which seems very plausible (to the proof of which we intend to return in an other paper) we shall show that the limit

$$(3) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{M(x, y)}{xy} = \alpha(D)$$

exists.

Our proof depends on a generalization of a theorem of D. H. HYERS [2]. In the case when D is the unit square S_1 a heuristic reasoning has led us to the conjecture that the corresponding constant $\alpha(S_1)$ is equal to $c^2 \sim 0,56$ where c is the constant (2) obtained by RÉNYI in the linear case.

Concerning this conjecture experiments were carried out by the Monte Carlo method, in order to determine an approximative value of $\frac{M(x, y)}{xy}$. The results obtained which are reproduced in § 3 strongly support our conjecture.

Finally in § 4 we give some remarks on the three-dimensional case.

§ 2. On the existence of the density of space filling

We shall start from the following hypothesis:

Hypothesis A. Let $M(x, y)$ denote the mean value of the number of domains congruent and parallel with the convex domain D of unit area placed at random as described in the introduction on the rectangle T_{xy} the sides of which are equal to $x > 0$ and $y > 0$. Then there exists a constant $A > 0$ depending on D , such that for any $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ and $y > 0$ we have

$$(4a) \quad |M(x_1 + x_2, y) - M(x_1, y) - M(x_2, y)| \leq Ay$$

resp. for any $x > 0$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$

$$(4b) \quad |M(x, y_1 + y_2) - M(x, y_1) - M(x, y_2)| \leq Ax.$$

Remark. It can be seen from (1) that the analogue of the above hypothesis, i. e. the inequality

$$(5) \quad |M(x + y) - M(x) - M(y)| \leq A_1$$

is valid. In fact, (5) is true with $A_1 = 1$, but we do not need this result here.

D. H. HYERS deals with functional inequalities similar to (5) in his paper [2]. He called the transformation $f(x)$ of the Banach space E into the Banach space E' a δ -linear transformation if it satisfies the following inequality.

$$(6) \quad \|f(x + y) - f(x) - f(y)\| < \delta$$

for any $x \in E$, $y \in E$. He showed that for any δ -linear transformation $f(x)$ of E into E' there can be found one and only one linear transformation $l(x)$ which satisfies

$$(7) \quad \|f(x) - l(x)\| < \delta.$$

E and E' are both the set of real numbers, and as in our case there are functions and thus clearly $M(x) < x$, $l(x)$ can not be else than a linear function. Hence it follows from (5) and (7) that there exists a constant c such that

$$(8) \quad |M(x) - cx| \leq 1,$$

which implies

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} = c.$$

Let us consider now the *two-dimensional case*. As we can not make use of the above mentioned theorem of HYERS in its original form, we prove a lemma which is similar to the theorem of HYERS and which is suitable for our purposes. The idea of the proof is similar, but deviates somewhat from that of the theorem of HYERS.

Lemma. *Let $f(x, y)$ be a Borel-measurable function of two variables satisfying the following conditions:*

$$(10a) \quad |f(x_1 + x_2, y) - f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq By, \text{ for } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y \geq 0$$

and

$$(10b) \quad |f(x, y_1 + y_2) - f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq Bx \text{ for } x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$B > 0$ is a constant, not depending on the variables x_i, y_i ($i = 1, 2$), and there exists a constant $\varrho > 0$ such that $f(x, y) = 0$, if $0 < x < \varrho$ or $0 < y < \varrho$; then

$$(11a) \quad |f(x, y) - \alpha xy| \leq B(x + y)$$

where α is a constant and thus

$$(11b) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{f(x, y)}{xy} = \alpha.$$

Proof. It follows from (10a) and (10b) that

$$(10c) \quad |f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) - f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq B(x_1 + x_2 + y_1 + y_2).$$

At first put $x_1 = x_2 = \frac{x}{2}$, $y_1 = y_2 = \frac{y}{2}$ into (10c), then we obtain

$$(12) \quad \left| f(x, y) - 4f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \right| \leq B(x + y).$$

Replacing x and y by $2^k x$ and $2^k y$, resp. and dividing (12) by 4^k we obtain

$$(13) \quad \left| \frac{f(2^k x, 2^k y)}{4^k} - \frac{f(2^{k-1} x, 2^{k-1} y)}{4^{k-1}} \right| \leq B \left(\frac{x + y}{2^k} \right).$$

Summing up (13) for $k = m + 1, \dots, n$ we obtain

$$(14) \quad \left| \frac{f(2^n x, 2^n y)}{4^n} - \frac{f(2^m x, 2^m y)}{4^m} \right| \leq B \left(\frac{x + y}{2^m} \right).$$

Let us consider x and y as fixed values. Thus if $m \rightarrow \infty$ then according to (14) the sequence $4^{-k} f(2^k x, 2^k y)$ satisfies the Cauchy-convergence criterion, i. e.

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x, 2^n y)}{4^n} = g(x, y)$$

exists. Concerning $g(x, y)$ we know the following: Substituting in (10a) $2^n x$ resp. $2^n y$ instead of x_i , ($i = 1, 2$) resp. y and dividing by 4^n we obtain

$$(16) \quad \left| \frac{f(2^n(x_1 + x_2), 2^n y)}{4^n} - \frac{f(2^n x_1, 2^n y)}{4^n} - \frac{f(2^n x_2, 2^n y)}{4^n} \right| \leq B \frac{y}{2^n}$$

that is passing to the limit $n \rightarrow \infty$ we obtain from (16) by using (15)

$$(17) \quad g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y).$$

Thus as $g(x, y)$ is for fixed y a Borel-measurable function of x , we obtain

$$(18a) \quad g(x, y) = a(y)x.$$

It follows by the same argument from (10b) and (15) that

$$(18b) \quad g(x, y) = b(x)y,$$

which is only possible if

$$(19) \quad g(x, y) = \alpha xy$$

where α is a constant, independent of x and y . From (15) thus it follows that

$$(20) \quad \alpha = \frac{g(x, y)}{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x, 2^n y)}{2^n x 2^n y}.$$

Let us put now $m = 0$ into the inequality (14) and divide by xy . It follows that

$$(21) \quad \left| \frac{f(2^n x, 2^n y)}{2^n x 2^n y} - \frac{f(x, y)}{xy} \right| \leq B \frac{x + y}{xy} = B \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

If now $n \rightarrow \infty$, then — according to (20) —

$$(22) \quad \left| \alpha - \frac{f(x, y)}{xy} \right| \leq B \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

and if $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ then the right side of (22) tends to 0 and thus (11a) and therefore (11b) follows. Thus our lemma is proved.

Hence if for some domains D hypothesis A is valid, then our lemma can be applied and thus it follows that

$$(23) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{M(x, y)}{xy} = \alpha = \alpha(D)$$

exists and obviously must be a constant with value between 0 and 1.

Writing down inequality (11a) for $M(x, y)$ it follows also that

$$(24) \quad |M(x, y) - \alpha(D)xy| \leq A(x + y).$$

Thus $M(x, y)$ may be written in the form

$$(25) \quad M(x, y) = \alpha(D)xy + m(x, y)$$

where $m(x, y) = o(xy)$ for $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$.

§ 3. The value of $\alpha = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{M(x, y)}{xy}$ if D is a rectangle

Let us suppose now that D is the rectangle of unit area S_q with sides q and $\frac{1}{q}$ ($q > 0$) which are parallel to the x resp. y axis. If $M_q(x, y)$ denotes the mean value of the number of such rectangles which can be placed in a rectangle with sides x and y , then by a similar transformation one obtains

$$(26) \quad M_q(x, y) = M_1\left(\frac{x}{q}, yq\right).$$

It follows that

$$(27) \quad \alpha(S_q) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{M_q(x, y)}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{M_1\left(\frac{x}{q}, yq\right)}{\frac{x}{q} \cdot yq} = \alpha(S_1).$$

Thus $\alpha(S_q) = \alpha$ does not depend on q . By a heuristic argument one is led to conjecture that

$$(28) \quad M_1(x, y) \sim M(x) M(y)$$

where $M(x)$ is the mean number of unit intervals which can be placed on the interval $(0, x)$, mentioned in the introduction. We hope to return to the proof of (28) in an other paper.

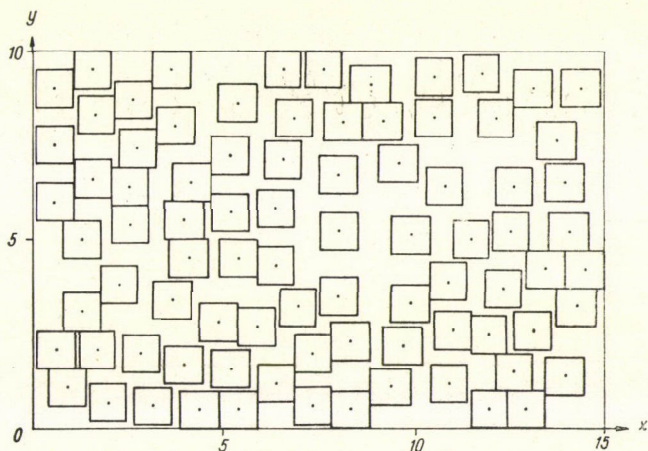


Figure 1.

We conjecture that (28) holds, from which it follows that $\alpha(D_1)$ is numerically equal to c^2 where c is defined by (2), and thus is approximately equal to 0,56. . . . Thus if our conjecture is valid, then if x and y are sufficiently large in an average $0,56xy$ small rectangles can be placed at random on the rectangle T_{xy} with their sides parallel to those of T_{xy} .

To check this we have carried through experiments by the Monte Carlo method in order to determine the approximate value of $M(x, y)$ (see Figure 1). In the rectangle T with sides x and y the point P was determined by means of a table of random numbers [3] in such a way that the coordinates t and u were chosen independently ($1/2 \leq t \leq x - 1/2$), ($1/2 \leq u \leq y - 1/2$). This point P was considered as the centre of a unit square if this was possible, i. e. if this unit square did not intersect with any of the former ones. Otherwise the point P was rejected and another point was chosen in the same way. This procedure was continued as long as the rectangle T was filled with unit squares. The results of this experiment are contained in the following table:

Length of the sides of rectangle T		Area of rectangle T $xy \text{ cm}^2$	Number of unit squares placed	56% of the area of rectangle
$x \text{ cm}$	$y \text{ cm}$			
5	15	75	42	42
10	15	150	84	84
15	15	225	126	126
20	15	300	167	168

Thus the results of the experiment are in very good agreement with our conjecture.

§ 4. The three-dimensional case

The analogous problem is in this case the following: let us place at random with uniform distribution in a parallelepiped K_{xyz} having the edges x, y, z disjoint domains which are congruent and parallel to the convex domain D of unit volume till the parallelepiped K_{xyz} is filled with domains.

Let us denote by $M(x, y, z)$ the mean of the number of such domains placed in the parallelepiped K_{xyz} . Let us suppose that the following is true:

Hypothesis B. The following inequalities are valid:

$$|M(x_1 + x_2, y, z) - M(x_1, y, z) - M(x_2, y, z)| \leq B y z$$

$$|M(x, y_1 + y_2, z) - M(x, y_1, z) - M(x, y_2, z)| \leq B x z$$

and

$$|M(x, y, z_1 + z_2) - M(x, y, z_1) - M(x, y, z_2)| \leq B x y.$$

Then one can deduce in the same way as shown above that the limit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty \\ z \rightarrow +\infty}} \frac{M(x, y, z)}{xyz} = \beta(D)$$

exists. In case D is a unit cube C_1 , one is led in the same way as to (28) to the conjecture that $\beta(C_1) = c^3 = 0,42$ where c is the constant defined by (2).

The problem can be treated similarly in general for the n -dimensional case too, which leads to the conjecture that in the average $c^n\%$ of the volume of a large n -dimensional parallelotope will be filled by the n -dimensional unit cubes, if these are placed at random with uniform distribution so that they should not intersect and their sides parallel to those of the parallelotope.

I am indebted to Professor RÉNYI for his valuable remarks.

(Received May 6, 1960.)

REFERENCES

- [1] RÉNYI A.: „Egy egydimenziós véletlen térkitöltési problémáról.” *A Magyar Tudományok Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958) 109—127.
- [2] HYERS, D. H.: „On the stability of the linear functional equation.” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **27** (1941) 222—225.
- [3] STEINHAUS, H.: „Tablica liczb przetasowanych czterocyfrowych.” *Rozprawy Matematyczne* **6** (1954) 1—45.

ПРОБЛЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛУЧАЙНОГО ЗАПОЛНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

I. PALÁSTI

Резюме

Работа занимается следующей задачей: расположим на плоскости во внутренность прямоугольника со сторонами x и y случайным образом (с равномерным распределением) параллельно расположенные области, конгруэнтные выпуклой области D с единичной площадью, так, чтобы они не имели общих точек, и будем продолжать этот процесс, пока это возможно. Спрашивается, какую часть площади прямоугольника заполняют так расположенные области?

Пусть $M(x, y)$ означает ожидаемое число расположенных вышеуказанным образом областей. Автор высказывает относительно $M(x, y)$ очевидную гипотезу, согласно которой существует такое $B > 0$, что

$$|M(x_1 + x_2, y) - M(x_1, y) - M(x_2, y)| \leq By$$

и

$$|M(x, y_1 + y_2) - M(x, y_1) - M(x, y_2)| \leq Bx.$$

Автор доказывает двухмерное обобщение одной теоремы ХЬЕРС-а относительно функциональных неравенств [2] и с его помощью доказывает, что из упомянутой гипотезы следует существование предела

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{M(x, y)}{xy} = \alpha(D).$$

Автор высказывает гипотезу (к которой его привели эвристические соображения), что в случае, когда D есть единичный квадрат S_1 , $\alpha(S_1) = c^2$, где постоянная c совпадает с постоянной, полученной в решенной RÉNYI аналогичной одномерной задаче, т. е.

$$c = 2 \int_0^{\infty} (1 - e^{-t}) \exp \left(-2 \int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u} du \right) dt = 0,748 \dots$$

и поэтому c^2 приблизительно равно 0,56. Согласно этой гипотезе примерно 56%-ов площади большого четырехугольника может быть покрыто случайно расположенными единичными квадратами, стороны которых параллельны сторонам прямоугольника.

Относительно n -мерной аналогичной задачи высказывается аналогичная гипотеза, согласно которой c^n -ую часть n -мерного прямоугольника заполняют случайно расположенные n -мерные единичные кубы, грани которых параллельны граням прямоугольника.

LIMITING DISTRIBUTIONS IN SIMPLE RANDOM SAMPLING FROM A FINITE POPULATION

by

JAROSLAV HÁJEK¹

1. Introduction and summary

Sampling from a finite population may be considered as a random experiment whose outcomes are subsets s of the set $S = \{1, 2, \dots, N\}$; s is called a sample and S is called a population. Denote an s consisting of k elements by s_k and the probability of s_k by $\mathbf{P}(s_k)$.

Simple random sampling of sample size n is defined by the following probabilities $\mathbf{P}(s_k)$:

$$(1.1) \quad \mathbf{P}(s_k) = \begin{cases} \binom{N}{n}^{-1} & \text{if } k = n \text{ [Simple random sampling of size } n\text{]} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In this paper we shall make use of so called Poisson sampling defined as follows:

$$(1.2) \quad \mathbf{P}(s_k) = \left(\frac{n}{N}\right)^k \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{N-k} \text{ [Poisson sampling of mean size } n\text{].}$$

Let us have a sequence y_1, \dots, y_N of real numbers, and put

$$(1.3) \quad \xi = \sum_{i \in s_n} y_i$$

where s_n is a simple random sample and $\sum_{i \in s_n}$ extends over all i contained in the sample s_n . Obviously $\xi = \xi(s_n)$ is a random variable with finite mean value

$$(1.4) \quad \mathbf{E} \xi = \frac{n}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

and variance

$$(1.5) \quad \mathbf{D} \xi = \frac{n}{N} \frac{N-n}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \quad \left[\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right].$$

¹ Mathematical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague.

Let us consider an infinite sequence of simple random sampling experiments, the ν -th of which has the size n_ν and refers to a population of size N_ν and with values $y_{\nu 1}, \dots, y_{\nu N_\nu}$. Let ξ_ν be the random variable defined by (1.3) corresponding to the ν -th sampling experiment.

Now we ask about conditions concerning $\{y_{\nu i}, n_\nu, N_\nu\}$ under which

$$(1.6) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_\nu - \mathbf{E} \xi_\nu < x \sqrt{\mathbf{D} \xi_\nu}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} t^2} dt$$

or

$$(1.7) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_\nu = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

or, generally, the distribution function of ξ_ν converges to a limiting distribution law. We naturally suppose that $n_\nu \rightarrow \infty$ and $N_\nu - n_\nu \rightarrow \infty$.

In the following sections we shall give a complete solution of this problem, i. e. we shall indicate necessary and sufficient conditions. As for convergence to the normal distribution law the necessary and sufficient condition coincides with that one derived by ERDŐS and RÉNYI in the paper [1], as could be expected.

2. The fundamental lemma

We shall show that the above problem can be completely reduced to the same problem concerning sums of independent random variables.

First observe that Poisson sampling may be interpreted as simple random sampling of size k , where k is a binomial random variable attaining the value k with probability $\binom{N}{k} \left(\frac{n}{N}\right)^k \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{N-k}$. Actually, it suffices to consult (1.1) and (1.2) and notice that

$$\left(\frac{n}{N}\right)^k \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{N-k} = \left[\binom{N}{k} \left(\frac{n}{N}\right)^k \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{N-k} \right] \binom{N}{k}^{-1}$$

Clearly $\mathbf{E} k = n$ and

$$(2.1) \quad \mathbf{E}(k - n)^2 = n \left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

Now, it is easy to define an experiment producing simultaneously a simple random sample s_n and a Poisson sample s_k such that $s_n \subset s_k$ if $n \leq k$, and $s_n \supset s_k$ if $n \geq k$. This may be done as follows:

1° First we realize the binomial random variable k attaining the value k with probability

$$\binom{N}{k} \left(\frac{n}{N}\right)^k \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{N-k}, \quad 0 \leq k \leq N.$$

2° a) When $k = n$, then we select a simple random sample $s_n = s_k$ which is a simultaneous realization of both simple random sampling and Poisson

sampling. b) When $k > n$, then we select a simple random sample s_k , which is a realization of Poisson sampling; thereafter we select a simple random sample s_n of size n from s_k (s_k represents here a population), s_n being a realization of simple random sampling. c) When $k < n$, then we select a simple random sample s_n , which is a realization of simple random sampling; thereafter we select a simple random sample s_k from s_n (s_n represents here a population), s_k being a realization of Poisson sampling.

Put

$$(2.2) \quad \eta = \sum_{i \in s_n} (y_i - \bar{Y}) = \xi - n \bar{Y}$$

and

$$(2.3) \quad \eta^* = \sum_{i \in s_k} (y_i - \bar{Y})$$

where (s_n, s_k) are joined samples from the above experiments, s_n representing a simple random sample and s_k a Poisson sample. The number of summands equals constantly n in (2.2) and is a binomial random variable in (2.3). Clearly, (2.4)

$$\eta - \eta^* = \begin{cases} 0 & \text{if } k = n \\ \sum_{i \in s_n - s_k} (y_i - \bar{Y}) & \text{if } k < n \\ - \sum_{i \in s_k - s_n} (y_i - \bar{Y}) & \text{if } k > n \end{cases}$$

since either s_k is a subset of s_n or, conversely s_n is a subset of s_k .

Lemma 2.1. *The following inequality holds true:*

$$(2.5) \quad \frac{\mathbf{E}(\eta - \eta^*)^2}{\mathbf{D} \eta^*} \leq \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{N-n}}.$$

Proof. If k is fixed, then $s_n - s_k$ or $s_k - s_n$ represents a simple random sample of size $|k - n|$. Consequently, in view of (1.5), we have

$$(2.6) \quad \mathbf{E}\{(\eta - \eta^*)^2 | k\} = \mathbf{D}\{\eta - \eta^* | k\} = \frac{|k - n|}{N} \frac{N - |k - n|}{N - 1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \leq \\ \leq |k - n| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2.$$

The inequality (2.6) together with (2.1) obtains that

$$(2.7) \quad \mathbf{E}\{(\eta - \eta^*)^2\} \leq \mathbf{E}|k - n| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \leq \\ \leq \sqrt{\mathbf{E}(k - n)^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 = \sqrt{n \left(1 - \frac{n}{N}\right)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2.$$

In a similar way we could derive

$$(2.8) \quad \mathbf{D} \eta^* = n \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2.$$

We shall prefer however, to prove (2.8) by the following consideration: Any sampling experiment consists of N dichotomous experiments, the i -th of which has the following two possible outcomes: including the element i in the sample s and not including the element i in the sample s . If all these experiments are mutually independent and the probability of including the element i equals constantly $\frac{n}{N}$, $1 \leq i \leq N$, we easily see that one gets

Poisson sampling, i. e. that each sample s_k has the probability (1.2). This fact implies that η^* may be judged as a sum of N independent random variables,

$$(2.9) \quad \eta^* = \sum_{i=1}^N \zeta_i$$

where

$$(2.10) \quad \zeta_i = \begin{cases} y_i - \bar{Y} & \text{with probability } \frac{n}{N} \quad (\text{if } i \in s_k) \\ 0 & \text{with probability } 1 - \frac{n}{N} \quad (\text{if } i \in S - s_k). \end{cases}$$

Clearly

$$(2.11) \quad \mathbf{D} \zeta_i = (y_i - \bar{Y})^2 \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad (1 \leq i \leq N)$$

which proves (2.8).

Combining (2.7) and (2.8) we obviously obtain the inequality (2.5) which was to be proved.

Let us consider a sequence of experiments of the above kind (i. e. producing joined simple random and Poisson samples) and denote by η_ν and η_ν^* the random variables (2.2) and (2.3) referring to the ν -th experiment. From Lemma 2.1 it follows that

$$(2.12) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(\eta_\nu - \eta_\nu^*)^2}{\mathbf{D} \eta_\nu^*} = 0 \quad \text{if } \begin{cases} n_\nu \rightarrow \infty \\ N_\nu - n_\nu \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Remark 2.1. The relation (2.12) implies that, provided $n_\nu \rightarrow \infty$ and $N_\nu - n_\nu \rightarrow \infty$, the limiting variances and distributions of random variables $A_\nu + B_\nu \eta_\nu$ and $A_\nu + B_\nu \eta_\nu^*$ exist under the same conditions, and if exist, are the same. The random variable η_ν^* , however, is a sum of independent addends (2.10), so that when studying the limiting distributions of $A_\nu + B_\nu \eta_\nu^*$, we may simply apply the well-known theory of summation of independent random variables. See [3].

3. Convergence to the normal distribution

We shall prove that the condition derived by ERDŐS-RÉNYI in [1] is not only sufficient but also necessary provided that $n_v \rightarrow \infty$ and $N_v - n_v \rightarrow \infty$.

Theorem 3.1. Let $S_{v\tau}$ be the subset of elements of $S_v = \{1, \dots, N_v\}$ on which the inequality

$$(3.1) \quad |y_{vi} - \bar{Y}_v| > \tau \sqrt{\mathbf{D}\xi_v}$$

holds; let $\mathbf{D}\xi_v$ denote the variance (1.5) referring to the v -th experiment. Suppose that $n_v \rightarrow \infty$ and $N_v - n_v \rightarrow \infty$.

Then the random variable ξ_v defined by (1.3) has asymptotically normal distribution with parameters $(\mathbf{E}\xi_v, \mathbf{D}\xi_v)$ if and only if

$$(3.2) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \in S_{v\tau}} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2}{\sum_{i \in S_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2} = 0 \quad \text{for any } \tau > 0$$

where $\sum_{i \in S_v}$ denotes the same summation as $\sum_{i=1}^{N_v}$.

Proof. In view of Remark 2.1, it suffices to establish sufficient and necessary conditions for asymptotical normality of the random variable η_v^* defined by (2.9), namely with parameters $(0, \mathbf{D}\eta_v^*)$. Notice that $\mathbf{E}\eta_v^* = 0$, since

$$(3.3) \quad \mathbf{E}\eta^* = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}\zeta_i = \sum_{i=1}^N \frac{n}{N} (y_i - \bar{Y}) = 0.$$

First suppose that the random variables $\zeta_{vi} = \zeta_i$ defined by (2.10) are infinitesimal, i. e. that

$$(3.4) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\max_{1 \leq i \leq N} \mathbf{D}\zeta_{vi}}{\sum_{i=1}^{N_v} \mathbf{D}\zeta_{vi}} = 0.$$

In view of (2.11), (3.4) is equivalent to

$$(3.5) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\max_{1 \leq i \leq N_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2}{\sum_{i=1}^{N_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2} = 0.$$

The condition (3.5) is clearly much weaker than the condition (3.2); it is usually called the Noether condition.

Provided that (3.4) holds, the necessary and sufficient condition for asymptotical normality of η_v^* with parameters $(0, \mathbf{D}\eta_v^*)$ is given by the Lindeberg condition. Since the random variables $\zeta_{vi} - \mathbf{E}\zeta_{vi}$ take on values $(y_{vi} - \bar{Y}_v) \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right)$ and $-(y_{vi} - \bar{Y}_v) \frac{n_v}{N_v}$ with respective probabilities $\frac{n_v}{N_v}$

and $1 - \frac{n_v}{N_v}$ we have

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\mathbf{D}\eta_v^*} \sum_{i=1}^{N_v} \int_{|x| > \tau / \overline{\mathbf{D}\eta_v^*}} x^2 d\mathbf{P}\{\zeta_{vi} - \mathbf{E}\zeta_{vi} < x\} = \\
 (3.6) \quad & = \frac{\frac{n_v}{N_v} \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right)^2 \sum_{i \in C_{v\tau}} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2 + \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right) \left(\frac{n_v}{N_v}\right)^2 \sum_{i \in B_{v\tau}} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2}{\frac{n_v}{N_v} \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right) \sum_{i \in S_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2} = \\
 & = \frac{\left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right) \sum_{i \in C_{v\tau}} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2 + \frac{n_v}{N_v} \sum_{i \in B_{v\tau}} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2}{\sum_{i \in S_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2}
 \end{aligned}$$

where $C_{v\tau}$ and $B_{v\tau}$ are subsets of elements of S_v on which

$$(3.7) \quad C_{v\tau}: |y_{vi} - \bar{Y}_v| \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right) > \tau \sqrt{\frac{n_v}{N_v} \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right) \sum_{i \in S_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2}$$

and

$$(3.8) \quad B_{v\tau}: |y_{vi} - \bar{Y}_v| \frac{n_v}{N_v} > \tau \sqrt{\frac{n_v}{N_v} \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right) \sum_{i \in S_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2}$$

respectively. In view of (1.5), we see that

$$(3.9) \quad C_{v\tau} = S_{v,\tau} \sqrt{\frac{N_v(N_v-1)}{(N_v-n_v)^2}} \quad \text{and} \quad B_{v\tau} = S_{v,\tau} \sqrt{\frac{N_v(N_v-1)}{n_v^2}}.$$

From (3.9) it follows that (3.2) is equivalent to the condition that the first member of (3.6) converges to 0, i. e. to the fulfilment of the Lindeberg condition for η_v^* .

Thus it remains to prove that η_v^* cannot have a limiting normal distribution with parameters $(\mathbf{E}\eta_v^*, \mathbf{D}\eta_v^*)$, if (3.5) does not hold.

We may suppose without any loss of generality that $n_v \leq \frac{1}{2} N_v$ and

$$(3.10) \quad |y_{v1} - \bar{Y}_v| \geq |y_{v2} - \bar{Y}_v| \geq \dots \geq |y_{vN_v} - \bar{Y}_v|.$$

If (3.5) is not satisfied, then there exist an $\varepsilon \neq 0$ such that

$$(3.11) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{y_{v1} - \bar{Y}_v}{\sqrt{\sum_{i \in S_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2}} = \varepsilon \neq 0$$

for some subsequence of indices v . Taking a new subsequence from this subsequence, we may assume that

$$(3.12) \quad \lim_v \frac{n_v}{N_v} = c \leq \frac{1}{2}.$$

For simplicity let us introduce no new symbols for denoting the subsequences.

Now the relations (3.11) and (3.12) mean that the distribution function of the random variable

$$(3.13) \quad \frac{\zeta_{v1}}{\sqrt{\mathbf{D} \eta_v^*}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{n_v}{N_v} \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right) \sum_{i \in S_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2} & \text{with probability } \frac{n_v}{N_v} \\ 0 & \text{with probability } 1 - \frac{n_v}{N_v} \end{cases}$$

converges to a distribution function which has a jump $1 - c$ at the point 0 and, if $c > 0$, a jump c at the point $\frac{\varepsilon}{\sqrt{c(1-c)}}$. Let us discuss each of the cases $c=0$ and $c > 0$ separately.

If $c = 0$ the variance of (3.13) does not converge to the variance of the limiting distribution. Actually, (3.13) has the limiting variance ε^2 while the limiting distribution is degenerated to the single point 0 so that it has the variance 0. Hence if there existed a limiting distribution of the statistic

$$(3.13) \quad \frac{\eta_v^*}{\sqrt{\mathbf{D} \eta_v^*}} = \frac{\zeta_{v1}}{\sqrt{\mathbf{D} \eta_v^*}} + \frac{\sum_{i=2}^{N_v} \zeta_{vi}}{\sqrt{\mathbf{D} \eta_v^*}}$$

it would have a variance smaller than 1. Consequently, η_v^* cannot have asymptotically normal distribution with parameters $(0, \mathbf{D} \eta_v^*)$.

If $c > 0$, the distribution of (3.12) converges to a distribution concentrated in the points 0 and $\frac{\varepsilon}{\sqrt{c(1-c)}}$. If (3.13) had asymptotically normal distribution, this distribution could be decomposed in a convolution of two distributions one of which is not normal. This is, however, not possible, in view of the well-known theorem by H. CRAMÉR.

The theorem is completely proved. *

Remark 3.1. In paper [2] there is proved that, provided we have a fixed double sequence $\{N_v, y_{vi}\}$, the Lindeberg condition (3.2) is fulfilled for any sequence $\{n_v\}$, such that $n_v \rightarrow \infty$ and $N_v - n_v \rightarrow \infty$, if and only if the relation

$$(3.14) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \in s_{r_v}} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2}{\sum_{i \in S_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2} = 0$$

holds for any sequence $\{s_{r_v}\}$ such that $s_{r_v} \subset S_v$ and

$$(3.15) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{r_v}{N_v} = 0$$

where r_v denotes the number of elements in s_{r_v} .

Remark 3.2. According to a theorem by CRAMÉR, ([5] p. 105.) a vector $(\xi_{v1}, \dots, \xi_{vm})$ has a m -dimensional normal limit distribution with parameters $\{E \xi_{vj}, \text{Cov}(\xi_{vj}, \xi_{vh}), h, j = 1, \dots, m\}$ if any linear combination $\sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_{vj}$ has a one-dimensional normal limit distribution with respective parameters. Let ξ_{vj} be given by (1.3) where $y_i = y_{vji}$, where v labels the experiment and j the variable. Suppose that the sequences $\{y_{vji}, n_v, N_v\}$, $j = 1, \dots, m$, fulfil the condition (3.2) and that the multiple correlation coefficients ϱ_{vj} between ξ_{vj} and $\{\xi_{vj'} j' \neq j\}$ are uniformly bounded from 1, i. e. that

$$(3.16) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \sup \varrho_{vj}^2 < 1 \quad j = 1, \dots, m.$$

Then any sequence $\left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j y_{vji}, n_v, N_v \right\}$, where λ_j are arbitrary constants, fulfils the condition (3.2) and hence the random vector $(\xi_{v1}, \dots, \xi_{vm})$ has asymptotically normal m -dimensional distribution with respective parameters. Actually, we have

$$(3.17) \quad D \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_{vj} \right) \geq \max_{1 \leq j \leq m} (1 - \varrho_{vj}^2) \lambda_j^2 D \xi_{vj}$$

and

$$(3.18) \quad \left| \sum_{j=1}^m \lambda_j (y_{vji} - \bar{Y}_{vj}) \right| \leq m \max_{1 \leq j \leq m} |\lambda_j| |y_{vji} - \bar{Y}_{vj}|.$$

The rest follows by easy computations.

Remark 3.3. If $\frac{n_v}{N_v}$ is bounded from 0 and 1, i. e.

$$(3.19) \quad 0 < \varepsilon < \frac{n_v}{N_v} < 1 - \varepsilon \quad (v \geq v_0)$$

then the Lindeberg condition (3.2) reduces to the Noether condition (3.5). Really, if (3.5) and (3.19) are satisfied, then the subset $S_{v\tau}$ is empty for all sufficiently large v so that (3.2) clearly holds. If (3.5) is not satisfied, (3.2) does not hold in any case.

4. Convergence to the Poisson distribution

Using the same method as in Section 3, the following theorem will be proved:

Theorem 4.1. Suppose that $n_v \rightarrow \infty$, $n_v \leq \frac{1}{2} N_v$, and

$$(4.1) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} E \xi_v = \lim_{v \rightarrow \infty} D \xi_v = \lambda > 0.$$

Then the relation (1.7) is fulfilled if and only if, first

$$(4.2) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_v}{N_v} = 0$$

and, second,

$$(4.3) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_v}{N_v} \sum_{|y_{vi}-1| > \tau} y_{vi}^2 = 0 \quad \text{for any } \tau > 0.$$

Proof. First assume that the infinitesimality condition (3.5) holds. If (4.2) does not hold, then, in view of Remark 3.3, the limiting distribution may be only normal. Consequently, the condition (4.2) is necessary. Now η_v^* has limiting Poisson distribution if and only if

$$(4.4) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N_v} \int_{|x-1| > \tau} x^2 d\mathbf{P}\{\zeta_{vi} - \mathbf{E} \zeta_{vi} < x\} = 0.$$

We may write, as in (3.6),

$$(4.5) \quad \sum_{i=1}^{N_v} \int_{|x-1| > \tau} x^2 d\mathbf{P}\{\zeta_{vi} - \mathbf{E} \zeta_{vi} < x\} = \frac{n_v}{N_v} \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right)^2 \sum_{i \in C'_{v\tau}} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2 + \\ + \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right) \left(\frac{n_v}{N_v}\right)^2 \sum_{i \in B'_{v\tau}} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2$$

where $C'_{v\tau}$ and $B'_{v\tau}$ are subsets of elements of S_v on which

$$(4.6) \quad C'_{v\tau}: \left| (y_{vi} - \bar{Y}_v) \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right) - 1 \right| > \tau$$

and

$$(4.7) \quad B'_{v\tau}: \left| - (y_{vi} - \bar{Y}_v) \frac{n_v}{N_v} - 1 \right| > \tau.$$

In view of (4.1), it holds that

$$(4.8) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_v}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} y_{vi} = \lim_{v \rightarrow \infty} n_v \bar{Y}_v = \lambda, \quad \text{i. e. } \lim_{v \rightarrow \infty} \bar{Y}_v = 0$$

and

$$(4.9) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n_v}{N_v}\right) \frac{n_v}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2 = \lambda.$$

Consequently, in accordance with (4.2),

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_v} \int_{|x-1| > \tau} x^2 d\mathbf{P}\{\zeta_{vi} - \mathbf{E} \zeta_{vi} < x\}}{\frac{n_v}{N_v} \sum_{|y_{vi}-1| > \tau} y_{vi}^2} = 1,$$

which proves the equivalency of conditions (4.3) and (4.4).

As for the case when the condition (3.5) is not fulfilled, we could prove, as in the proof of Theorem 3.1 that the limiting distribution cannot preserve variance.

Remark 4.1. If the sampling were done with replacement (i. e. as n independent drawings of one element) we would get just the conditions (4.2) and (4.3) for asymptotic Poisson distribution of the sum of selected values. This coincidence is clearly caused by the fact that the difference between with and without replacement sampling becomes negligible if $\frac{n_v}{N_v} \rightarrow 0$.

5. Other cases

Developing the basic idea further, we get

Theorem. 5.1. *Suppose that*

$$(5.1) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{E} \xi_v = \mu$$

and

$$(5.2) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{D} \xi_v = \sigma^2$$

and consider an infinitely divisible law — distinct from normal law — with mean value μ , variance σ^2 and cumulant — generating function

$$(5.3) \quad i\mu t + \int (e^{itu} - 1 - itu) \frac{1}{u^2} dK(u).$$

Then the distribution of ξ_v converges to the law given by (5.3) if and only if

$$(5.4) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_v}{N_v} = 0$$

and

$$(5.5) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_v}{N_v} \sum_{y_{vi} < u} y_{vi}^2 = K(u)$$

in all continuity points of $K(u)$.

Proof. The same as of Theorem 4.1.

6. Conclusions

If $\frac{n_v}{N_v}$ does not converge to 0, normal limiting distribution is possible, namely under conditions established in Theorem 3.1. We can also get a limiting distribution formed as a convolution of a normal distribution and some two-points distributions.

If $\frac{n_v}{N_v}$ converges to 0, the variance preserving limiting distribution may be only infinitely divisible. The conditions for this are the same as if the sampling were carried out with replacement.

(Received May 7, 1960.)

REFERENCES

- [1] ERDŐS, P. and RÉNYI, A.: „On a central limit theorem for samples from a finite population.” *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **4** (1959) 49—61.
 [2] HÁJEK, J.: „Some extensions of the Wald—Wolfowitz—Noether theorem.” (In print.)
 [3] ГНЕДЕНКО, Б. В. и КОЛМОГОРОВ, А. Н.: *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*. Гостехиздат, Москва, 1949.
 [4] MADOW, W. G.: „On the limiting distributions of estimates based on samples from finite universes.” *Ann. Math. Stat.* **19** (1948) 535—545.
 [5] CRAMÉR, H.: *Random variables and probability distributions*. Cambridge University Press, London, 1937.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ ПРОСТОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКЕ ИЗ КОНЕЧНОЙ СОВОКУПНОСТИ

Ж. HÁJEK

Резюме

В статье вероятностная выборка из конечной совокупности рассматривается как случайный опыт, при котором из множества $S = \{1, 2, \dots, N\}$ выбирается подмножество s , $s \subset S$. Множество S и случайное подмножество s называем соответственно основной совокупностью и выборочной совокупностью. Обозначим s составляющее из k элементов через s_k и вероятность s_k через $P(s_k)$.

При простой случайной выборке (без возвращения), объема n , мы имеем

$$(1.1) \quad P(s_k) = \begin{cases} \binom{N}{n}^{-1} & \text{для } k = n \\ 0 & \text{для } k \neq n. \end{cases}$$

В статье показывается, что задача о предельных распределениях при предположении (1.1) сводится к той же задаче при предположении

$$(1.2) \quad P(s_k) = \left(\frac{n}{N}\right)^k \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{N-k} \quad \text{для } 0 \leq k \leq N.$$

Вероятностную выборку с вероятностями (1.2) называем пуассоновской выборкой. Эту выборку возможно понимать, во первых, как простую случайную выборку объема k , при чем k есть случайная величина с биномиальным законом распределения с вероятностями $\binom{N}{k} \left(\frac{n}{N}\right)^k \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{N-k}$, или во вторых, как N независимых опытов таких, что при i -том опыте элемент i включен во выборочную совокупность с вероятностью $\frac{n}{N}$ и не включен с вероятностью $1 - \frac{n}{N}$.

Пусть y_1, \dots, y_N — вещественные числа; положим

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

и далее

$$(2.2) \quad \eta = \sum_{i \in s_n} (y_i - \bar{Y})$$

и

$$(2.3) \quad \eta^* = \sum_{i \in s_k} (y_i - Y),$$

где s_n и s_k представляют соответственно результат простой случайной выборки и пуассоновской выборки. В пар. 2 показывается, что выборки (s_n, s_k) возможно осуществить одновременно таким образом, что $s_n \subset s_k$, если $n \leq k$, и $s_n \supset s_k$, если $n \geq k$, и

$$(2.5) \quad \frac{\mathbf{E}(\eta - \eta^*)^2}{\mathbf{D} \eta^*} \leq \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{N-n}},$$

где $\mathbf{E}(\cdot)$ обозначает среднюю и $\mathbf{D}(\cdot)$ дисперсию.

Теперь рассмотрим последовательность $\{y_{vi}, n_v, N_v\}_{v=1}^{\infty}$ основных совокупностей объема N_v со значениями y_{vi} ($i = 1, \dots, N_v$), простых случайных выборок объема n_v и сопровождающих их пуассоновских выборок. Если предположим, что $n_v \rightarrow \infty$ и $N_v - n_v \rightarrow \infty$, и обозначим через η_v и η_v^* случайные величины (2.2) и (2.3) относящиеся к v -тому члену нашей последовательности, то из (2.5) следует, что

$$(2.12) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(\eta_v - \eta_v^*)^2}{\mathbf{D} \eta_v^*} = 0.$$

Значит, предельные дисперсии и распределения случайных величин $A_v + B_v \eta_v$ и $A_v + B_v \eta_v^*$ (A_v, B_v — любые постоянные) существуют при тех же условиях, и если они существуют, то они совпадают, друг с другом. Но случайная величина η^* равняется сумме N не зависящих случайных величин ζ_1, \dots, ζ_N ,

$$(2.9) \quad \eta^* = \sum_{i=1}^N \zeta_i$$

определенных так, что

$$(2.10) \quad \zeta_i = \begin{cases} y_i - \bar{Y} & \text{если } i \in s_k \\ 0 & \text{если } i \notin s_k. \end{cases}$$

Таким образом мы свели задачу о предельном распределении случайной величины η к той же самой задаче о сумме независимых слагаемых η^* . В результате применения этого простого факта, получаются следующие теоремы:

Теорема 3.1. Пусть $S_{v\tau}$ — подмножество множества $S_v = \{1, \dots, N_v\}$

состоящее из элементов для которых имеем

$$(3.1) \quad |y_{vi} - \bar{Y}_v| > \tau \sqrt{\mathbf{D} \eta_v}.$$

Предположим что $n_v \rightarrow \infty$ и $N_v - n_v \rightarrow \infty$.

Потом случайная величина (2.2) имеет предельное нормальное распределение с параметрами $(\mathbf{E} \eta_v, \mathbf{D} \eta_v)$ тогда и только тогда, если

$$(3.2) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \in S_{v\tau}} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2}{N_v \sum_{i=1}^{N_v} (y_{vi} - \bar{Y}_v)^2} \quad \text{при всяком } \tau > 0.$$

Достаточность условия (3.2) была в первые доказана другим методом в работе [1].

Теорема 4.1 Предположим, что $n_v \rightarrow \infty$, $n_v \leq \frac{1}{2} N_v$ и

$$(4.1) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\sum_{i \in S_{n_v}} y_{vi}) = \lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{D}(\sum_{i \in S_{n_v}} y_{vi}) = \lambda > 0.$$

Потом соотношение

$$(1.7) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{D}\left\{\sum_{i \in S_{n_v}} y_{vi} = k\right\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

имеет место тогда и только тогда, если

$$(4.2) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_v}{N_v} = 0$$

и

$$(4.3) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_v}{N_v} \sum_{|y_{vi}-1| > \tau} y_{vi}^2 = 0 \quad \text{при всяком } \tau > 0.$$

Теорема 5.1 Предположим что

$$(5.1) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\sum_{i \in S_{n_v}} y_{vi}) = \mu$$

и

$$(5.2) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{D}(\sum_{i \in S_{n_v}} y_{vi}) = \sigma^2$$

и рассмотрим бесконечно-делимый закон, отличный от нормального и имеющий среднюю μ , дисперсию σ^2 и логарифм характеристической функции

$$(5.3) \quad i \mu t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - itu) \frac{1}{u^2} dK(u).$$

Это распределение является предельным для случайной величины $\sum_{i \in s_{n_v}} y_{vi}$ тогда и только тогда, если

$$(5.4) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_v}{N_v} = 0$$

и

$$(5.5) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_v}{N_v} \sum_{y_{vi} < u} y_{vi}^2 = K(u)$$

во всех точках непрерывности $K(u)$.

SOME REMARKS ON THE RANDOM ERGODIC THEOREM I.

by

PÁL RÉVÉSZ

Introduction

The following two fundamental theorems of ergodic theory are well-known:

Theorem of Neumann. ([1]) *If T is a measurable and measure preserving transformation on a measure space $\{X, \mathcal{S}, \mu\}$ ¹ and if $f(x) \in L^2_{(X, \mu)}$ then*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^k x)$$

converges in mean to a function $f^(x)$.*

Theorem of Birkhoff. ([2]) *If T is a measurable and measure preserving transformation on a measure space $\{X, \mathcal{S}, \mu\}$ and if $f(x) \in L^1_{(X, \mu)}$ then*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^k x)$$

converges almost everywhere to a function $f^(x) \in L^1_{(X, \mu)}$.*

Many generalizations of these theorems are known ([3]). Here we mention only one of these generalizations, the so called random ergodic theorem. Before formulating this theorem we introduce some notations. Let \mathcal{T} be a measure space of measure preserving transformations defined on $\{X, \mathcal{S}, \mu\}$ with a probability measure \mathbf{P} . Let us consider the product space

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \times \dots$$

[where $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}$ ($i = 1, 2, \dots$)] and the product measure

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \dots$$

[where $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}$ ($i = 1, 2, \dots$)]. Now we formulate the

Random ergodic theorem. ([4], [5], [6], [7], [8]) *If $f(x) \in L^1_{(X, \mu)}$ then*

$$(1) \quad \mathbf{P}^* \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_k \dots T_1 x) \rightarrow f^*(x) \text{ almost everywhere} \right\} = 1$$

where (T_1, T_2, \dots) is a point of \mathcal{T}^ and $f^*(x) \in L^1_{(X, \mu)}$.*

¹ Here and in what follows μ is a σ -finite measure.

The meaning of this theorem is the following. If we have a set of transformations and we choose at random (with the same "distribution") and independently a sequence T_1, T_2, \dots from this set then for almost every choice of the sequences

$$(2) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_k \dots T_1 x) \rightarrow f^*(x)$$

holds almost everywhere.

A. RÉNYI raised another problem: if T_1, T_2, \dots is a sequence of measure preserving transformations, then give a sufficient condition for the convergence (almost everywhere or in mean) of the sequence

$$(3) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_k \dots T_1 x).$$

An interesting problem in connection with this question is the following: if we choose from the set \mathcal{T} a sequence T_1, T_2, \dots at random, not necessarily with the same distribution, but independently, under what condition does (2) hold almost everywhere or in mean, with probability 1. More exactly if \mathcal{T} is a measurable space with probability measures $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots$ and if we denote

$$\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \times \dots$$

by \mathcal{T}^* [where $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}$ ($i = 1, 2, \dots$)] and

$$\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \dots$$

by \mathbf{P}^* then the problem may be formulated as follows: under what conditions does (1) or

$$(4) \quad \mathbf{P}^* \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_k \dots T_1 x) \Rightarrow f^*(x) \right\} = 1 \text{ if } f(x) \in L^2_{(X, \mu)}$$

hold, where " \Rightarrow " means convergence in mean.

In § 1 we prove a theorem in connection with this last problem, in § 2 we give an example.

I am indebted to Prof. A. RÉNYI for his valuable remarks.

§ 1. A statistical random ergodic theorem

Theorem 1. *Let \mathcal{T} be a measurable space of measure preserving transformations defined on a measure space $\{X, \mathcal{L}, \mu\}$ and let*

$$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots$$

be a sequence of probability measures on \mathcal{T} . We denote

$$\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \times \dots$$

(where $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}$ ($i = 1, 2, \dots$)) by \mathcal{T}^ and*

$$\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \dots$$

by \mathbf{P}^* . Let H_1 be a subspace of $L^2_{(X,\mu)}$ such that if $f \in H_1$ then $\int_X f(x) d\mu = 0$. We assume that

$$(5) \quad \|\mathbf{M}_{\mathbf{P}_i} f(Tx)\|_{L^2_{(X,\mu)}} = \left\| \int_{T \in \mathcal{T}} f(Tx) d\mathbf{P}_i \right\| \leq m_i \|f(x)\|_{L^2_{(X,\mu)}}$$

for every $f(x) \in H_1$

where

$$m_i = 1 - \frac{C}{i^{1-\varepsilon}}$$

(C is an arbitrary positive constant, $0 < \varepsilon \leq 1$) and $f(Tx)$ is a measurable and integrable function in the space $\mathcal{T}^* \times X$.

Then

$$(6) \quad \mathbf{P}^* \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_k \dots T_1 x) \Rightarrow 0 \right\} = 1$$

for every $f(x) \in H_1$.

Remark. Let us define for every $T \in \mathcal{T}$ a corresponding isometry U_T on H_1 by

$$U_T f(x) = f(Tx).$$

Now we can define the random variables U_i with the values which are isometries in the following way: the random variable U_i is defined on the basic space \mathcal{T}^* by

$$U_i(T_1, T_2, \dots) f(x) = f(T_i x)$$

where $T_j \in \mathcal{T}_j$; now (5) can be written in the form

$$(5^*) \quad \|\mathbf{M}(U_i)\| \leq m_i$$

where $\mathbf{M}(U_i)$ is the mathematical expectation of the random variable U_i in the sense of MOURIER and FORTET (cf. [9]). Then (6) is equivalent with

$$(6^*) \quad \mathbf{P}^* \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k \dots U_1 f(x) \Rightarrow 0 \right\} = 1.$$

The proof of theorem 1. By the Markov inequality we have

$$(7) \quad \mathbf{P}^* \{ \|S_n f(x) - \mathbf{M}[S_n f(x)]\| \geq \varepsilon \} \leq \frac{\mathbf{D}^2(S_n f)}{\varepsilon^2}$$

where

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k \dots U_1$$

and

$$\mathbf{D}^2(S_n f(x)) = \mathbf{M} \{ \|S_n f(x) - \mathbf{M}(S_n f(x))\|^2 \}.$$

First of all let us calculate the value of $\|\mathbf{M}(S_n f(x))\|$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{M}(S_n f(x))\| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{M}(U_k \dots U_1 f(x))\| \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_1 \dots m_k = O\left(\frac{\log n}{n}\right) \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Clearly we have

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(S_n f(x)) &= \mathbf{M}\{\|(S_n f) - \mathbf{M}(S_n f)\|^2\} \leq \mathbf{M}\{\|S_n f\| + \|\mathbf{M}(S_n f)\|\}^2 = \\ &= \mathbf{M}(\|S_n f\|^2) + 2 \mathbf{M}(\|S_n f\|) \cdot \|\mathbf{M}(S_n f)\| + \|\mathbf{M}(S_n f)\|^2\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\{\|S_n f\|^2\} &= \mathbf{M}\left\{\int_X (S_n f(x))^2 d\mu\right\} = \int_X \mathbf{M}[(S_n f)^2] d\mu, \\ \mathbf{M}\{\|S_n f\|\} &= \mathbf{M}\left\{\sqrt{\int_X (S_n f(x))^2 d\mu}\right\} \leq \sqrt{\int_X \mathbf{M}[(S_n f)^2] d\mu}.\end{aligned}$$

Now let us calculate the value of $\int_X \mathbf{M}[(S_n f(x))^2] d\mu$. Clearly

$$(S_n f)^2 = A + 2B$$

where

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (U_k \dots U_1 f)^2 \\ B &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n U_j \dots U_1 f \cdot U_k \dots U_1 f.\end{aligned}$$

It is easy to see that

$$(9) \quad \int_X \mathbf{M}(A) d\mu = \mathbf{M}\left[\int_X A d\mu\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\left[\int_X (U_k \dots U_1 f)^2 d\mu\right] = \frac{1}{n} \|f\|^2$$

and

$$\begin{aligned}\left|\int_X \mathbf{M}(B) d\mu\right| &= \left|\frac{1}{n^2} \int_X \left[\mathbf{M} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n U_j \dots U_1 f \cdot U_k \dots U_1 f\right] d\mu\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} \mathbf{M}\left[\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left|\int_X U_j \dots U_1 f \cdot \mathbf{M}(U_k) \dots \mathbf{M}(U_{j+1}) U_j \dots U_1 f d\mu\right|\right] \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \|U_j \dots U_1 f\| \cdot \|\mathbf{M}(U_k) \dots \mathbf{M}(U_{j+1}) U_j \dots U_1 f\| \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} \|f\|^2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n m_{j+1} \dots m_k.\end{aligned}$$

This inequality and a simple calculation give

$$(10) \quad \left| \int_X \mathbf{M}(B) d\mu \right| = O(1/n^{1/\alpha})$$

where $\alpha = [1/\varepsilon] + 1$. In view of (9) and (10)

$$(11) \quad \int_X \mathbf{M}[(S_n f)^2] d\mu = O(1/n^{1/\alpha}).$$

(7), (11) and the Borel—Cantelli lemma together imply that

$$(12) \quad \mathbf{P}^* \{S_{n^{2\alpha}} f(x) \Rightarrow 0\} = 1.$$

Now let n be an arbitrary integer and k another integer such that

$$k^{2\alpha} \leq n < (k+1)^{2\alpha}.$$

Hence we have

$$\begin{aligned} \|S_n f\| &\leq \frac{\|U_1 f + \dots + U_{k^{2\alpha}} \dots U_1 f\|}{k^{2\alpha}} + \frac{\|U_{k^{2\alpha}+1} \dots U_1 f\| + \dots + \|U_n \dots U_1 f\|}{k^{2\alpha}} \leq \\ &\leq \|S_{k^{2\alpha}} f(x)\| + \|f\| \frac{(k+1)^{2\alpha} - k^{2\alpha}}{k^{2\alpha}} = \|S_{k^{2\alpha}} f(x)\| + O(1/k). \end{aligned}$$

This relation shows that our statement holds.

§ 2. An example

Let $\xi_0 = 1, \xi_1, \xi_2, \dots$ be an inhomogeneous Markov chain with two states $\{(+1), (-1)\}$ and with the transition matrices

$$\Pi^{(n)} = \begin{pmatrix} p^{(n)} & q^{(n)} \\ q^{(n)} & p^{(n)} \end{pmatrix} \quad (p^{(n)} + q^{(n)} = 1).$$

We assume

$$|p^{(n)} - q^{(n)}| \leq 1 - 1/n^{1-\varepsilon} \quad (0 < \varepsilon \leq 1)$$

and prove that

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow 0 \right\} = 1.$$

Let us define $\{X, \mathcal{S}, \mu\}$ by $X = \{(-1), (+1)\}$, $\mu(+1) = \mu(-1) = 1/2$ and the measure preserving transformations T_1, T_2 by

$$\begin{aligned} T_1 0 &= 0; & T_1 1 &= 1, \\ T_2 0 &= 1; & T_2 1 &= 0. \end{aligned}$$

It is easy to see that

$$\begin{pmatrix} f(T_1 0) \\ f(T_1 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = U^{(1)} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix} f(T_2 0) \\ f(T_2 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = U^{(2)} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

If U_n is a random variable so that

$$\mathbf{P}(U_n = U^{(1)}) = p^{(n)}; \quad \mathbf{P}(U_n = U^{(2)}) = q^{(n)}$$

then

$$\mathbf{M}(U_n) = \begin{pmatrix} p^{(n)} & q^{(n)} \\ q^{(n)} & p^{(n)} \end{pmatrix}$$

and

$$\|\mathbf{M}(U_n)f\| \leq \|f\| \cdot |p^{(n)} - q^{(n)}|$$

if $f \in H_1$. Now if $f(1) = 1, f(-1) = -1$ then $\zeta_0 = f(1)$ and $\zeta_n = U_n \dots U_1 f(1)$ ($n = 1, 2, \dots$). Thus our statement follows from theorem 1.

(Received May 16, 1960.)

REFERENCES

- [1] NEUMANN, J.: "Proof of the quasiergodic hypothesis." *Proc. Nat.* **18** (1932) 70—82.
- [2] BIRKHOFF, G. D.: "Proof of the ergodic theorem." *Proc. Nat.* **17** (1931) 656—660.
- [3] HALMOS, P. R.: *Lectures on ergodic theory*. The Mathematical Soc. of Japan. Tokyo. 1956.
- [4] PITT, H. R.: "Some generalizations of the ergodic theorem." *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **38** (1942) 325—343.
- [5] ULAM, S. M.—NEUMANN, J.: "Random ergodic theorems." *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* **51** (1945) 660.
- [6] KAKUTANI, S.: "Random ergodic theorems and Markoff processes with a stable distribution." *Second Berkeley Symposium* (1951) 247—261.
- [7] RYLL—NARDZEWSKI, O.: "On the ergodic theorems (III.) (The random ergodic theorem)." *Studia Math.* **14** (1954) 298—301.
- [8] GLADYSZ, S.: "Über den stochastischen Ergodensatz." *Studia Math.* **15** (1956) 158—173.
- [9] MOURIER, E.: " L random elements and L^* random elements in Banach spaces." *Third Berkeley Symposium* (1956) II. 231—242.
- [10] DUNFORD, N.—MILLER, D. S.: "On the ergodic theorem." *Trans. Amer. Math. Soc.* **60** (1946) 538—549.

Added in proof (16. sept. 1960.): It is easy to see that instead of the condition that the elements of \mathcal{T} are measure preserving transformations it is enough to assume that for every sequence T_1, T_2, \dots of \mathcal{T} we have

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu(T_1^{-1} \dots T_k^{-1} E) \leq K \mu(E)$$

where $E \in \mathcal{S}$ and K is an arbitrary positive constant. This is an analogous condition to the condition of DUNFORD and MILLER [10].

ОДНА ВЕРОЯТНОСТНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

P. RÉVÉSZ

Резюме

В работе доказывается следующая

Теорема. Пусть \mathcal{T} есть измеримое пространство инвариантных относительно меры преобразований, определенных на пространстве $\{X, \mathcal{S}, \mu\}$. Пусть $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots$ есть последовательность вероятностных мер, определенных на \mathcal{T} . Пусть далее

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \times \dots$$

где $\mathcal{T}_i = \mathcal{T} (i = 1, 2, \dots)$

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \dots$$

и $H_1 \subset L^2_{(X, \mu)}$ пространство функций с нулевым интегралом.
Предположим, что

$$\left\| \int_{T \in \mathcal{T}} f(Tx) d\mathbf{P}_i \right\| \leq m_i \|f(x)\|_{L^2(X, \mu)}$$

для всех $f(x) \in H_1$, где $m_i \leq 1 - C/i^{-\varepsilon}$ ($0 < \varepsilon \leq 1$), и $f(Tx)$ измерима на пространстве $\mathcal{T}^* \times X$.

Тогда

$$\mathbf{P}^* \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_k \dots T_1 x) \rightarrow 0 \right\} = 1$$

для всех $f(x) \in H_1$.

В § 2 в качестве примера доказывается, что если $\zeta_0 = 1, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ не однородная цепь Маркова, возможные состояния которой $+1$ и -1 , и вероятностная матрица перехода

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p^{(n)} & q^{(n)} \\ q^{(n)} & p^{(n)} \end{pmatrix}, \quad |p^{(n)} - q^{(n)}| \leq 1 - \frac{C}{n^{1-\varepsilon}}$$

то

$$\mathbf{P} \left(\frac{\zeta_0 + \dots + \zeta_n}{n} \rightarrow 0 \right) = 1.$$

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Pataki Ferenc

A kézirat beérkezett: 1960. X. — Példányszám: 800. Terjedelem: 12,50 (A/5) ív

51.622 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

AKADÉMIAI
TUDOMÁNYOS AKADÉMIAI
KÖNYVTÁRA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azokról különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50.— Ft, külföldi címre 70.— Ft. (Kötetenként 5 \$.) Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadón keresztül adhatók fel (Budapest, V. Alkotmány u. 21., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 15.915.111—46), külföldi megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, P.O.B. 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15.— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest, V. Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: АЛФРÉД РЕ́НИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: КАТАЛИН БОГНА́Р, ПА́Л РЕ́ВЭСЗ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты науч.-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках. Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусках серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюме на языках отличающих от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Местные заказы принимает Издательство Академии Наук (Budapest, V. Alkotmány u. 21. счѐт Венгерского Национального Банка 15.915.111-46), заграничные заказы принимает Культура, (Budapest, 62, P.O.B. 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest, V. Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST, V. REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages, series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50.— Ft to an address in Hungary and 70.— Ft (\$ 5.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Academic Publishing House in Hungary (Budapest, V. Alkotmány u. 21., single account number in the Hungarian National Bank 15.915.111—46) resp. at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, P.O.B. 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest, V. Reáltanoda u. 13/15 .. Hungary).

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

ГОЛЕНКО, Д. И. — СМИРЯГИН, В. П.: Датчик случайных чисел равномерно распределенных в интервале $[0,1]$	241
KONCZ, K.: Über gewisse Elementenfolgen des Hilbertschen Raumes	255
RÉNYI, A.: Bemerkung zur Arbeit „Über gewisse Elementenfolgen des Hilbertschen Raumes“ von K. Koncz	265
SARKADI, K.: On testing for normality	269
SZEKERER, G.: On a theorem of Paul Lévy	277
GRÄTZER, G.—SCHMIDT, E. T.: Über einfache Körpererweiterungen	283
SZÁSZ, F.: Ringe, deren echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind	287
REIMANN, J.—VINCZE, I.: On the comparison of two samples with slightly different sizes	293
CSÁKI, P.—FISCHER, J.: On bivariate stochastic connection	311
CSÁKI, P.—FISCHER, J.: Contributions to the problem of maximal correlation	325
BÁNKÖVI, G.: Evaluation of integrals by Monte Carlo methods based on the one dimensional random space filling	339
PALÁSTI, I.: On some random space filling problems	353
HÁJEK, J.: Limiting distributions in simple random sampling from a finite population	361
RÉVÉSZ, P.: Some remarks on the random ergodic theorem I.	375

307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

V. ÉVFOLYAM B. SOROZAT, 4. FÜZET

1960

★

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ V., СЕРИЯ В, ВЫПУСК 4.

1960

★

PUBLICATIONS

OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME V. SERIES B, FASC. 4.

1960



1960

TARTALOMJEGYZÉK

MARTOS B.: Hiperbolikus programozás	383
TANKÓ J.: A stacionárius folyamatok egy textiliparban használatos jellemzője ...	407
ZAJTA A.: A Lehmann-próbáról	447
FÉNYES T.: A modern operátorszámítás alkalmazása egyszerű átvivőrendszerek válasz-analízisében	461
FÉNYES T.—NÁDAS T.: Törpetranszformátorok lemezmaglapjainak általános geo- metriai gazdaságossági problémái	473
RÉNYI A.: — ZIERMANN M.: Üzletek árúellátásával kapcsolatos szélsőértékfeladatok	495
A Matematikai Kutató Intézet Osztályszemináriumaiiban 1959-ben elhangzott elő- adások kivonatai	507
Az Intézet munkatársainak a korábbi dolgozatjegyzékekben még fel nem tüntetett, másutt megjelent vagy sajtó alatt levő magyar nyelvű dolgozatainak jegyzéke	517

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

V. ÉVFOLYAM B. SOROZAT, 4. FÜZET

1960

★

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ V., СЕРИЯ В, ВЫПУСК 4.

1960

★

PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME V. SERIES B, FASC. 4.

1960



1960

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEIT az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnék. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatolóznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 \$.) Belföldön előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közlések a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. Külföldi megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserékapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: АЛФРЭД РЕЪНИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: КАТАЛИН БОГНАР, ПÁL РЕВЭШ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, БУДАПЕСТ V., РЕАЛТАНОДА U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюмеми на языках отличающихся от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура (Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 type-written copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 5.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

HIPERBOLIKUS PROGRAMOZÁS

MARTOS BÉLA¹

1. Bevezetés

1. A hiperbolikus programozás feladata

A matematikai programozás feladatát általánosan a következőképpen lehet megfogalmazni: Keressük az $u_1, u_2 \dots u_n$ változók azon nem negatív értékrendszerét, amely kielégíti az

$$\begin{array}{l} f_1(u_1, u_2 \dots u_n) \leq 0 \\ \vdots \\ f_m(u_1, u_2 \dots u_n) \leq 0 \end{array}$$

feltételi egyenlőtlenségeket és amely mellett a

$$v = v(u_1, u_2 \dots u_n)$$

függvény maximális értéket vesz fel.

Ennek a feladatnak speciális esete a lineáris programozás néven ismert feladat, amikor is mind az $f_1 \dots f_m$ függvények, mint a v függvény lineárisak. Ekkor a feltételi egyenlőtlenségek ilyen alakúak

$$\begin{array}{l} a_{11} u_1 + \dots + a_{1n} u_n - a_{10} \leq 0 \\ \vdots \\ a_{m1} u_1 + \dots + a_{mn} u_n - a_{m0} \leq 0 \end{array}$$

ami mint ismeretes, az $u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_2 + \dots u_n \mathbf{a}_n \leq \mathbf{a}_0$, illetőleg

$$\mathbf{A} \mathbf{u} \leq \mathbf{a}_0$$

vektoregyenlőtlenség alakban is írható. A v vüggvény pedig

$$v = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n - c_0$$

illetőleg

$$v = \mathbf{c}^* \mathbf{u} - c_0$$

alakban írható.

E feladat megoldására — mint ismeretes — G. B. DANTZIG a szimplex módszert dolgozta ki, amelyet a továbbiakban ismertnek tételezünk fel [1], [3].

¹ Kohó- és Gépipari Minisztérium, Magyar Tudományos Akadémia Számítás-technikai Központja.

Ez a tanulmány a matematikai programozás egy másik speciális esetét tárgyalja, nevezetesen azt, amikor az f_1, \dots, f_m függvények lineárisak, a v függvény pedig lineáris törtfüggvény. Tekintettel arra, hogy az

$$y = \frac{cx - c_0}{dx - d_0}$$

egyváltozós lineáris törtfüggvény képe az (x, y) síkon hiperbola, ezt a feladatot hiperbolikus programozásnak nevezhetjük.

Meg fogjuk mutatni, hogy a hiperbolikus programozás feladata a szimplex módszer segítségével, annak kismértékű módosítása útján megoldható.

Az ismertetendő módszer alkalmasnak látszik olyan gazdasági feladatok megoldására, amikor a különböző gazdasági aktivitások az erőforrásokból mennyiségükkel arányos részt kötnek le, az optimalizálás célja viszont nem valamilyen hozam, ráfordítás vagy megtakarítás extremumának meghatározása (mint a lineáris programozásnál), hanem egy fajlagos mutatószám extremuma, éspedig rendszerint a hozamok és ráfordítások legkedvezőbb aránya.

Ezek szerint a hiperbolikus programozás feladata a következő: Keressük az n elemű

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

vektor azon értékeit, amelyek mellett a

$$v(u) = \frac{x(u)}{y(u)} = \frac{c^* u - c_0}{d^* u - d_0}$$

függvény maximális értéket vesz fel, feltéve, hogy

$$(1.1) \quad Au \leq a_0,$$

$$\text{és } u \geq 0.$$

Az (1.1) alatti feltételeket kielégítő pontok halmazát a lehetséges megoldások halmazának nevezzük és L -vel jelöljük. L — mint ismeretes — zárt konvex halmaz véges számú extrémális ponttal.

2. Előzetes megjegyzések

a) Nehézség nélkül meghatározható lenne a szükséges és elégséges feltétel arra, hogy a hiperbolikus programozási feladat lineáris programozással fajuljon el. (Azaz, hogy az alább definiálandó R halmaz pontjai egy egyenesre essenek.) Gyakorlatilag azonban nem tartjuk szükségesnek az összes elfajuló esetek előzetes kizárását, csak a következő két triviális esetet fogjuk figyelmen kívül hagyni:

aa) Az egész L halmazon

$$(2.1) \quad y = d^* u - d_0 = \text{const.}$$

Ebben az esetben lineáris programozási feladatról van szó. (Illetőleg, ha $y \equiv 0$, akkor a feladatnak nincs értelme.)

ab) Az egész L halmazon

$$(2.2) \quad x(u) = v_0 y(u),$$

ahol $v_0 = \text{const.}$ Ekkor az egész L halmazon $v(u) = v_0$, kivéve $x(u)$ és $y(u)$ esetleges közös 0 helyeit, ahol viszont a függvény nincs értelmezve. Ebben az esetben a programozási feladatnak nincs értelme.

b) Amennyiben a feladat nem a v függvény maximumának, hanem a minimumának meghatározása, akkor e helyett a $(-v)$ függvény maximumát kereshetjük meg.

c) Mindvégig fel fogjuk tételezni, hogy az $y(u)$ függvénynek az L halmazon felvett értékkészletében van pozitív szám. Ezt az általánosság megszorítása nélkül tehetjük, mivel ellenkező esetben a $v = \frac{x(u)}{y(u)}$ függvény helyett a

$v = \frac{-x(u)}{-y(u)}$ függvényt vizsgáljuk. (Az $y \equiv 0$ esetet aa) alatt már kizártuk.)

3. Geometria i értelmezés

A feladatot a következőképpen is felfoghatjuk. Tekintsük a következő leképezést:

$$(3.1) \quad w = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^* \\ d^* \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}.$$

A leképezés — mint látható — egy lineáris transzformációból és egy párhuzamos eltolásból áll.

A (3.1) alatti leképezés a véges számú extrémális ponttal rendelkező zárt konvex

$$L = \{u \mid Au \leq a_0, u \geq 0\}$$

halmazt az (y, x) sík

$$R = \{w(u) \mid u \in L\}$$

halmazára képezi le. (Kivételesen az y tengelyt választottuk vízszintesnek.)

Az R halmazról a következőket mondhatjuk:

1° Az R halmaz konvex és zárt.

2° Az R halmaz minden extrémális pontja képe az L halmaz legalább egy extrémális pontjának.

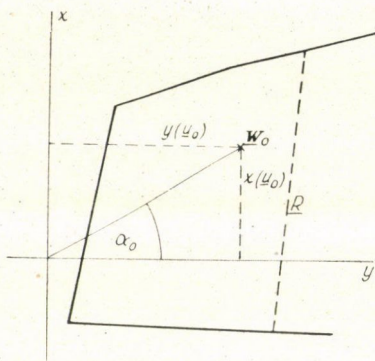
3° Az R halmaz véges számú extrémális ponttal rendelkezik.

4° Ha L konvex poliéder, akkor R konvex sokszög.

5° Az R halmaznak van pontja az $y > 0$ nyílt félsíkban (2. fej. c. szerint).

Az 1° és 2° alatti állítások közvetlenül következnek a lineáris transzformációk ismert tulajdonságaiból, 3° és 4° pedig a megelőző állításokból.

Tekintsük most az (y, x) síkot. Az L halmaz valamely u_0 pontjához tartozó $v(u_0) = \frac{x(u_0)}{y(u_0)}$ függvényértéket úgy kaphatjuk meg, mint az u_0 pont síkbeli w_0 képéhez az origóból húzott félsugár $(+y)$ tengelyhez mért α_0 irányszögének tangensét. (Lásd: 1. sz. ábra. A szaggatott vonal azt az esetet ábrázolja, amikor R korlátos.) A feladat tehát nem más, mint az R halmaz azon pontját megkeresni, melynek iránytangense maximális, illetőleg az L halmaz azon pontjait, amelyek az R kérdéses pontjaira képeztek le.²



1. ábra.

II. Az egyszerű feladat

4. Az egyszerű feladat feltételei

A további tárgyalás egyszerűsítése érdekében a tanulmány következő II. részében egy egyszerű esetet tárgyalunk, amelyen az alkalmazott módszer lényege látható lesz. Valószínűnek tartjuk, hogy a gyakorlati gazdasági feladatok túlnyomó része eleget fog tenni azoknak a megszorításoknak, amelyeket ennél alkalmazni fogunk.

Egyszerű feladatnak fogjuk nevezni a hiperbolikus programozási feladatot abban az esetben, ha eleget tesz a következő két megszorításnak:

a) A lehetséges megoldások halmaza korlátos (tehát konvex poliéder, jelölése P).

b) A tört nevezője a P halmazon nem válik 0-sá.

²Fennáll még a következő geometriai értelmezési lehetőség is. Tekintsük azt a hipersík-sereget, amelyet a

$$(c_1 - \lambda d_1) u_1 + (c_2 - \lambda d_2) u_2 + \dots + (c_n - \lambda d_n) u_n = c_0 - \lambda d_0$$

egyenlet határoz meg a λ paraméter különböző értékeinel. E hipersík-sereg azon elemét keressük, amelynél a λ paraméter értéke maximális és van közös pontja az L halmazzal. Nyilvánvaló, hogy az optimális hipersík tartalmaz az L halmazból extrémális pontot. A különbség a lineáris programozás szokásos geometriai interpretációjával szemben csak az, hogy ott a síksereg párhuzamos, itt pedig nem. A feladatnak ez az interpretálása PRÉKOPA ANDRÁSTÓL származik. Mi — márcsak az ábrázolás könnyebbége kedvéért is — a továbbiakban a 2 dimenziós leképezést alkalmazzuk.

A b) alatti feltétel a 2. fejj. c. alatti feltevessel együtt, az y függvény folytonosságára tekintettel azt jelenti, hogy az egész P halmazon

$$(4.1) \quad y = d^* u - d_0 > 0.$$

Gazdasági programozási feladat esetében az a) alatti feltevés azt jelenti, hogy a programozandó gazdasági aktivitások egyikének terjedelme sem lehet korlátlanul nagy. A b) alatti feltevés kizárja, hogy lehetséges program esetében az optimalizálás céljára kiválasztott mutatószám végtelenné váljon. Látható, hogy e megszorítások gyakorlatilag kézenfekvő feltevéseknek felelnek meg. Ezért az egyszerű feladat tárgyalása önmagában is gyakorlati érdekességű.

5. A v függvény maximumára vonatkozó tétel az egyszerű feladatnál

A szimplex módszer segítségével egy függvény értékét egy konvex poliéder csúcspontjaiban vizsgálhatjuk meg. A szimplex módszer alkalmazásának lehetőségét az egyszerű hiperbolikus programozási feladatra a következő tétel biztosítja.

Tétel. *Ha a*

$$v(u) = \frac{c^* u - c_0}{d^* u - d_0}$$

lineáris függvények

a) az értelmezési tartománya egy $Au \leq a_0$, $u \geq 0$ feltételek által meghatározott konvex P poliéder és

b) a P halmazon

$$y = d^* u - d_0 > 0,$$

akkor a v függvénynek a P halmazon van véges maximuma és ezt felveszi a poliédernek legalább egy csúcspontján.

Bizonyítás. Legyenek a P poliéder csúcspontjai: p_1, p_2, \dots, p_s , akkor mint ismeretes, a P egy tetszés szerinti z pontja felírható e vektorok konvex lineáris kombinációjaként

$$(5.1) \quad z = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \dots + \beta_s p_s,$$

ahol

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s = 1$$

és

$$\beta_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Tegyük fel, hogy a csúcspontok közül a v függvény értéke a p_h pontban a legnagyobb, azaz

$$(5.2) \quad v(p_h) \geq v(p_i) \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

azaz

$$x(p_h) y(p_i) \geq y(p_h) x(p_i).$$

Szorozzunk mindkét oldalon β_i -vel és összegezzünk $i = 1$ -től $i = s$ -ig

$$(5.3) \quad x(\mathbf{p}_h) \sum_i \beta_i y(\mathbf{p}_i) \geq y(\mathbf{p}_h) \sum_i \beta_i x(\mathbf{p}_i).$$

A következő átalakítás szerint — (5.1)-et figyelembe véve —

$$\sum_i \beta_i y(\mathbf{p}_i) = \sum_i \beta_i (\mathbf{d}^* \mathbf{p}_i - d_0) = \mathbf{d}^* \sum_i \beta_i \mathbf{p}_i - d_0 \sum_i \beta_i = \mathbf{d}^* \mathbf{z} - d_0 = y(\mathbf{z})$$

és hasonlóképpen

$$\sum_i \beta_i x(\mathbf{p}_i) = x(\mathbf{z}).$$

Tehát (5.3)-ból

$$x(\mathbf{p}_h) y(\mathbf{z}) \geq y(\mathbf{p}_h) x(\mathbf{z}),$$

amiből következik

$$v(\mathbf{p}_h) \geq v(\mathbf{z}).$$

Ezzel tételünket bebizonyítottuk, azaz azt is, hogy a szimplex módszer segítségével az egyszerű hiperbolikus programozási feladat megoldásának lehetősége fennáll.

6. Az egyszerű feladat megoldása szimplex módszerrel

Teendőnk már csak az, hogy megadjunk egy olyan algoritmust, melynek segítségével a szimplex eljárás során szükséges lépések számát csökkenthetjük és a ciklikus iterációt elkerülhetjük.

A továbbiakban feltételezzük, hogy az (1.1) alatti feltételi egyenlőtlenségeket az ismert módon, maradék változók bevezetésével már egyenletekké alakítottuk át és ezeket írjuk

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{a}_0$$

alakban.

Tegyük fel, hogy ismerjük a feladatnak egy m pozitív komponenst tartalmazó bázismegoldását, továbbá tegyük fel, hogy éppen az első m komponens pozitív. A bázis-vektorok tehát $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_m$.

Az $\mathbf{a}_i (i = m + 1, m + 2, \dots n)$ vektor koordinátái ezen a bázison legyenek: $b_{1i}, b_{2i}, \dots b_{mi}$, az \mathbf{a}_0 vektoré $u_1, u_2, \dots u_m$.

Jelölje továbbá

$$x_i = c_1 b_{1i} + \dots + c_m b_{mi} - c_i$$

$$y_i = d_1 b_{1i} + \dots + d_m b_{mi} - d_i \quad (i = m + 1, m + 2, \dots n)$$

$$t_i = xy_i - yx_i.$$

(Ha \mathbf{a}_i bázis-vektor, úgy: $b_{ji} = 0$, ha $i \neq j$; $b_{ii} = 1$; és ennek megfelelően: $x_i = y_i = t_i = 0$.)

Ezekután felírhatjuk a következő — a lineáris programozásnál használt táblázathoz képest valamelyest kibővített — szimplex táblázatot.

$c_i:$		c_0	c_1	c_2	\dots	c_m	c_{m+1}	\dots	c_k	\dots	c_n	
$d_i:$		d_0	d_1	d_2	\dots	d_m	d_{m+1}	\dots	d_k	\dots	d_n	
	bázis	\mathbf{a}_0	\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\dots	\mathbf{a}_m	\mathbf{a}_{m+1}	\dots	\mathbf{a}_k	\dots	\mathbf{a}_n	
c_1	d_1	\mathbf{a}_1	u_1	1	0	\dots	0	$b_{1,m+1}$	\dots	b_{1k}	\dots	b_{1n}
c_2	d_2	\mathbf{a}_2	u_2	0	1	\dots	0	$b_{2,m+1}$	\dots	b_{2k}	\dots	b_{2n}
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot	\cdot
c_m	d_m	\mathbf{a}_m	u_m	0	0	\dots	1	$b_{m,m+1}$	\dots	b_{mk}	\dots	b_{mn}
	$x_i:$	x	0	0	\dots	0	x_{m+1}	\dots	x_k	\dots	x_n	
	$y_i:$	y	0	0	\dots	0	y_{m+1}	\dots	y_k	\dots	y_n	
	$t_i:$	$\frac{x}{y}$	0	0	\dots	0	t_{m+1}	\dots	t_k	\dots	t_n	

Az ismert adatok elrendezése a táblázatból érthető. Az \mathbf{a}_0 oszlop t_i rovatába az adott bázismegoldásnak megfelelő $v = \frac{x}{y}$ függvényértéket írjuk.

Tekintsük az \mathbf{a}_k vektor pozitív koordinátáit és legyen

$$\min_{(b_{jk} > 0)} \frac{u_j}{b_{jk}} = \delta$$

Eleve feltételeztük, hogy $u_j > 0$, tehát $\delta > 0$. (A degeneráció kérdésére még visszatérünk.)

Mint ismeretes az \mathbf{a}_k vektornak a bázisba való bevonása után az $x(\mathbf{u})$ és $y(\mathbf{u})$ lineáris függvények értéke a következő lesz:

$$x' = x - \delta x_k$$

$$y' = y - \delta y_k.$$

Tehát a bázis-vektor felezésével a v függvény megváltozott értéke:

$$v' = \frac{x - \delta x_k}{y - \delta y_k}.$$

Mármost v' akkor lesz nagyobb mint v , tehát az új bázisra való áttérés akkor jelent a maximumhoz való közeledést, ha

$$\frac{x - \delta x_k}{y - \delta y_k} - \frac{x}{y} > 0,$$

vagyis

$$\frac{\delta(xy_k - yx_k)}{y(y - \delta y_k)} > 0.$$

Tekintetbe véve, hogy a vizsgált esetben

$$y \geq 0$$

$$y - \delta y_k \geq 0$$

és

$$\delta > 0$$

kimondhatjuk: ha olyan pozitív koordinátával is rendelkező a_i vektort vonunk be a bázisba, amelyre vonatkozólag a szimplex táblázat utolsó sorában szereplő t_i érték pozitív,

$$t_i = xy_i - yx_i > 0,$$

akkor a v függvény értéke növekedni fog.

A hiperbolikus programozásnál alkalmazott szimplex eljárás tehát abban áll, hogy a pozitív t_i értékkel rendelkező vektorokat (ha van pozitív koordinátájuk), rendre bevonjuk a bázisba. A számítás menete az összes u_j , b_{ji} , x , y , x_i , y_i értékekre vonatkozóan megegyezik azzal, mint amit a lineáris programozásnál alkalmaznak, kizárólag a $v = \frac{x}{y}$, és a $t_i = xy_i - yx_i$ értékeket kell e speciális formulákkal számítani.

Tekintve, hogy

- a) a csúcspontok száma véges,
- b) minden $t_i > 0$ értékkel jellemzett vektor bevonása növeli a v értékét és
- c) a v függvény valamelyik csúcsponton véges maximumot vesz fel: pozitív t_i értékkel rendelkező vektort vonva be a bázisba véges számú lépés után optimális megoldáshoz kell jutnunk.

Azt a táblázatot, amelyben optimális megoldás szerepel, optimális táblának nevezzük. Az előzőekből következik, hogy optimális tábla csak olyan lehet, amelyben minden $t_i \leq 0$. Az általános feladat tárgyalása során (10. fejt. 2. eset) bizonyítani fogjuk, hogy ez a feltétel elégséges is: minden olyan tábla, amelyben minden $t_i \leq 0$, optimális tábla.

Az egyszerű hiperbolikus programozási feladatnak szimplex módszerrel való megoldásához szükséges műveletek száma csak néhány %-kal haladja meg egy azonos méretű lineáris programozási feladat műveleteinek számát. A digitális számológépekre kidolgozott gép-programokat kis átalakítással alkalmassá lehet tenni hiperbolikus programozásra.

III. Az általános feladat.

7. Meghatározások. Exisztencia tételek

Az általános feladatnál nem tételezzük fel eleve sem azt, hogy az L halmaz korlátos, sem azt, hogy a nevezőnek nincs az L halmazon 0 helye. Az általános feladat tárgyalását az teszi szükségessé, hogy — mint látni fogjuk — bizonyos esetekben az egyszerű feladatra vonatkozó megszorítások hiányában, tehát nem korlátos L halmaz, illetőleg 0-vá változó nevező ellenére is lehet a feladatnak optimális megoldása.

Bocsássuk előre a következő meghatározásokat.

1. Az L halmaz „jó” pontjának nevezzük azt a pontot, ahol

$$\text{vagy } y(u) > 0,$$

$$\text{vagy } y(u) = 0, x(u) < 0.$$

(A 2. fej. c. pont értelmében az L -nek mindig van jó pontja.)

2. Az L halmaz „rossz” pontjának nevezzük azt a pontot, ahol

$$\text{vagy } y(u) < 0,$$

$$\text{vagy } y(u) = 0, x(u) > 0.$$

3. Az L halmaz szinguláris pontjának nevezzük azt a pontot, ahol

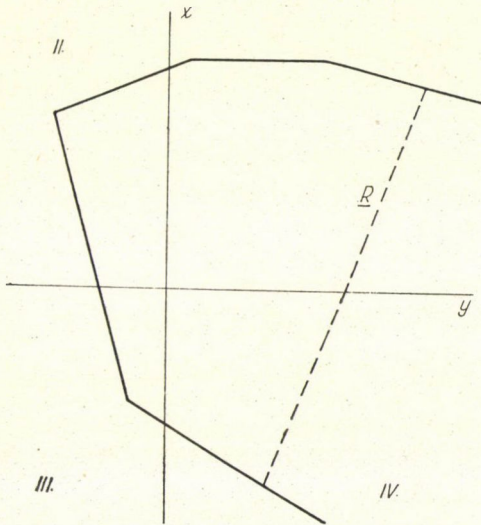
$$y(u) = x(u) = 0.$$

Tehát a 3. fejezetbeli leképezésnél a jó pontok képe az I. és IV. síknegyed belsejébe, az y (vízszintes) tengely pozitív és az x tengely negatív felére; a rossz pontok képe a II. és III. síknegyed belsejébe, az y tengely negatív és az x tengely pozitív felére; a szinguláris pontok képe pedig az origóra esik.

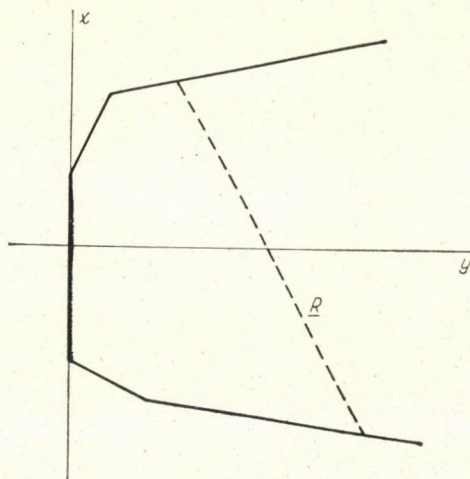
Bizonyítani fogjuk a következő tételeket.

I. Tétel. („Rossz” eset.) *Ha az L halmaznak van rossz pontja, akkor a v függvény felülről nem korlátos, a programozási feladatnak nincs optimális megoldása (2a, b ábra).*

II. Tétel. („Jó” eset.) *Ha az L halmaznak csak jó pontja van és a v függvénynek van véges maximuma az L halmazon, akkor ezt felveszi az L halmaz legalább egy extrémis pontjában (3a, b ábra).*



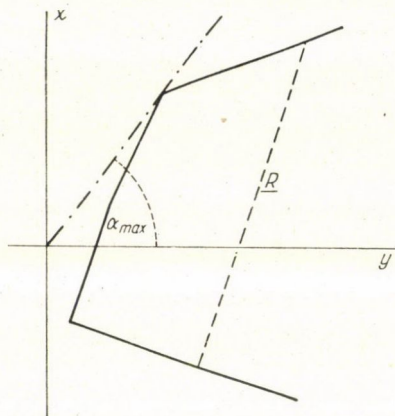
2a. ábra.



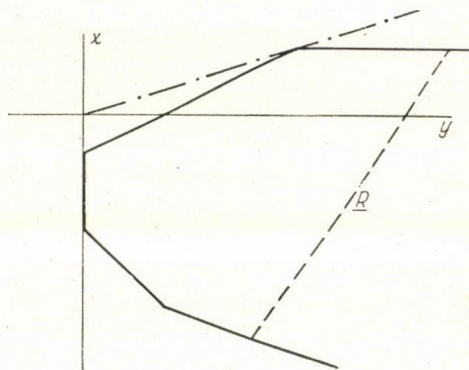
2b. ábra.

III. Tétel. (Szinguláris eset.) Ha az L halmaznak nincs rossz pontja, de van szinguláris pontja (és természetesen jó pontja), akkor van olyan jó pontja, ahol a v függvény véges maximális értéket vesz fel 4a, b ábra).

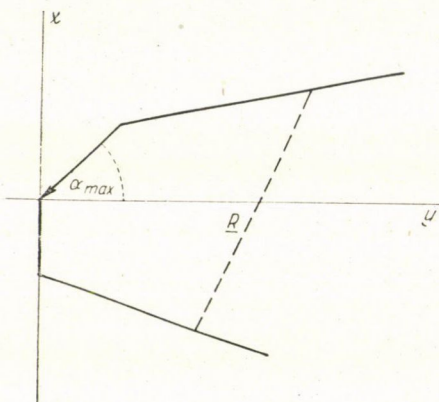
E tételek bizonyítását a következő 8. fejezetben végezzük el. A 9. fejezetben módszert adunk a felsorolt esetek elválasztására. A 10. fejezetben a jó eset, a 11. fejezetben a szinguláris eset megoldását ismertetjük.



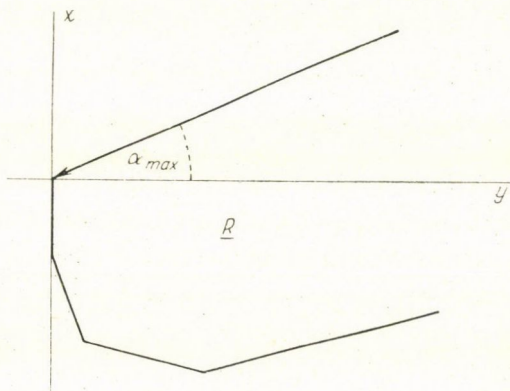
3a. ábra.



3b. ábra.



4a. ábra.



4b. ábra.

8. Az exisztencia tételek bizonyítása

I. Tétel. Rossz eset. A 2. fejezet ab) alatti kikötésből eredően az L halmaz minden rossz pontjához (P_r) tudunk választani olyan jó pontot (P_j), hogy az őket összekötő $\overline{P_r P_j}$ egyenes szakaszon ne legyen szinguláris pont. A $\overline{P_r P_j}$ szakasznak a 3. fejezetben ismertetett síkbeli $\overline{P'_r P'_j}$ képének tehát van az origótól különböző közös P' pontja az x tengellyel. Ha P' az x tengely pozitív felén fekszik, akkor az I. síknegyedben, ha pedig a negatív felén, akkor a III. síknegyedben ki lehet választani a $\overline{P'_r P'_j}$ szakaszon egy olyan P' -höz konvergáló

pontsorozatot, amelynek mentén haladva az iránytangens pozitív értékeken át minden határon túl nő. Tehát a v függvény felülről nem korlátos, a programozási feladatnak nincs megoldása.

A tétel természetesen a geometriai értelmezés felhasználása nélkül közvetlenül is bizonyítható. Ezt a bizonyítást mellőzzük.

II. Tétel. Jó eset. A tétel az 5. fejezetben bizonyított tétel általánosításának tekinthető. Ha ugyanis az L halmaz korlátos voltát nem kötjük ki, akkor a v függvénynek az L halmazon nincs mindig maximuma. Sőt — mint látni fogjuk — a v függvény felülről korlátos volta sem elegendő feltétele a maximum létezésének.

Az L halmaz azon pontjai, amelyekre vonatkozólag $y = 0$, $x < 0$, nem lehetnek optimális pontok. E pontokhoz ugyanis csak az L halmaz olyan pontjain át közeledhetünk, amelyeknek képe a IV. síknegyedben fekszik. Ily módon azonban a v függvény e pontokban csak negatív értékeken át válik végtelenné, tehát itt biztosan nem vesz fel maximális értéket. Következésképpen a II. tételt elegendő az L halmaz azon pontjaira vonatkozólag bizonyítani, amelyekre

$$(8.1) \quad y(u) = d^* u - d_0 > 0.$$

Bizonyítás. Legyenek az L halmaz extrémális pontjai: p_1, p_2, \dots, p_s és e pontok közül a p_h pontban legyen a v értéke e legnagyobb, azaz

$$(8.2) \quad v(p_h) \geq v(p_i) \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Bebizonyítjuk, hogy ha van olyan z pontja az L halmaznak, amelyben a v függvény nagyobb, mint az imént kiválasztott p_h , extrémális pontban, azaz

$$(8.3) \quad v(z) > v(p_h),$$

akkor van olyan \bar{z} pontja is, ahol

$$(8.4) \quad v(\bar{z}) > v(z).$$

z nyilván nem lehet az L halmaznak extrémális pontja. Ebből következik, hogy bármely z ponthoz találhatunk egy p_g extrémális pontot és egy $\alpha > 0$ számot úgy, hogy ha

$$q = z - p_g,$$

akkor

$$\bar{z} = z + \alpha q = (1 + \alpha)z - \alpha p_g$$

is még pontja legyen az L halmaznak.

Azonban

$$(8.5) \quad v(\bar{z}) = \frac{c^* \bar{z} - c_0}{d^* \bar{z} - d_0} = \frac{(1 + \alpha) c^* z - \alpha c^* p_g - c_0}{(1 + \alpha) d^* z - \alpha d^* p_g - d_0} = \frac{(1 + \alpha) x(z) - \alpha x(p_g)}{(1 + \alpha) y(z) - \alpha y(p_g)}.$$

(8.3)-ból és (8.2)-ből következik, hogy

$$v(z) > v(p_g),$$

azaz

$$x(z) y(p_g) > x(p_g) y(z).$$

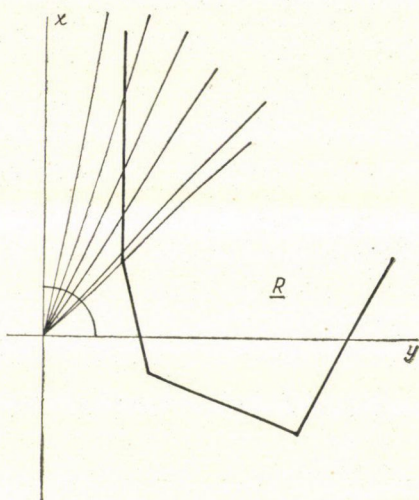
Mindkét oldalt $(-\alpha)$ -val szorozva és $(1 + \alpha) x(z) y(z)$ -t hozzáadva kapjuk

$$x(z) [(1 + \alpha) y(z) - \alpha y(p_g)] < y(z) [(1 + \alpha) x(z) - \alpha x(p_g)].$$

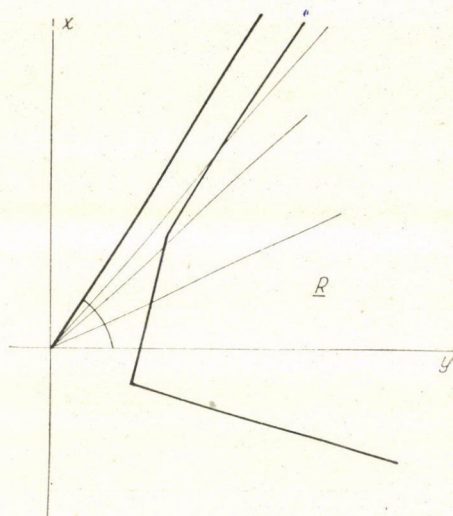
Ebből (8.5)-öt figyelembe véve következik (8.4). Így a tételt bebizonyítottuk.

A tétel a v függvény maximumát illetően három esetet enged meg.

1. A v függvény az L halmazon felveszi maximumát és akkor ezt felveszi L valamelyik extrémális pontjában (3a ábra).



5a. ábra.



5b. ábra.

2. A v függvény az L halmazon felülről nem korlátos (5a ábra).

3. A v függvény az L halmazon felülről korlátos, de maximumát nem veszi fel (5b ábra).

Ezeket az eseteket a 10. fejezetben ismertetendő módon, az extrémális pontok vizsgálata útján meg fogjuk tudni különböztetni.

III. Tétel. Szinguláris eset.

A tételt a 11. fejezetben az optimális megoldás előállításával fogjuk bizonyítani.

9. A megoldás előkészítése. Az esetek szétválasztása

A hiperbolikus programozási feladatot a simplex módszerrel való megoldásra a következő lépésekben készítjük elő:³

1. lépés. A lineáris programozásnál is alkalmazott módszerrel meghatározzunk egy kiinduló megoldást. (Az egyenlőtlenségeket maradékváltozók bevezetésével egyenletekké egészítjük ki, stb.)

³ Ha a feladat jellegéből tudjuk, hogy $\min y > 0$, akkor ezekre az előkészítő műveletekre nincs szükség.

2. lépés. Megvizsgáljuk a kiinduló megoldáshoz tartozó y értéket.

a) Ha y értéke pozitív, áttérünk a 3. lépésre.

b) Ha y értéke negatív, az x és y függvények helyett a $(-x)$ és $(-y)$ függvényekre térünk át és a 3. lépéssel folytatjuk az eljárást.

c) Ha y értéke 0, megvizsgáljuk, hogy valamelyik vektornak a bázisba való bevonásával y értéke növelhető-e. Ha növelhető, az a) pont szerint, ha nem növelhető, csak csökkenthető, a b) pont szerint járunk el. (Ha sem növelhető, sem csökkenthető nem lenne, az az $y = 0$ kizárt esetnek felelne meg.)

3. lépés. Lineáris programozással elkezdjük az y függvény minimumát meghatározni.

a) Ha eközben negatív y értékhez jutunk, az eljárást megszakítjuk, a feladatnak nincs megoldása. (Rossz eset.)

b) Ha $\min y > 0$, akkor áttérünk az 5. lépésre. (Jó eset.)

c) Ha $\min y = 0$, akkor áttérünk a 4. lépésre.

4. lépés. A feladat eredeti feltételi egyenleteit kiegészítjük a

$$d^* u = d_0$$

feltétellel és meghatározzuk lineáris programozással az x függvény maximumát e kibővített feltételek mellett.⁴

a) Ha eközben pozitív x értékhez jutunk, az eljárást megszakítjuk, mivel a feladatnak nincs megoldása. (Rossz eset.)

b) Ha $\max x < 0$, akkor áttérünk az 5. lépésre. (Jó eset.)

c) Ha $\max x = 0$, akkor áttérünk a 11. fejezetben ismertetendő eljárásra. (Szinguláris eset.)

5. lépés. A 3. lépésben végrehajtott lineáris programozási eljárás során minden közbeeső táblázathoz is kiszámítjuk a megfelelő $v = \frac{x}{y}$ értéket. Ha a

3b, vagy 4b esetek állnak fenn, kiinduló táblául célszerű azt választani, amelyikhez a legnagyobb v érték tartozott.

Nagyobb terjedelmű feladatnál a 3. és 4. lépést célszerű elektronikus digitális számológépen végezni.

10. A szimplex módszer alkalmazása az általános feladat „jó” esetének megoldására

A 7. fejezetben szereplő II. tételből következik, hogy optimális pont nyérése érdekében elegendő az L halmaz extrémális pontjait megvizsgálni, tehát a szimplex módszer alkalmazható.

Emlékeztetünk továbbá arra, hogy az egyszerű feladat megoldása szimplex módszerénél (a 6. fejezetben) nem használtuk fel azt a feltevést, hogy az L halmaz korlátos, továbbá az $y > 0$ feltevés helyett csak az enyhébb $y \geq 0$ feltevésre volt szükségünk.

Ez utóbbi ($y \geq 0$) feltevés azonban az általános feladat „jó” esetében is fennáll. Ennek megfelelően a 6. fejezetben ismertetett módszer ez esetben is változtatás nélkül alkalmazható. Csak azt nem tudjuk előre, van-e a feladatnak optimális megoldása. Az eljárás során azonban ez a kérdés is eldől.

⁴ Azaz olyan a_k vektorokat vonunk be rendre a bázisba, amelyekre vonatkozólag $y_k = 0$, $x_k < 0$.

Az eljárás során ugyanis a következő fajta táblázatokat kaphatjuk.

T. 1. A táblázat utolsó sorában van olyan $t_k > 0$, hogy a megfelelő \mathbf{a}_k vektorok rendelkeznek pozitív koordinátával. Ekkor az adott táblázat nem optimális és az eljárást az \mathbf{a}_k vektornak a bázisba való bevonásával tovább folytatjuk.

T. 2. A táblázat utolsó sorában nincs pozitív szám, minden $t_i \leq 0$. Ekkor a v függvény az L halmazon felveszi maximumát és az utolsó megoldás optimális.

T. 3. A táblázat utolsó sorában van $t_k > 0$, de a megfelelő \mathbf{a}_k vektorok valamelyikének nincs pozitív koordinátája. Ekkor a v függvény az L halmazon nem vesz fel maximális értéket, a programozási feladatnak nincs megoldása. Az eljárást megszakítjuk.

Mint látható, e 3 eset teljesen azonos azzal, mint ami a lineáris programozásnál előfordul. Egyetlen különbség, hogy a T. 3. esetben a v függvény lehet felülről korlátos is, míg a megfelelő lineáris függvény nem. (Lásd alább a T. 3. eset taglalását és az 5b sz. ábrát.)

A T. 1. táblával kapcsolatos állításunk nem szorul bizonyításra, következik a 6. fejezetből. Az L halmaz extrémális pontjai véges számából következik, hogy T. 1. típusú tábla csak véges sok lépésben fordulhat elő és utána vagy T. 2., vagy T. 3. típusú táblához kell jutnunk.

T. 2. eset bizonyítása: Tegyük fel, hogy a táblában szereplő

$$\mathbf{u}^* = [u_1, u_2, \dots, u_m, 0, \dots, 0]$$

megoldás először is lehetséges megoldás, azaz

$$(10.1) \quad \sum_{j=1}^m u_j \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_0$$

és a tábla utolsó sorában nincs pozitív szám, azaz

$$(10.2) \quad t_i = x(\mathbf{u}) y_i - y(\mathbf{u}) x_i \leq 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Bebizonyítjuk, hogy ha $\mathbf{z}^* = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ egy tetszés szerinti lehetséges megoldás, azaz

$$(10.3) \quad \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_0,$$

akkor

$$(10.4) \quad v(\mathbf{u}) \geq v(\mathbf{z}),$$

Ugyanis bármelyik \mathbf{a}_i vektor az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ bázison kifejezhető a következőképp

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^m b_{ji} \mathbf{a}_j. \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ezt (10.3)-ba téve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n z_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n z_i \sum_{j=1}^m b_{ji} \mathbf{a}_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n z_i b_{ji} \right) \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_0.$$

Ha ezt (10.1)-el egybevetjük (és tekintetbe vesszük, hogy \mathbf{a}_0 az $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m$ bázison csak egyféleképpen fejezhető ki) azt kapjuk, hogy

$$(10.5) \quad \sum_{i=1}^n z_i b_{ji} = u_j.$$

(10.2)-t szorozzuk z_i -vel és összegezzünk $i = 1$ -től $i = n$ -ig.

$$(10.6) \quad x(\mathbf{u}) \sum_{i=1}^n y_i z_i \leq y(\mathbf{u}) \sum_{i=1}^n x_i z_i$$

$\left(\sum_{i=1}^n y_i z_i\right)$ -t átalakíthatjuk — az y_i definícióját és (10.5)-öt figyelembe véve — a következőképpen:

$$(10.7) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i z_i &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m d_j b_{ji} - d_i \right) z_i = \sum_{j=1}^m d_j \left(\sum_{i=1}^n b_{ij} z_i \right) - \sum_{i=1}^n d_i z_i = \\ &= \left[\sum_{j=1}^m d_j u_j - d_0 \right] - \left[\sum_{i=1}^n d_i z_i - d_0 \right] = y(\mathbf{u}) - y(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Hasonlóképpen

$$(10.8) \quad \sum_{i=1}^n x_i z_i = x(\mathbf{u}) - x(\mathbf{z})$$

(10.7) és (10.8) szerint (10.6)-ba helyettesítve:

$$x(\mathbf{u}) [y(\mathbf{u}) - y(\mathbf{z})] \leq y(\mathbf{u}) [x(\mathbf{u}) - x(\mathbf{z})],$$

azaz

$$(10.9) \quad x(\mathbf{u}) y(\mathbf{z}) \geq y(\mathbf{u}) x(\mathbf{z}).$$

Beláthatjuk, hogy

a) $y(\mathbf{u}) = 0$ nem lehetséges. Ugyanis, ha $y(\mathbf{u}) = 0$, akkor $x(\mathbf{u}) < 0$ és egy negatív t_k -t választva $t_k = x(\mathbf{u}) y_k - y(\mathbf{u}) x_k = x(\mathbf{u}) y_k < 0$ -ból következik

$$y_k > 0.$$

Igy azonban \mathbf{a}_k -t a bázisba bevonva rossz ponthoz jutnánk, márpedig a halmznak nem lehet rossz pontja.

b) Ha $y(\mathbf{u}) \neq 0$, $y(\mathbf{z}) = 0$, akkor $v(\mathbf{z}) = -\infty$ és így (10.4) igaz.

c) Ha $y(\mathbf{u}) \neq 0$ és $y(\mathbf{z}) \neq 0$, akkor (10.9)-ből következik (10.4).

Ezzel a T. 2. esetre vonatkozó állításunkat bebizonyítottuk. A bizonyítás egyben a 6. fejezet utolsó előtti bekezdését is igazolja.

T. 3. eset bizonyítása: A (10.1) alatti feltevést fenntartva tegyük fel, hogy éppen az \mathbf{a}_k vektor ($k \geq m+1$) az, amelyikre vonatkozóan

$$(10.10) \quad t_k = x(\mathbf{u}) y_k - y(\mathbf{u}) x_k > 0,$$

és az \mathbf{a}_k -nak az adott bázison való kifejtésében a koordináták között nincs pozitív, azaz

$$(10.11) \quad \mathbf{a}_k = \sum_{j=1}^m b_{jk} \mathbf{a}_j,$$

ahol

$$(10.12) \quad b_{jk} \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

A (10.11) alatti egyenletet egy, $\lambda > 0$ számmal szorozva és a (10.1) alatti egyenletet hozzáadva, a következő egyenletet nyerjük:

$$\sum_{j=1}^m (u_j - \lambda b_{jk}) \mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_0$$

(10.12)-ra tekintettel $u_j - \lambda b_{ji} > 0$, tehát a következő

$$(10.13) \quad \mathbf{z}^* = [u_1 - \lambda b_{1k}, u_2 - \lambda b_{2k}, \dots, u_m - \lambda b_{mk}, 0, \dots, \lambda, \dots, 0] \quad (k)$$

lehetséges megoldás. Ennek pozitív koordinátái akármilyen nagy értéket felvehetnek, tehát az L halmaz ebben az esetben nem korlátos.

Tekintsük most az x függvény helyettesítési értékét a \mathbf{z} helyen:

$$\begin{aligned} x(\mathbf{z}) &= \sum_{j=1}^m c_j (u_j - \lambda b_{jk}) + \lambda c_k - c_0 = \\ &= \sum_{j=1}^m c_j u_j - c_0 - \lambda \left[\sum_{j=1}^m c_j b_{jk} - c_k \right] = x(\mathbf{u}) - \lambda x_k \end{aligned}$$

$y(\mathbf{z})$ -t hasonlóképpen kifejezve kapjuk:

$$v(\mathbf{z}) = \frac{x(\mathbf{u}) - \lambda x_k}{y(\mathbf{u}) - \lambda y_k}.$$

A $v(\mathbf{z})$ értéke a λ növekedésével növekszik, ugyanis (10.10)-re tekintettel

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = \frac{x(\mathbf{u}) y_k - y(\mathbf{u}) x_k}{[y(\mathbf{u}) - \lambda y_k]^2} > 0.$$

Mivel pedig az

$$y(\mathbf{z}) = y(\mathbf{u}) - \lambda y_k \geq 0$$

egyenlőtlenségnek bármely $\lambda > 0$ értékre állnia kell, következik, hogy

$$y_k \leq 0.$$

a) Ha $y_k = 0$, akkor

$$v(\mathbf{z}) = \frac{x(\mathbf{u}) - \lambda x_k}{y(\mathbf{u})}$$

és (10.10) szerint $[-y(\mathbf{u}) x_k] > 0$, tehát $x_k < 0$. Így λ növekedésével $v(\mathbf{z})$ korlátlanul növekszik.

b) Ha $y_k < 0$, akkor mint könnyen megmutatható

$$v(z) < \frac{x_k}{y_k} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} v(z).$$

Tehát a v függvény az L halmazon felülről korlátos, legkisebb felső korlátja $\frac{x_k}{y_k}$ ⁵, de ezt az értéket az L halmaz egyetlen végesben fekvő pontján sem veszi fel. Ezzel a T. 3. esetre vonatkozó állításainkat igazoltuk.

11. A szinguláris eset megoldása

A szinguláris esetben az L halmaznak van szinguláris pontja, ahol a v törtfüggvény nincs értelmezve, mivel mind a számlálója, mind a nevezője 0-sá válik. Gyakorlati szempontból indokolt az ilyen feladatot is megoldhatónak minősíteni akkor, ha az L halmaz nem szinguláris pontjai között van olyan, ahol a v függvény maximális értéket vesz fel. Azt állítottuk, hogy ha az L halmaznak nincs rossz pontja, akkor mindig van megoldás ebben az értelemben. (Másként úgy is kifejezhetjük állításunkat, hogy a függvénynek a szinguláris pontban ugyan nincs határértéke, de van limes superiorja.)

A szinguláris eset megoldására abból a 9. fejezet 4. lépés c. pontjában nyert táblázatból indulunk ki, amelyben $y = 0$ és $x = 0$. (Szinguláris tábla.) Ebből következik, hogy a szinguláris táblában az utolsó sorban csupa $t_i = 0$ áll. A tábla vizsgálatánál vissza kell nyúlnunk az y_i és x_i értékekhez:

A) A szinguláris tábla az y függvény minimumára nézve optimális tábla, tehát minden $y_i \leq 0$. (De ezek között van $y_k < 0$, mert ellenkezőleg $y \equiv 0$ lenne.)

B) A szinguláris tábla az x függvénynek a $d^*u = d_0$ feltétellel kibővített maximumfeladatára vonatkozólag optimális tábla, tehát minden olyan vektorra, amelyhez $y_k = 0$ érték tartozik, $x_k \geq 0$.

A szinguláris tábláknak két fajtája van.

S. 1. Az $y_k < 0$ értékkel és maximális $\frac{x_k}{y_k}$ hányadossal rendelkező vektorok valamelyikének van pozitív koordinátája. Ezt a vektort vonva be a bázisba, azonnal optimális megoldást kapunk.

S. 2. Az $y_k < 0$ értékkel és maximális $\frac{x_k}{y_k}$ hányadossal rendelkező vektorok egyikének sincs pozitív koordinátája. Egy optimális (nem bázis) megoldás az alább leírandó módon ugyancsak közvetlenül kapunk.

S. 1. eset bizonyítása. A T. 2. esetről bizonyítottuk, hogy egy táblázat nem szinguláris és optimális, ha

$$a., y > 0,$$

és

$$b., t_i \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

⁵ Ha a_k az egyetlen, a T. 3. alatti feltételeknek megfelelő vektor. Ha több ilyen $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_l}$ vektor van, akkor a legkisebb felső korlát: $\max \frac{x_{k_i}}{y_{k_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, l).$

a) Az S. 1. eset feltételeinek megfelelő \mathbf{a}_k vektor bevonása után az új táblázat megváltozott y' értéke pozitív lesz.

$$y' = y - \delta y_k = -\delta y_k > 0.$$

mivel $y_k < 0$. Tehát az új táblázat nem szinguláris.

b) A megváltozott t'_i értékeket a következőképp kapjuk:

$$\left(\delta_i = \frac{b_{gi}}{b_{gk}} \text{ ahol } g \text{ a bázisból kivont vektor indexe} \right)$$

$$t'_i = x' y_i - y' x_i = -\delta x_k (y_i - \delta_i y_k) + \delta y_k (x_i - \delta_i x_k) = -\delta (x_k y_i - y_k x_i).$$

Annak bizonyításául, hogy $t'_i \leq 0$, minden i -re, azt kell megmutatnunk, hogy

$$(11.1) \quad x_k y_i - y_k x_i \geq 0$$

minden i -re, ha csak

$$(11.2) \quad \frac{x_k}{y_k} \geq \frac{x_i}{y_i}$$

minden olyan i -re, amikor az utóbbi tört véges és nem határozatlan (tehát ha maximális $\frac{x_i}{y_i}$ értékkel rendelkező vektort vontunk be).

A (11.1) alatti állítás:

$\alpha)$ $y_i = x_i = 0$ esetben triviális;

$\beta)$ $y_i = 0$, $x_i < 0$ esetet B) alatt kizártuk;

$\gamma)$ $y_i = 0$, $x_i > 0$ esetben $y_k < 0$ miatt igaz;

$\varphi)$ $y_i > 0$ esetben $\frac{x_i}{y_i}$ véges és így (11.1) következik (11.2)-ből.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az adott módon optimális táblázathoz jutottunk.

S. 2. eset bizonyítása. Válasszunk ki egy olyan \mathbf{a}_k ($y_k < 0$; $b_{jk} \leq 0$, $j = 1, 2 \dots m$) vektort, amelyre vonatkozólag $\frac{x_k}{y_k}$ értéke maximális minden

véges $\frac{x_i}{y_i}$ értékhez képest, azaz fennáll (11.2).

Ekkor, mint az S. 1. eset bizonyításánál láttuk, minden i -re igaz.

$$(11.1) \quad x_k y_i \geq y_k x_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tegyük fel, hogy a szinguláris tábla bázisa éppen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_m$ és a benne szereplő megoldás

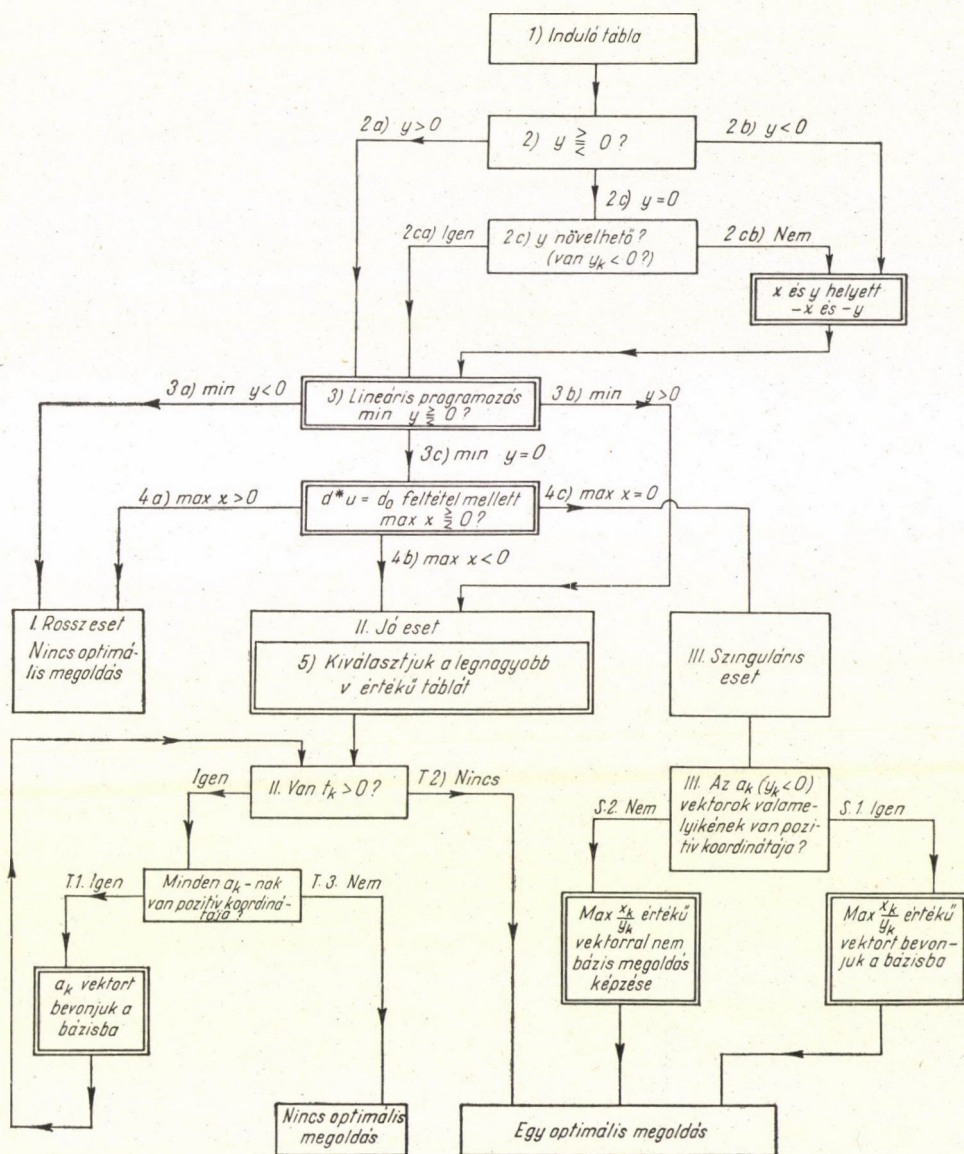
$$\mathbf{s}^* = [s_1, s_2 \dots s_m, 0 \dots 0].$$

Tehát

$$x(\mathbf{s}) = y(\mathbf{s}) = 0.$$

Képezzük most a

$$(11.4) \quad \mathbf{u}^* = [s_1 - \lambda b_{1k}, s_2 - \lambda b_{2k}, \dots, s_m - \lambda b_{mk}, 0 \dots, \lambda, \dots, 0] \quad (k)$$



Az eljárás diagrammja.

megoldást, ahol λ tetszőleges pozitív szám. A T. 3. eset bizonyításánál megmutattuk, hogy az u megoldás lehetséges.

(10.14) mintájára beláthatjuk, hogy

$$(11.3) \quad v(u) = \frac{x(s) - \lambda x_k}{y(s) - \lambda y_k} = \frac{x_k}{y_k}.$$

Most megmutatjuk, hogy az u megoldás optimális is. Azaz ha

$$z^* = [z_1, z_2 \dots z_n]$$

egy tetszőleges lehetséges megoldás, amelyre vonatkozóan

$$y(z) > 0,$$

akkor

$$(11.5) \quad v(u) \geq v(z).$$

Szorozzuk ugyanis a (11.1) egyenlőtlenség mindkét oldalát z_i -vel és összegezzük $i = 1$ -től $i = n$ -ig

$$(11.6) \quad x_k \sum_{i=1}^n y_i z_i \geq y_k \sum_{i=1}^n x_i z_i$$

$\sum_{i=1}^n y_i z_i$ -t átalakíthatjuk a (10.7) mintájára.

$$\sum_{i=1}^n y_i z_i = y(s) - y(z) = -y(z).$$

Hasonló módon

$$\sum_{i=1}^n x_i z_i = -x(z).$$

Tehát (11.6) így alakul

$$-x_k y(z) \geq -y_k x(z).$$

Illetőleg figyelembe véve, hogy $y_k < 0$ és $y(z) > 0$

$$\frac{x_k}{y_k} \geq \frac{x(z)}{y(z)}.$$

Tehát — (11.3)-ra tekintettel — (11.5) igaz, a (11.4) alatti megoldás optimális.

Ezzel bebizonyítottuk az S. 2. esetre vonatkozó állításunkat és egyben megadtuk egy optimális megoldás előállításának módját is. Mindezzel igazolást nyert a III. existencia tétele is.

12. Kiegészítések

Ebben a fejezetben bizonyítás nélkül kiegészítő tájékoztatást, illetőleg megoldást kívánunk adni a hiperbolikus programozás során fellépő néhány problémához.

A degeneráció esete. A degeneráció az A mátrix oszlopvektorai által generált poliédernek és az a_0 vektornak kölcsönös térbeli elhelyezkedésén múlik, az pedig a hiperbolikus programozás esetén sem más, mint a lineáris programo-

zásnál. Feltehető tehát, hogy a CHARNES által kidolgozott perturbációs módszer segítségével [2] általában meg lehet oldani a hiperbolikus programozás során degeneráció miatt fellépő problémákat is. Fel kell hívnunk azonban a figyelmet arra, hogy degeneráció esetén a szinguláris táblák kezelése bonyolultabbá válik, amennyiben a feladat megoldásához esetleg csak több egymást követő szinguláris tábla kiszámítása útján lehet eljutni. Megvizsgálandó még, hogy ez esetben a perturbációs eljárás alkalmas-e a „körbenjárás” elkerülésére.

A kibővített feladat. Abban az esetben, ha az eredeti feltételek között nemcsak

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n - a_{i0} \leq 0$$

alakú egyenlőtlenségek, hanem

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n - a_{i0} = 0$$

alakú egyenletek is szerepelnek, a feladatot

$$A u \leq a_0$$

alakról

$$A u + E \tau = a_0$$

alakra hozzuk. Ily módon könnyen nyerünk induló megoldást és biztosítjuk a kibővített [AE] mátrix sorvektorainak lineáris függetlenségét.

Ily módon azonban a feladat nem az eredeti L halmazon, hanem egy kibővített L' halmazon van értelmezve. Ha a j_1, j_2, \dots, j_l számú sorokban eredetileg egyenletek (és nem egyenlőtlenségek) voltak, akkor ahhoz, hogy optimális megoldást csak az eredeti L halmazon kaphassunk, biztosítani kell azt, hogy az optimális megoldásban

$$\tau_{j_1} = \tau_{j_2} = \dots = \tau_{j_l} = 0$$

legyenek. Ebből a célból a maximálandó függvényt a következő alakra kell hozni

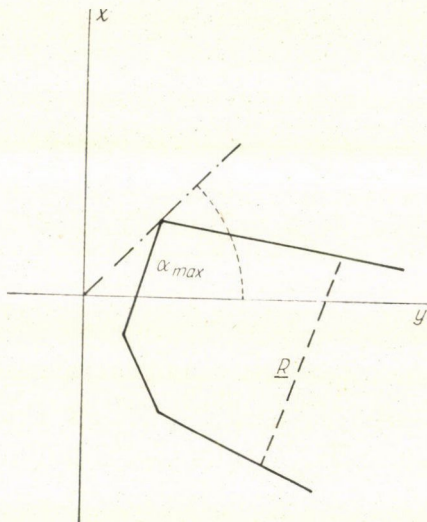
$$v = \frac{c_1 u_1 + c_2 u_2 - \dots + c_n u_n - N \tau_{j_1} - \dots - N \tau_{j_l} - c_0}{d_1 u_1 + d_2 u_2 + \dots + d_n u_n - d_0},$$

ahol N egy igen nagy pozitív szám. Az N numerikus értékének meghatározására — mint a lineáris programozásnál — ezúttal sincs szükség. A simplex táblát viszont két sorral ki kell bővíteni, amelyek N együtthatóját tartalmazzák az x_i , illetőleg a t_i kifejezésekben.

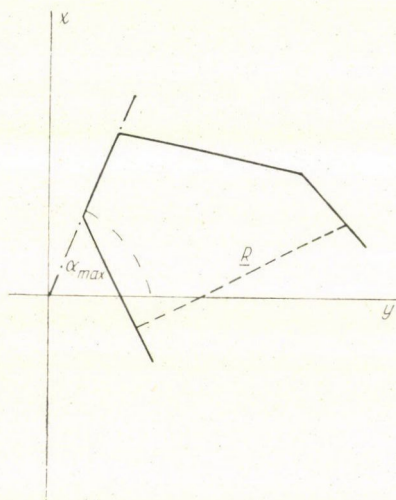
Az összes optimális megoldás. Az összes optimális pontok a hiperbolikus programozásnál olyan konvex halmazt alkotnak, mely véges számú extrémális ponttal rendelkezik. (Az S. 2. szinguláris esetben azonban az optimális pontok halmazához nem tartozik extrémális pont, ugyanis az optimum halmazt részben végtelen távoli pontok, részben szinguláris pontok generálják.)

Az összes optimális megoldások meghatározásának módszerét csak arra az esetre ismertetjük, ha az optimális pontok halmaza korlátos. Ha az ismertendő eljárás során olyan optimális táblához jutunk, amelyben van olyan vektor, amelyre $t_i = 0$ és a koordinátái mind nem pozitívek, akkor az optimális pontok halmaza nem korlátos. Ez a kritérium érvényes akkor is, ha az összes optimális pont meghatározása során szinguláris táblához jutunk. (Az S. 2. esetben, mint tudjuk, az optimum halmaz nem korlátos.) Ha a

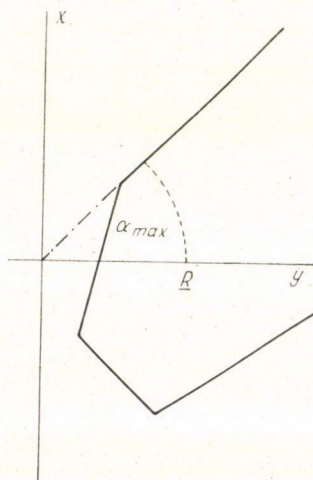
fentiekben leírt eset nem áll elő, akkor az összes optimális pontok halmaza korlátos. Az optimális pontok halmazának extrémális pontjait ez esetben úgy kapjuk meg, hogy egy optimális táblából kiindulva rendre bevonjuk a bázisba mindazokat a vektorokat, amelyekre vonatkozólag $t_i = 0$. Ezenközben kaphatunk szinguláris táblákat is, a továbbiakban ezeket is figyelembe kell venni. Az összes optimális megoldást a leírt módon nyerhető összes táblából vett megoldások konvex lineáris kombinációjaként kapjuk, azzal a megszorítással, hogy nem lehet minden nem szinguláris táblából nyert megoldás együtthatója 0.



6a. ábra.



6b. ábra.



6c. ábra.

Az összes optimális pontok halmazának képe lehet:

- a) az R halmaz egy extrémális pontja (6a. sz. ábra);
- b) az R halmaz két szomszédos extrémális pontját összekötő zárt egyenes szakasz (6b sz. ábra);
- c) Az R halmaz egy extrémális pontjából kiinduló félsugár (6c sz. ábra);
- d) az origót az R halmaz egy extrémális pontjával összekötő félig nyílt szakasz (4a ábra);
- e) az origóból kiinduló nyílt félsugár (4b ábra).

A c) és e) esetek csak akkor állhatnak elő, ha az L halmaz nem korlátos. A d) és e) esetek akkor és csak akkor állnak elő, ha az optimális táblák között van szinguláris.

(Beérkezett: 1959. július 21.)

IRODALOM

- [1] KOOPMANS, T. C.: *Activity Analysis of Production and Allocation*. John Wiley & Sons, N. Y., 1951. Chap. XXI.
- DANTZIG, G. B.: *Maximization of a Linear Function Subject to Linear Inequalities*.
- [2] CHARNES, A., COOPER, W. W., HENDERSON, A.: *An Introduction to Linear Programming*. John Wiley & Sons, N. Y. 1956.
- [3] KREKÓ B., BACSKAY Z.: *Bevezetés a lineáris programozásba*. Közgazdasági és Jogi Kk., Bp. 1957.

HYPERBOLIC PROGRAMMING

MARTOS B.

Abstract

The linear fractional function of an n -vector u

$$v(u) = \frac{c^*u - c_0}{d^*u - d_0}$$

is to be maximized on the set

$$L = \{u \mid Au \leq a_0, u \geq 0\}.$$

This problem, named by the author hyperbolic programming, is solved in this paper by slightly modifying the simplex method. Chapter 6 contains the algorithm suitable to solve the „simple” case, if the set L is bounded and the denominator is positive on the entire set L . The vectors characterized by $t_i > 0$ are to be put into the basis one after another. The number of the operations needed is hardly larger than the same for the similar linear programming problem.

In Chapters 7—11 the problem is discussed in general from the point of view of the existence of a finite maximum. In Chap. 11 a singular case is solved, a case in which enumerator and denominator have common 0-places.

All considerations are interpreted also geometrically by the transformation

$$w = \begin{bmatrix} c^* \\ d^* \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

of the set L on the two dimensional plane.

Some remarks are attached about degeneracy, enlarged problem and all optimal solutions.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В. MARTOS

Резюме

Ищем максимум линейной дробной функции вектора u n компонентов

$$v(u) = \frac{c^* u - c_0}{d^* u - d_0}$$

на множестве

$$L = \{u \mid Au \leq a_0, a \geq 0\}.$$

Эта задача, которую автор называет гиперболическим программированием, решена в статье с помощью несколько измененного симплексного метода. Глава II п. 6 содержит алгоритм, подходящий для решения той простой задачи, когда множество L ограничено и знаменатель на всем множестве L положителен. Нужно ввести в базис последовательно те вектора, для которых $t_i > 0$. Число необходимых действий еще больше, чем у подобных задач линейного программирования.

Глава III рассматривает задачу в общности, с точки зрения существования конечного максимума. П. 11 содержит решение сингулярного случая, когда числитель и знаменатель имеют общий корень.

Все рассмотренные проблемы геометрически иллюстрирует следующее соответствие множества L на плоскость двух измерений:

$$w = \begin{bmatrix} c^* \\ d^* \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}.$$

Статья заканчивается с некоторыми замечаниями о дегенерации, о расширенной задаче и о всех оптимальных решениях.

A STACIONÁRIUS FOLYAMATOK EGY TEXTILIPARBAN HASZNÁLATOS JELLEMZŐJE

TANKÓ JÓZSEF¹

Bevezetés

A textilipari tudományos kutatásban és annak irodalmában a stacionárius folyamatok elméletének egyes fejezeteit és a folyamatok bizonyos jellemzőit igen gyakran használják. Főként fonodai termékek egyenetlenségi tulajdonságainak vizsgálatában használnak sok olyan fogalmat és jellemzőt, amelyek a stacionárius folyamatok jellemzőivel kapcsolatosak, vagy sokszor azzal megegyeznek. Általában a fonodai termékeknek minden keresztmetszet szerint alakuló jellemzőjére teljesülnek a gyakorlatban azok a feltételek, amelyek biztosítják, hogy azt stacionárius folyamat realizációjaként tekinthessük. A leggyakrabban vizsgált ilyen tulajdonságok:

A keresztmetszeben levő száلكeresztmetszetek száma.

A keresztmetszet területe.

Az ún. keresztmetszeti tömeg, mely alatt

$$g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

határértéket értik, ahol $g(t + \Delta t)$ a $(t, t + \Delta t)$ termékdarab súlya. $g(t)$ helyett a gyakorlatban sokszor valamilyen elég kis hosszegységet használva, az egységnyi darabok súlyát veszik.

Ezenkívül más, pl. a keresztmetszeti tömeggel arányos jellemzők.

Hogy e jellemzők stacionárius folyamatok realizációjaként foghatók fel, a gyártási folyamat jellegéből következik. A kutatók különféle felépítésű elméleti modelleket konstruáltak a fonodai termékek egyes fajtáira. Többféle, stacionárius folyamatot előállító modellnél a valóságos termékkel jó megegyezést kaptak (l. pl. [8–11]).

Igy természetes, hogy a fonodai termékek jellemzésére használt fogalmak legtöbbször megfelelőt a stacionárius folyamatok elméletében szintén megtaláljuk, vagy ugyancsak definiálhatjuk.

A fonodai termék finomságát jellemző, annak átlagos vastagságával arányos mennyiségek a stacionárius folyamat várható értékével kapcsolatosak. A fonodai termékek egyenetlenségi mértékeként használatos ún. „teljes variancia” nem más, mint az általa realizált stacionárius folyamat második momentumának (szórásnégyzet) becslése. A *korrelogram* a stacionárius folyamat kor-

¹ Textilipari Kutató Intézet.

reláció-függvényével, a *spektrogram* a folyamat spektrális sűrűségfüggvényével azonos.

Használunk azonban a textilszakemberek a fonodai termékek jellemzésére olyan fogalmakat is, amelyeket a stacionárius folyamatok elméletében nem szoktak tárgyalni. Ezeket a fogalmakat a textiliparban „hossz-egyenlőtlenség”, vagy „hossz-variancia” néven ismerik. A fogalmakat először, mint empirikus fogalmakat írták le és definícióit csak a mérési és számítási utasítások tartalmazták. A fogalmak, mint empirikus fogalmak is, csak egy-két évtizede használatosak. Ma már azonban hasznosságuk folytán használatuk annyira elterjedt és általános, hogy hasznosnak mutatkozik elméleti megfogalmazásuk is. Ezzel több textilipari tudományos kutató próbálkozott több-kevesebb sikerrel, azonban egyikőjük sem végezte el a fogalmak beillesztését a stacionárius folyamatok elméletébe (l. pl. [4]). Tudomásom szerint a matematikusok is csak statisztikai szempontból végeztek vizsgálatokat (l. pl. [1] és annak irodalmi hivatkozásait), melyek tulajdonképpen az empirikus fogalom matematikai statisztikai értékelésével foglalkozik és az empirikus fogalom nem azonos az elméleti fogalommal, amelyet e cikkben tárgyalni kívánunk.

E cikk célja az ún. „hossz-variancia” fogalmak tisztán matematikai definíciója a stacionárius folyamatok elméletébe beillesztve.

Az 1. §-ban definiáljuk a stacionárius folyamatot és még néhány szükséges fogalmat, továbbá néhány ismert tételt idézünk, amelyekre a későbbi tárgyalásban szükségünk lesz. A 2. §-ban az ún. mozgó átlag fogalmát definiáljuk, amelyre a 3. §-ban lesz szükség az „általános hossz-variancia” definíciójához és bizonyos formulák levezetéséhez. A 4. §-ban az ún. „belső- és külső-variancia” fogalmakat definiáljuk, az 5. §-ban a „hossz-variancia” fogalmak egy összefüggésének feltételére vonatkozó tételt bizonyítunk. A 6. § a „hossz-varianciák” összefüggéseinek összefoglalását és azoknak a stacionárius folyamat többi jellemzőivel való összefüggését tartalmazza, míg a 7. §-ban néhány példa szerepel korrelogram, spektrogram és belső-variancia görbére.

1. §. Szükséges fogalmak, tételek és feltevések

Az alább következő definíciók és tételek megtalálhatók [5] cikkben és [12–14] könyvekben, így később a hivatkozásokat mellőzni fogjuk és a tételek bizonyítását elhagyjuk.

1.1. Definíció. Sztochasztikus folyamat.

Sztochasztikus folyamatnak nevezzük valamely $\Omega = \{\omega\}$ elemi eseménytérén értelmezett valószínűségi változók egyparaméteres $\xi(t, \omega)$ sokaságát, $T = \{t\}$ paraméterhalmazt megadva. Jelölése

$$\{\xi(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}.$$

A következőkben csak valós értékű folyamatra szorítkozunk.

1.2. Definíció. Realizáció.

$\{\xi(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ sztochasztikus folyamat minden rögzített értékénél definiálja t -nek egy valós függvényét. E közönséges függvényeket a folyamat realizáció függvényeinek, vagy röviden realizációinak nevezzük.

A következőkben feltételezzük, hogy $T = \{-\infty < t < \infty\}$ a paraméterter és a sztochasztikus folyamatot egyszerűen $\xi(t)$ -vel, realizációját pedig $X(t)$ -vel fogjuk jelölni. $X(t)$ tehát egy valós értékű valós változós függvény.

Valamely $\xi(t)$ sztochasztikus folyamat megadásának egyik módja az, hogy megadják minden n természetes számhoz és mint T -beli t_1, \dots, t_n paraméter n -eshez $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ valószínűségi változók együttes n -dimenziós eloszlását.

$$F_{t_1, \dots, t_n}(y_1, \dots, y_n) = \mathbf{P}(\xi(t_i) < y_i, i = 1, \dots, n)$$

valószínűségeket $-\infty < y_i < \infty, i = 1, \dots, n$ valós értékekre. Ezen eloszlásfüggvényeknek ki kell elégíteniök bizonyos feltételeket.

1.3. Definíció. Momentumok.

Szükségünk lesz a következő momentumokra:

$$(1.3.1) \quad m(t_i) = \mathbf{M}\{\xi(t_i)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y d_y F_{t_i}(y), \quad i = 1, \dots, n$$

a $\xi(t)$ várható értéke a t_i helyen, feltéve, hogy a szereplő integrál létezik. $\xi(t)$ vegyes második centrális momentuma,

$$(1.3.2) \quad \mathbf{M}[(\xi(t_1) - m(t_1))(\xi(t_2) - m(t_2))] = R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^+ \int_{-\infty}^{\infty} (y_1 - m(t_1))(y_2 - m(t_2)) d_{y_1 y_2}^2 F_{t_1 t_2}(y_1, y_2)$$

kétváltozós függvény $\xi(t)$ kovariancia-függvénye és $\xi(t)$ tiszta második centrális momentuma, a

$$(1.3.3) \quad \mathbf{M}[(\xi(t) - m(t))^2] = \sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m(t))^2 d_y F_{t_i}(y)$$

egyváltozós függvény $\xi(t)$ variancia-függvénye és végül

$$(1.3.4) \quad r(t_1, t_2) = \frac{R(t_1, t_2)}{\sigma(t_1) \sigma(t_2)}$$

kétváltozós függvény $\xi(t)$ korrelációfüggvénye vagy korrelogramja.

1.4. Definíció. Konvergencia fogalmak.

$\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ valószínűségi változók sorozatáról azt mondjuk, hogy négyzetes középben ξ valószínűségi változóhoz tart, ha $n \rightarrow \infty$, jelölésben

$$\text{l.i.m}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi,$$

ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}\{[\xi - \xi_n]^2\} = 0$$

és azt mondjuk, hogy 1 valószínűséggel tart ξ -hez, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$$

majdnem minden ω -ra.

1.5. Definíció. Folytonosság.

$\xi(t)$ sztochasztikus folyamatot egy valószínűséggel folytonosnak nevezük, ha

$$(1.5.1) \quad \lim_{s \rightarrow t} \xi(s) = \xi(t)$$

1 valószínűséggel és négyzetes középben folytonosnak, ha

$$(1.5.2) \quad \text{l.i.m}_{s \rightarrow t} \xi(s) = \xi(t).$$

1.6. Definíció. Sztochasztikus integrál.

Legyen $\xi(t)$ sztochasztikus folyamat mérhető és A a T -nek mérhető részhalmaza, akkor

$$(1.6.1) \quad I(A) = \int_A \xi(t) dt$$

integrált, mely szintén valószínűségi változó, sztochasztikus integrálnak nevezük és a következőképpen definiáljuk: $I(A)$ valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek a $\xi(t)$ lehetséges realizációi mentén vett közöséges Lebesgue integrálok.

1.1. Tétel. Ha a $\xi(t)$ sztochasztikus folyamatra igaz, hogy

- a) realizációi balról folytonosak,
 - b) négyzetes középben folytonos,
- akkor $\xi(t)$ folyamat
- a) 1 valószínűséggel folytonos,
 - b) mérhető.²

1.2. Tétel. Az integrál és várható érték felcserélhetősége.

Ha $\xi(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat két változójának mérhető függvénye, akkor a folyamat majdnem mind $x(t)$ realizációja mérhető, ha $\mathbf{M}\{\xi(t)\}$ létezik minden $t \in T$ -re, ez t -nek Lebesgue-mérhető függvénye és ha $A \subset T$ Lebesgue-mérhető halmazon

$$\int_A \mathbf{M}\{|\xi(t)|\} dt < \infty,$$

akkor A halmazon majdnem minden realizáció Lebesgue-integrálható és

$$\mathbf{M}\left\{\int_A \xi(t) dt\right\} = \int_A \mathbf{M}\{\xi(t)\} dt.$$

Az 1. 1. tétel a) és b) feltételei biztosítják 1.2. tétel fennállását.

² A mérhetőséget a t -szerinti Lebesgue- és az ω -szerinti valószínűségi mérték direkt szorzata szerint kell érteni.

1.7. Definíció. Szűkebb értelemben stacionárius folyamat.

$\xi(t)$ sztochasztikus folyamatot szűkebb értelemben stacionárius folyamatnak nevezünk, ha n -dimenziós eloszlásai invariánsak t_1, \dots, t_n T -beli együttes eltolásával szemben, vagyis

$$F_{t_1+\tau, \dots, t_n+\tau}(y_1, \dots, y_n) = F_{t_1, \dots, t_n}(y_1, \dots, y_n)$$

minden n -re és $-\infty < \tau, t_1, \dots, t_n < \infty$ értékekre.

1.3. Tétel. Stacionárius folyamat momentumai.

Ha $\xi(t)$ szűkebb értelemben stacionárius folyamatnak léteznek momentumai, azok t -nek eggyel kevesebb-változós függvényei, mint nem-stacionárius esetben.

Speciálisan $t_1 = t$ és $t_2 = t + \tau$ választásával

$$R(t_1, t_2) = R(\tau),$$

ha létezik, azaz csak egy változó függvénye.

Ugyanekkor

$$\sigma^2(t) = \sigma^2$$

és

$$m(t) = m$$

konstansok, ha léteznek.

1.4. Tétel. Stacionárius folyamat függvényei.

Ha $\xi(t)$ szűkebb értelemben stacionárius folyamat, melynek első és második momentumai léteznek, akkor $\xi(t)$ alábbi függvényei is szűkebb értelemben stacionáriusak, továbbá, ha $\xi(t)$ -re 1.1. tétel a), b) feltételei teljesülnek, akkor e feltételek teljesülnek $\xi(t)$ következő típusú függvényeire is:

$$\gamma_1(t) = \xi(t) - \eta,$$

ahol η tetszőleges valószínűségi változó,

$$\gamma_2(t) = \xi^2(t),$$

$$\gamma_3(t) = \xi(t) \xi(t + \tau), \quad -\infty < \tau < \infty,$$

és

$$\gamma_4(t) = \int_t^{t+\tau} \xi(u) du, \quad -\infty < \tau < \infty.$$

A tétel könnyen igazolható és a tétel állítását a későbbi §-okban ki fogjuk használni.

1.8. Definíció. Tágabb értelemben stacionárius folyamat.

Ha $\xi(t)$ sztochasztikus folyamatnál $m(t)$, $\sigma^2(t)$ léteznek és

$$(1.8.1) \quad m(t) = m,$$

$$(1.8.2) \quad \sigma^2(t) = \sigma^2$$

konstansok, továbbá

$$(1.8.3) \quad R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$$

csak a két változó különbségétől függ, akkor $\xi(t)$ folyamatot tágabb értelemben stacionárius folyamatnak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy ha $\xi(t)$ szűkebb értelemben stacionárius és (1.8.1), (1.8.2) léteznek, akkor tágabb értelemben is stacionárius, de fordítva nem következik tágabb értelemben vett stacionaritásból a szűkebb értelemben vett stacionaritás. Gauss-folyamatnál, vagyis amikor minden t_1, t_2, \dots, t_n esetén a $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ változók együttes eloszlása normális, a stacionaritás két definíciója azonban ekvivalens.

1.5. Tétel. Kovariancia függvény folytonossága.

Ha $\xi(t)$ folyamat tágabb értelemben stacionárius és ha

$$1.5.1) \quad \lim_{s \rightarrow t} \xi(s) = \xi(t),$$

akkor $R(\tau)$ kovariancia-függvény mindenütt folytonos. Ha $R(\tau)$ a $\tau = 0$ -ban folytonos, akkor $R(\tau)$ mindenütt folytonos és (1.5.1) igaz.

1.6. Tétel. $R(\tau)$ tulajdonságai.

Ha $R(\tau)$ egy stacionárius folyamat kovariancia-függvénye, akkor igazak a következők:

1. $R(-\tau) = R(\tau)$,
2. $R(0) = \sigma^2$,
3. $|R(\tau)| \leq R(0)$,
4. ha $\xi(t)$ négyzetes középben folytonos, akkor $R(\tau)$ pozitív definit, vagyis folytonos és bármely $N; \{t_1, \dots, t_N\} \in T; \alpha_1, \dots, \alpha_N$ valós számokra

$$\sum_{m,n=1}^N R(t_m - t_n) \alpha_n \alpha_m \geq 0,$$

5. mivel $R(\tau)$ pozitív definit és folytonos, következik, hogy

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda \tau d\tilde{G}(\lambda)$$

vagy akár

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \lambda \tau \tilde{F}(\lambda),$$

ahol $\tilde{G}(\lambda)$ és $\tilde{F}(\lambda)$ monoton nem-esökkenő, korlátos függvények,

6. ha még az is igaz, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$, akkor $\tilde{G}(\lambda)$ és $\tilde{F}(\lambda)$ folyto-

nosan differenciálhatók, vagyis $R(\tau)$ előállítható:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda \tau \cdot \tilde{g}(\lambda) d\lambda$$

vagy akár

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \lambda \tau \cdot \tilde{f}(\lambda) d\lambda$$

alakban, ahol

$$\tilde{g}(\lambda) = [\tilde{G}(\lambda)]' \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

$$\tilde{f}(\lambda) = [\tilde{F}(\lambda)]' \quad 0 \leq \lambda < \infty,$$

továbbá

$$\tilde{g}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda \tau \cdot R(\tau) d\tau \quad -\infty \leq \lambda < \infty$$

és

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda \tau \cdot R(\tau) d\tau \quad 0 \leq \lambda < \infty.$$

1.9. Definíció. Spektrogram.

Ha $\tilde{g}(\lambda)$ és $\tilde{f}(\lambda)$ függvények $\xi(t)$ -nél léteznek, akkor

$$(1.9.1) \quad g(\lambda) = \frac{\tilde{g}(\lambda)}{\sigma^2} \quad -\infty < \lambda < \infty$$

és

$$(1.9.2) \quad f(\lambda) = \frac{\tilde{f}(\lambda)}{\sigma^2} \quad 0 \leq \lambda < \infty$$

függvényeket $\xi(t)$ stacionárius folyamat spektrális sűrűség függvényeinek vagy spektrogramjainak nevezzük.

Az előző tételből következik, hogy $g(\lambda)$ és $f(\lambda)$ az $r(\tau)$ korrelogrammal a következőképpen fejezhető ki

$$(1.9.3) \quad g(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda \tau \cdot r(\tau) d\tau, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

$$(1.9.4) \quad f(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda \tau \cdot r(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \lambda < \infty.$$

Míg $g(\lambda)$ a $-\infty < \lambda < \infty$ számegyenesen értelmezett függvény, $f(\lambda)$ a $0 \leq \lambda < \infty$ félegyenesen van értelmezve és ott $f(\lambda) = 2g(\lambda)$. Mindkettő a saját

értelmezési tartományán sűrűségfüggvény, azaz $g(\lambda) \geq 0$, $-\infty < \lambda < \infty$ és $f(\lambda) \geq 0$, $0 \leq \lambda < \infty$, továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda = 1.$$

1.7. Tétel. Ergodikus tulajdonság.

Tegyük fel, hogy $\xi(t)$ szűkebb értelemben stacionárius folyamat, melynek első két momentuma létezik és $R(\tau) \rightarrow 0$, ha $\tau \rightarrow \infty$.

Ekkor

$$m = \mathbf{M}\{\xi(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt$$

1 valószínűséggel, vagyis majdnem minden realizációra.

E tételt ergod-tétel néven használják és bizonyítással együtt megtalálható pl. (13)-ban.

Természetesen $\xi(t)$ folyamat 1.4. tételben szereplő függvényeire is átalánosítható a tétel, amikor is a feltételeket e stacionárius folyamatokra kell kikötni.

Feltételezések. Tegyük fel az egész további tárgyalás folyamán, hogy a következő feltételezések teljesülnek:

F1. $\xi(t)$ mindig $-\infty < t < \infty$ paraméterterén értelmezett valós értékű szűkebb értelemben stacionárius folyamatot jelöl és $x(t)$ ennek egy realizációja.

F2. $\mathbf{M}\{\xi(t)\} = m$; $\mathbf{M}\{[\xi(t) - m]^2\} = \sigma^2$.

és

$$\mathbf{M}\{[\xi(t) - m][\xi(t + \tau) - m]\} = R(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty$$

momentumok léteznek, azaz $\xi(t)$ tágabb értelemben is stacionárius.

F3. $\xi(t)$ realizációi balról folytonosak.

F4. $\xi(t)$ négyzetes középben folytonos.

F5. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$.

F6. $\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy e feltételek mellett az előzőleg szereplő tételek feltételei teljesülnek, így módon a tételek állításai igazak. Vagyis $\xi(t)$ -re még teljesül, hogy

- a) mérhető,
- b) 1 valószínűséggel folytonos,
- c) sztochasztikusan integrálható bármely véges intervallumon,
- d) integrálás és várható érték-képzés sorrendje felcserélhető,
- e) $R(\tau)$ folytonos,
- f) $f(\lambda)$ és $g(\lambda)$ spektrális sűrűség-függvények léteznek,
- g) a $\xi(t)$ 1.4. tételbeli függvényei szintén szűkebb értelemben stacionáriusak és azokra is igaz az 1.1. tétel.

2. §. Az egyszeres és kétszeres mozgó átlag és jellemzői

A „hossz-variancia” fogalmak definíciójában szükségünk lesz az alább definiált két fogalomra.

2.1. Definíció. Defináljuk a következő folyamatot:

$$(2.1) \quad \xi_l(u) = \frac{1}{l} \int_u^{u+l} \xi(s) ds$$

ahol $0 \leq l < \infty$ és az integrál (1.6) szerinti sztochasztikus integrál. $\xi_l(u)$ folyamatot $\xi(t)$ mozgó átlagának nevezzük. Az 1.4. tétel szerint ez is egy szűkebb értelemben stacionárius folyamat, melyre az 1. § végén adott F1–F6. feltevések teljesülnek.

2.1. Tétel. $\xi_l(u)$ és $\xi(t)$ jellemzői között fennállnak a következő összefüggések:

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{M}\{\xi_l(u)\} &= m_l = m, \\ \mathbf{M}\{[\xi_l(u) - m_l]^2\} &= \sigma_l^2 = \frac{2\sigma^2}{l^2} \int_0^l (l - \tau') r(\tau') d\tau' \\ \frac{1}{\sigma_l^2} \mathbf{M}\{[\xi_l(u) - m_l][\xi_l(u + \tau_1) - m_l]\} &= r_l(\tau_1) = \\ &= \frac{\sigma^2}{l^2 \sigma_l^2} \int_0^l (l - \tau') [r(\tau_1 - \tau') + r(\tau_1 + \tau')] d\tau' \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda_1 \tau_1 \cdot r_l(\tau_1) d\tau_1 &= f_l(\lambda_1) = \frac{\sigma^2}{\sigma_l^2} \left[\frac{\sin \frac{\lambda_1 l}{2}}{\frac{\lambda_1 l}{2}} \right]^2 f(\lambda_1). \end{aligned} \right.$$

Bizonyítás. Az 1.2. és 1.4. tételek értelmében a következőkben a várható érték és integrál felcserélhető. (2.1) alapján

$$m_l = \mathbf{M} \left\{ \frac{1}{l} \int_u^{u+l} \xi(s) ds \right\} = \frac{1}{l} \int_u^{u+l} \mathbf{M}\{\xi(s)\} ds = \frac{1}{l} \int_u^{u+l} m ds = m.$$

Határozzuk meg először $R_l(\tau_1) = \sigma_l^2 \cdot r_l(\tau_1)$ kovariancia-függvényt.

$$\begin{aligned} R_l(\tau_1) &= \mathbf{M} \left\{ \left[\frac{1}{l} \int_u^{u+l} \xi(s) ds - m \right] \left[\frac{1}{l} \int_{u+\tau_1}^{u+\tau_1+l} \xi(t) dt - m \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{l^2} \int_u^{u+l} \int_{u+\tau_1}^{u+\tau_1+l} R(s-t) dt ds, \end{aligned}$$

$s = s$ és $s - t = \tau$ helyettesítéssel

$$= \frac{1}{l^2} \int_u^{u+l} ds \int_{u+\tau_1-s}^{u+\tau_1+l-s} R(\tau) d\tau,$$

az integrációs tartományt felbontva és az integrálások sorrendjét felcserélve,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{l^2} \int_{\tau_1-l}^{\tau_1} R(\tau) d\tau \int_{u+\tau_1-\tau}^{u+l} ds + \frac{1}{l^2} \int_{\tau_1}^{\tau_1+l} R(\tau) d\tau \int_u^{u+l+\tau_1-\tau} ds = \\ &= \frac{1}{l^2} \int_{\tau_1-l}^{\tau_1} (l - \tau_1 + \tau) R(\tau) d\tau + \frac{1}{l^2} \int_{\tau_1}^{\tau_1+l} (l + \tau_1 - \tau) R(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

az első integrálban $\tau_1 - \tau = \tau'$ a másodikban $\tau - \tau_1 = \tau'$ helyettesítéseket végezve

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{l^2} \int_0^l (l - \tau') R(\tau_1 - \tau') d\tau' + \frac{1}{l^2} \int_0^l (l - \tau') R(\tau_1 + \tau') d\tau' = \\ &= \frac{\sigma_l^2}{l^2} \int_0^l (l - \tau') [r(\tau_1 + \tau') + r(\tau_1 - \tau')] d\tau'. \end{aligned}$$

Minthogy $R_l(0) = \sigma_l^2$ és $r(-\tau') = r(\tau')$,

$$\sigma_l^2 = \frac{2\sigma_l^2}{l^2} \int_0^l (l - \tau') r(\tau') d\tau'$$

és mivel

$$r_l(\tau_1) = \frac{R_l(\tau_1)}{\sigma_l^2},$$

következik $r_l(\tau_1)$ (2.2) alatti formulája is.

Könnyen belátható, hogy F6. feltétel $R_l(\tau)$ -ra is teljesül, ezért (1.9.3) formula alapján

$$g_l(\lambda_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_l(\tau_1) \cos \lambda_1 \tau_1 d\tau_1, \quad -\infty < \lambda_1 < \infty.$$

A már bizonyított $r_l(\tau_1)$ képletet behelyettesítve

$$\begin{aligned} g_l(\lambda_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_l^2}{l^2 \sigma_l^2} \int_0^l (l - \tau') [r(\tau_1 + \tau') + r(\tau_1 - \tau')] \cos \lambda_1 \tau_1 d\tau' d\tau_1 = \\ &= \frac{\sigma_l^2}{l^2 \sigma_l^2} \int_0^l (l - \tau') \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau_1 + \tau') \cos \lambda_1 \tau_1 d\tau_1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau_1 - \tau') \cos \lambda_1 \tau_1 d\tau_1 \right] d\tau', \end{aligned}$$

a belső első integrálban $\tau_1 + \tau' = \tau$, a másodikban $\tau_1 - \tau' = \tau$ helyettesítést végezve és a két belső integrált összevonva

$$= \frac{\sigma^2}{l^2 \sigma_l^2} \int_0^l (l - \tau') \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) [\cos \lambda_1 (\tau - \tau') + \cos \lambda_1 (\tau + \tau')] d\tau \right\} d\tau',$$

felhasználva, hogy $\cos(a - \beta) + \cos(a + \beta) = 2 \cos a \cos \beta$,

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \sigma^2}{l^2 \sigma_l^2} \int_0^l (l - \tau') \cos \lambda_1 \tau' \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \cos \lambda_1 \tau d\tau \right\} d\tau' = \\ &= \frac{2 \sigma^2}{l^2 \sigma_l^2} g(\lambda_1) \int_0^l (l - \tau') \cos \lambda_1 \tau' d\tau'. \end{aligned}$$

Parciálisan integrálva

$$\begin{aligned} \int_0^l (l - \tau') \cos \lambda_1 \tau' d\tau' &= (l - \tau') \frac{\sin \lambda_1 \tau'}{\lambda_1} \Big|_0^l + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^l \sin \lambda_1 \tau' d\tau' = \\ &= \frac{1 - \cos \lambda_1 l}{\lambda_1^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{\lambda_1 l}{2}}{\lambda_1^2}. \end{aligned}$$

A kapott eredményt behelyettesítve

$$g_l(\lambda_1) = \frac{2 \sigma^2}{l^2 \sigma_l^2} g(\lambda_1) \frac{2 \sin^2 \frac{\lambda_1 l}{2}}{\lambda_1} = \frac{\sigma^2}{\sigma_l^2} \left[\frac{\sin \frac{\lambda_1 l}{2}}{\frac{\lambda_1 l}{2}} \right]^2 g(\lambda_1) \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Így az 1.9. definíciót követő megjegyzés értelmében, mely szerint $f(\lambda) = 2g(\lambda)$ $0 \leq \lambda < \infty$, adódik

$$f_l(\lambda_1) = \frac{\sigma^2}{\sigma_l^2} \left[\frac{\sin \frac{\lambda_1 l}{2}}{\frac{\lambda_1 l}{2}} \right]^2 f(\lambda_1) \quad 0 \leq \lambda_1 < \infty.$$

Ezzel 2.1. tétel (2.2) formuláit bebizonyítottuk.

2.2 Definíció. Játssza most $\xi(t)$ szerepét $\xi_l(u)$ és definiáljuk ennek mozgó átlagát

$$(2.3) \quad \xi_{l,L}(v) = \frac{1}{L} \int_v^{v+L} \xi_l(u) du$$

folyamatot, ahol $0 \leq L < \infty$, az integrál a (2.1)-hez hasonlóan értendő és ezt $\xi(t)$ kétszeres mozgó átlagának nevezzük.

$\xi_l(u)$ -hoz hasonlóan $\xi_{l,L}(v)$ is egy szűkebb értelemben stacionárius folyamat bármely $0 \leq l < \infty$, $0 \leq L < \infty$ paraméterekre, továbbá $\xi_{l,L}(v)$ -re is teljesülnek F1–F6. feltételek.

2.2. Tétel. $\xi_{l,L}(v)$ és $\xi(t)$ jellemzői között fennállnak a következő összefüggések :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{l,L} = m, \\ \sigma_{l,L}^2 = \frac{2\sigma^2}{l^2 L^2} \int_0^L (L - \tau_1) \int_0^l (l - \tau') [r(\tau_1 + \tau') + r(\tau_1 - \tau')] d\tau' d\tau_1, \\ r_{l,L}(\tau_2) = \frac{\sigma^2}{l^2 L^2 \sigma_{l,L}^2} \int_0^L (L - \tau_1) \int_0^l (l - \tau') [r(\tau_2 + \tau_1 + \tau') + \\ + r(\tau_2 + \tau_1 - \tau') + r(\tau_2 - \tau_1 + \tau') + r(\tau_2 - \tau_1 - \tau')] d\tau' d\tau_1, \\ f_{l,L}(\lambda_2) = \frac{\sigma^2}{\sigma_{l,L}^2} \left[\frac{\sin \frac{\lambda_2 L}{2}}{\frac{\lambda_2 L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{\lambda_2 l}{2}}{\frac{\lambda_2 l}{2}} \right]^2 f(\lambda_2). \end{array} \right.$$

Bizonyítás. Nyilvánvalóan $\xi_{l,L}(v)$ jellemzői pontosan úgy függnek össze $\xi_l(u)$ jellemzőivel, mint $\xi_l(u)$ jellemzői $\xi(t)$ jellemzőivel. Ily módon (2.2) formulákat szukcesszive alkalmazva (2.4) formulákat fogjuk kapni.

3. §. Az általános hossz-variancia

Az összes hossz-variancia néven összefoglalt fogalom származtatható az általános hossz-variancia fogalmából, mint annak speciális esete. Ezért először az utóbbi fogalmat tárgyaljuk.

Az általános hossz-variancia definíciója előtt a következő megállapításokat tesszük:

A (2.1) szerint definiált $\xi_l(u)$ mozgó átlag-folyamat négyzete, $\xi_l^2(u)$ az 1.4. tétel értelmében szintén szűkebb értelemben stacionárius.

Hasonlóképpen (2.3) szerint definiált $\xi_{l,L}(v)$ folyamat négyzete $\xi_{l,L}^2(v)$ is szűkebb értelemben stacionárius.

Képezzük

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \eta_{l,L}^2(v) &= \frac{1}{L} \int_v^{v+L} \xi_l^2(u) du - \xi_{l,L}^2(v) \\ &= \frac{1}{L} \int_v^{v+L} [\xi_l(u) - \xi_{l,L}(v)]^2 du \end{aligned}$$

folyamatot. Ezt nevezhetnénk $\xi_l(u)$ „mozgó varianciájának” is.

3.1. Tétel. $\eta_{l,L}^2(v)$ várható értéke létezik és a következő formula adja :

$$(3.2) \quad \mathbf{M}\{\eta_{l,L}^2(v)\} = \sigma_l^2 - \sigma_{l,L}^2,$$

ahol a jobboldali tagok $\xi_l(u)$, illetve $\xi_{l,L}(v)$ (2.2), illetve (2.4) alatti varianciája.

Bizonyítás. Induljunk ki $\eta_{l,L}^2(v)$ (3.1) formulájának következő alakjából:

$$(3.3) \quad \eta_{l,L}^2(v) = \frac{1}{L} \int_v^{v+L} \xi_l^2(u) du - \xi_{l,L}^2(v).$$

Képezzük a várható értéket.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{\eta_{l,L}^2(v)\} &= \mathbf{M}\left\{\frac{1}{L} \int_v^{v+L} \xi_l^2(u) du\right\} - \mathbf{M}\{\xi_{l,L}^2(v)\} = \\ &= \frac{1}{L} \int_v^{v+L} \mathbf{M}\{\xi_l^2(u)\} du - \mathbf{M}\{\xi_{l,L}^2(v)\} = \\ &= \frac{1}{L} \int_0^{v+L} (\sigma_l^2 + m_l^2) du - (\sigma_{l,L}^2 + m_{l,L}^2) = \sigma_l^2 - \sigma_{l,L}^2. \end{aligned}$$

Q. e. d.

3. Definíció. $\eta_{l,L}^2(v)$ várható értékét $\xi(t)$ szűkebb értelemben stacionárius folyamat általános hossz-varianciafüggvényének nevezzük és $C^2(l, L)$ -el jelöljük, vagyis

$$(3.4) \quad C^2(l, L) = \mathbf{M}\{\eta_{l,L}^2(v)\}.$$

A 3.1. tétel szerint $C^2(l, L)$ létezik és

$$(3.5) \quad C^2(l, L) = \sigma_l^2 - \sigma_{l,L}^2.$$

A (3.5) kifejezés és (2.2) és (2.4) formulák következménye az alábbi tétel.

3.2. Tétel. $C^2(l, L)$ a $\xi(t)$ folyamat jellemzőivel a következőképpen fejezhető ki :

$$(3.6) \quad C^2(l, L) = \frac{2\sigma^2}{l^2 L^2} \int_0^L (L - \tau_1) \int_0^l (l - \tau') [2r(\tau') - r(\tau_1 + \tau') - r(\tau_1 - \tau')] d\tau' d\tau_1.$$

Bizonyítás. (3.5)-be (2.2), illetve (2.4) megfelelő formuláját behelyettesítve

$$\begin{aligned} C^2(l, L) &= \frac{2\sigma^2}{l^2} \int_0^l (l - \tau') r(\tau') d\tau' - \frac{2\sigma^2}{l^2 L^2} \int_0^L (L - \tau_1) \int_0^l (l - \tau') [r(\tau_1 + \tau') + \\ &\quad + r(\tau_1 - \tau')] d\tau_1. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\int_0^L (L - \tau_1) d\tau_1 = \frac{L^2}{2},$$

a két integrált összevonhatjuk és adódik a (3.6) formula.

Az általános hossz-variancia, mint empirikus fogalom kapta a nevét. Amikor ugyanis még nem állottak rendelkezésre műszerek $C^2(l, L)$ meghatározására a termék, mint realizáció alapján, ennek egy statisztikai becslését a következőképpen kapták. A fonodai termékből kimetszettek L hosszú darabot véletlenszerűen és ezt feldarabolták l hosszúságú részekre. Lemérték az l hosszú részek súlyát és ezt elosztották a hosszal. (Ha az L darab $(v, v + L)$, akkor az l darabok súly per hossza megfeleltek $\xi_l(v)$, $\xi_l(v + l)$, ... mozgó átlag „pontoknak”). E relatív súlyok varianciáját kiszámítva kapták $C^2(l, L)$ egy $\widetilde{C}_1^2(l, L)$ empirikus értékét. Esetleg több L darabon ezt kiszámítva és átlagolva kapták $\widetilde{C}^2(l, L)$ becslést $C^2(l, L)$ -re. Ennek értéke függött mind l , mind L hossz választásától, továbbá varianciát képeztek és ezért nevezték hossz-varianciának. A $C^2(l, L)$ becslés természetesen nem készülhetett a matematikai statisztika mintavételi szabályai szerint, mert az l hosszú darabokat nem vehették egymástól függetlenül, hiszen előfordulhatott, hogy L alig nagyobb l -nél, márpedig ahhoz, hogy a darab súlyát lemérjék, a terméket effektíve el kellett vágni. Itt e becslések statisztikai vizsgálatával nem foglalkozunk, lényegében ezzel foglalkozik STANGE [1] cikkében, csak a realizáció nem fonodai termék, hanem kokszolható szén folyamatos gyártásánál a szén hamutartalma. A hamutartalom megállapításának módszereivel foglalkozik különféle mintavételi módok alapján. Meghatározott számú minta középértékének megbízhatósági határait és e határok szűkítésének lehetőségeit vizsgálja.

Ma már olyan műszerek állnak a textilipar rendelkezésére, melyek lehetővé teszik, hogy a termék mentén feldarabolás nélkül folyamatosan mérhető az l hosszú darabok relatív súlya, illetve azzal arányos mennyiség, és e műszerek legtöbbje a súlyok varianciáját is meghatározza (l. pl. [2]). Többek között éppen a műszertechnika teszi szükségessé a fogalom matematikai vizsgálatát. A műszer természetesen a mozgó átlagokat és azok varianciáját egy konkrét termék által képviselt $x(t)$ realizáció mentén (pontosabban annak tetszőleges hosszú de véges szakaszán) tudja képezni. Tehát kihasználja, hogy bizonyos ergodikus tulajdonságok teljesülnek. Ezt a gyakorlatban hallgatólagosan feltételezik. Az ergodikus tulajdonságok teljesülésének feltételeivel itt nem foglalkozunk. Az 1.7. tétel alapján ezeket könnyen megfogalmazhatjuk, a feltételek teljesülésének ellenőrzése viszont külön vizsgálatokat igényelne.

4. §. A $C^2(l, L)$ általános hossz-variancia speciális esetei.

Belső- és külső-variancia. Teljes variancia

A $C^2(l, L)$ általános hossz-variancia speciális eseteiként még általánosabban használatos hossz-variancia fogalmakhoz jutunk. Ezeket $l \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$ és egyszerre $l \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$ határesetekben kapjuk meg.

4.1. Definíció. $\xi(t)$ szűkebb értelemben stacionárius folyamat *belső-varianciájának* nevezzük

$$(4.1) \quad V^2(L) = C^2(0, L) = \lim_{l \rightarrow 0} C^2(l, L)$$

határértéket, ha ez létezik és $\xi(t)$ *külső-varianciájának* nevezzük

$$(4.2) \quad B^2(l) = C^2(l, \infty) = \lim_{L \rightarrow \infty} C^2(l, L)$$

határértéket, ha létezik.

4.1. Tétel. Ha $\xi(t)$ mindkét értelemben stacionárius folyamat $r(\tau)$ korreláció függvénye folytonos (ez nyilvánvalóan ugyanazt jelenti, hogy $R(\tau)$ kovariancia-függvénye folytonos), akkor

$$\lim_{l \rightarrow 0} C^2(l, L) = V^2(L)$$

létezik és

$$(4.3) \quad V^2(L) = \frac{2\sigma^2}{L^2} \int_0^L (L - \tau_1) [1 - r(\tau_1)] d\tau_1$$

továbbá, ha $\lim_{\tau \rightarrow \infty} r(\tau) = 0$, akkor

$$\lim_{L \rightarrow \infty} C^2(l, L) = B^2(l)$$

létezik és

$$(4.4) \quad B^2(l) = \frac{2\sigma^2}{l^2} \int_0^l (l - \tau') r(\tau') d\tau'.$$

Bizonyítás. Számítsuk ki (4.1) határértéket, $C^2(l, L)$ (3.6) formulájából kiindulva.

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 0} C^2(l, L) &= \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{2\sigma^2}{l^2 L^2} \int_0^L (L - \tau_1) \int_0^l (l - \tau') [2r(\tau') - r(\tau_1 + \tau') - r(\tau_1 - \tau')] d\tau' d\tau_1 = \\ &= \frac{2\sigma^2}{L^2} \int_0^L (L - \tau_1) \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\int_0^l (l - \tau') [2r(\tau') - r(\tau_1 + \tau') - r(\tau_1 - \tau')] d\tau'}{l^2} d\tau_1 = \\ &= \frac{2\sigma^2}{L^2} \int_0^L (L - \tau_1) \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\int_0^l [2r(\tau') - r(\tau_1 + \tau') - r(\tau_1 - \tau')] d\tau'}{2l} d\tau_1 = \\ &= \frac{2\sigma^2}{L^2} \int_0^L (L - \tau_1) \lim_{l \rightarrow 0} \frac{2r(l) - r(\tau_1 + l) - r(\tau_1 - l)}{2} d\tau_1. \end{aligned}$$

Minthogy $r(\tau)$ folytonos

$$\lim_{l \rightarrow 0} r(l) = r(0) = 1,$$

és

$$\lim_{l \rightarrow 0} r(\tau_1 \pm l) = r(\tau_1),$$

vagyis

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 0} C^2(l, L) &= \frac{2\sigma^2}{L^2} \int_0^L (L - \tau_1) \frac{2 - 2r(\tau_1)}{2} d\tau_1 = \\ &= \frac{2\sigma^2}{L^2} \int_0^L (L - \tau_1) [1 - r(\tau_1)] d\tau_1, \end{aligned}$$

így (4.3)-at bebizonyítottuk. Hasonlóan határozhatjuk meg (4.2) határértékét.

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} C^2(l, L) &= \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\sigma^2}{l^2 L^2} \int_0^L (L - \tau_1) \int_0^l (l - \tau') [2r(\tau') - r(\tau_1 + \tau') - r(\tau_1 - \tau')] d\tau' d\tau_1 = \\ &= \frac{2\sigma^2}{l^2} \int_0^l (l - \tau') r(\tau') d\tau. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy F1–F6. feltételezéseinkből e tétel feltételei teljesülnek, így a tétel állítása igaz.

4.2. Definíció. $\xi(t)$ tágabb értelemben stacionárius folyamat *teljes-varianciájának* nevezzük

$$4.7) \quad C^2(0, \infty) = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} C^2(l, L)$$

határértéket, ha ez létezik.

4.2. Tétel. Ha $\xi(t)$ mindkét értelemben stacionárius, $r(\tau)$ korreláció függvénye folytonos és a $\pm \infty$ -ben eltűnik, akkor fennáll a következő egyenlőség sor:

$$\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} C^2(l, L) = \lim_{L \rightarrow \infty} V^2(L) = \lim_{l \rightarrow 0} B^2(l) = \sigma^2,$$

azaz

$$(4.8) \quad C^2(0, \infty) = V^2(\infty) = B^2(0) = \sigma^2.$$

Bizonyítás. Azt kell bebizonyítani, hogy

$$\lim_{L \rightarrow \infty} V^2(L) = \sigma^2$$

és

$$\lim_{l \rightarrow 0} B^2(l) = \sigma^2.$$

A 4.1. tétel bizonyításához hasonlóan (4.5) és (4.6) formulákat alkalmazva

$$\begin{aligned}\lim_{L \rightarrow \infty} V^2(L) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\sigma^2}{L^2} \int_0^L (L - \tau_1) [1 - r(\tau_1)] d\tau_1 = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\sigma^2 \int_0^L [1 - r(\tau_1)] d\tau_1}{2L} = \lim_{L \rightarrow \infty} \sigma^2 [1 - r(L)] = \sigma^2,\end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned}\lim_{l \rightarrow 0} B^2(l) &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{2\sigma^2}{l^2} \int_0^l (l - \tau') r(\tau') d\tau' = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{2\sigma^2 \int_0^l r(\tau') d\tau'}{2l} = \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \sigma^2 r(l) = \sigma^2,\end{aligned}$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Hasonló módszerrel bebizonyíthatók (4.2) tétel feltétele alapján, hogy

$$(4.9) \quad V^2(0) = B^2(\infty) = C^2(0, 0) = C^2(\infty, \infty) = 0,$$

továbbá

$$(4.10) \quad \left. \begin{aligned} C^2(l, 0) &\equiv 0 \\ C^2(\infty, L) &\equiv 0. \end{aligned} \right\}$$

A (4.3) és (4.4) formulákat összevetve (2.2) megfelelő formulájával egyszerűen látszik, hogy

$$(4.11) \quad \begin{aligned} V^2(L) &= \sigma^2 - \sigma_L^2 \\ B^2(l) &= \sigma_l^2. \end{aligned}$$

(4.11)-ből nyilvánvaló, hogy

$$V^2(L) + B^2(L) = \sigma^2,$$

illetve (4.8) alapján

$$(4.12) \quad V^2(L) + B^2(L) = C^2(0, \infty).$$

Ezt Cox és TOWSEND-féle képletnek nevezik [3].

A külső-, belső- és teljes-variancia, mint empirikus fogalom. A $V^2(L)$ belső-variancia $\widetilde{V^2(L)}$ becslését $C^2(l, L)$ becsléséhez $\widetilde{C^2(l, L)}$ -hez hasonlóan úgy számították a gyakorlatban régen, hogy a termék L hosszú darabjait gyakorlatilag 0 hosszúságú darabokra vagdalták (valóságban olyan rövid hosszúságúakra, amelyeket megamérési pontatlanság mellett mérni tudtak) és e darabok relatív súlyának varianciáját L hosszon belül kiszámítva átlagolták. Innen a *belső-variancia* elnevezés. A $\widetilde{B^2(l)}$ külső-varianciát úgy számították, hogy gyakorlatilag ∞ hosszú terméket l hosszú darabokra vagdalták (valóságban olyan

hosszú terméket, amely rendelkezésre állt a gyártási folyamat lefutása után) és e darabok relatív súlyai közötti varianciát számolták ki. Ezért helyesebben közötti — (angolul valóban between = között) egyenlőtlenségnek kellene nevezni, azonban a *külső* jelző elterjedtté vált. A $C^2(0, \infty)$ teljes-varianciát úgy kapták, hogy a rendelkezésre álló teljes terméket a lehető legrövidebb darabokra vagdalták és azok relatív súlyai közötti varianciát számították ki. E fogalom neve a hossz-varianciától való megkülönböztetésként lett *teljes-variancia*, ami azt is kifejezi, hogy ez a teljes termék menti pontról pontra való ingadozásokat teljesen jellemzi összességében.

Ma már mind $V^2(L)$, mind $B^2(L)$, mind $C^2(0, \infty)$ variancia mérésére műszerek állnak rendelkezésre, amelyekkel folyamatos gyártásközbeni ellenőrzéseket lehet végezni a gyártott termék e jellemzőinek alakulására vonatkozóan.

A (4.12) formula azt fejezi ki, hogy valamely fonodai termék L hosszú darabjain belüli átlagos varianciához hozzáadva e darabok közötti varianciát, a teljes varianciát kapjuk.³

5. §. Egy tétel

A (4.12) képlet

$$C^2(L, \infty) + C^2(0, L) = C^2(0, \infty)$$

írásmódjából a szórásanalízis helytelen alkalmazása alapján sokan igaznak vélik az alábbi formulát is⁴

$$(5.1) \quad C^2(l, L) + C^2(L, A) = C(l, A).$$

Szavakban ez a képlet azt fejezné ki, hogy a termék A hosszán belüli l darabok közötti variancia meghatározható úgy, hogy kiszámítjuk A hosszon belül L hosszú darabok közötti varianciát, majd hozzáadjuk L darabokon belüli l hosszú darabok varianciáját (illetve annak átlagát az L darabokra nézve). Vagyis két fokozatban végezhető (és ilyenformán akárhány fokozatban) a feldarabolás és variancia-számítás.

Be fogjuk bizonyítani, hogy (5.1) képlet csak speciális, elfajult korrelogrammal rendelkező $\xi(t)$ stacionárius folyamatnál állhat fenn.

Tétel. Az (5.1) formula csak akkor lehet igaz, ha $\xi(t)$ korrelogramja azonosan konstans, vagyis

$$r(\tau) \equiv a, \quad -1 \leq a \leq 1, \quad 0 < |\tau| < \infty.$$

Bizonyítás. Tegyük fel ugyanis, hogy (5.1) igaz. Akkor ismételt alkalmazással bármely $0 \leq \lambda \leq l \leq L \leq A \leq \infty$ értékekre

$$C^2(\lambda, l) + C^2(l, L) + C^2(L, A) = C^2(\lambda, A)$$

összefüggés is fennáll. $\lambda = 0$ és $A = \infty$ választásával ez átmegy

$$(5.2) \quad V(l) + C^2(l, L) + B^2(L) = C^2(0, \infty)$$

³ Statisztikailag is bizonyítja (4.12) helyességét STANGE [1] cikkében.

⁴ Egyes munkákban (l. pl. [4]) mindenféle feltételezés nélkül fel is írták ezt az összefüggést.

egyenlőségbe, ahol a szereplő tagokat (3.6), (4.8) és (4.11) alapján helyettesítve

$$\sigma^2 - \sigma_l^2 + \sigma_l^2 - \sigma_{l,L}^2 + \sigma_L^2 \equiv \sigma^2,$$

vagyis

$$\sigma_{l,L}^2 \equiv \sigma_L^2,$$

amibe (2.4) és (2.2) képletek megfelelő tagját behelyettesítve

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma^2}{l^2 L^2} \int_0^L (L - \tau_1) \int_0^l (l - \tau') [r(\tau_1 + \tau') + r(\tau_1 - \tau')] d\tau' d\tau_1 &\equiv \\ &\equiv \frac{2\sigma^2}{L^2} \int_0^L (L - \tau_1) r(\tau) d\tau \end{aligned}$$

minden $0 \leq l \leq L \leq \infty$ választás mellett. Tegyük fel, hogy $l > 0$ és $L < \infty$, ellenkező esetben (5.2) átmegy már bizonyított egyenlőségekbe. Minthogy ez minden $l \leq L < \infty$ mellett azonosság és mindkét oldal L szerint majdnem minden (m. m.) L -re differenciálható, deriválva az egyenlőség igaz marad m. m. L -re. Vagyis mindkét oldalon $L^2/2 \sigma^2$ -el szorozva, majd deriválva

$$\frac{1}{l^2} \int_0^L \int_0^l (l - \tau') [r(\tau_1 + \tau') + r(\tau_1 - \tau')] d\tau' d\tau_1 = \int_0^L r(\tau) d\tau \quad m \cdot m \cdot L - re.$$

ezt újból deriválva

$$(5.3) \quad \frac{1}{l^2} \int_0^l (l - \tau') [r(L + \tau') + r(L - \tau')] d\tau' = r(L), \quad m \cdot m \cdot L - re.$$

A jobboldal l -től független, így deriváltja 0. Vagyis

$$\begin{aligned} -\frac{2}{l} \frac{1}{l^2} \int_0^l (l - \tau') [r(L + \tau') + r(L - \tau')] d\tau' + \\ + \frac{1}{l^2} \int_0^l [r(L + \tau') + r(L - \tau')] d\tau' = 0 \quad \begin{matrix} m \cdot m \cdot L - re. \\ m \cdot m \cdot l \leq L - re. \end{matrix} \end{aligned}$$

(5.3) egyenlőséget felhasználva

$$(5.4) \quad \frac{1}{l} \int_0^l [r(L + \tau') + r(L - \tau')] d\tau' = 2r(L) \quad \begin{matrix} m \cdot m \cdot L - re \\ m \cdot m \cdot l \leq L - re. \end{matrix}$$

A jobboldal ismét l -től független, így

$$-\frac{1}{l} \frac{1}{l} \int_0^l [r(L + \tau') + r(L - \tau')] d\tau' + \frac{1}{l} [r(L + l) + r(L - l)] = 0$$

$$m \cdot m \cdot L - re$$

$$m \cdot m \cdot l \leq L - re.$$

(5.4) egyenlőséget felhasználva

$$(5.5) \quad \frac{r(L + l) + r(L - l)}{2} = r(L) \quad \begin{array}{l} m \cdot m \cdot L - re \\ m \cdot m \cdot l \leq L - re \end{array}$$

adódik, ami egy egyenlet $r(\tau)$ függvényre. Ezt az egyenletet csak olyan függvény elégíti ki, amelynek képe egyenes. Minthogy pedig $|r(\tau)| \leq 1$, korlátos, olyan korlátos függvény, amely (5.5)-öt kielégíti az azonosan konstans, vagyis

$$r(\tau) \equiv a, \quad -1 \leq a \leq 1, \quad 0 < \tau < \infty.$$

Mivel $r(-\tau) = r(\tau)$ kell legyen

$$r(\tau) \equiv a, \quad -1 \leq a \leq 1, \quad -\infty < \tau < \infty$$

korrelogram esetén állhat csak fenn a kiindulási, (5.1) formula. Q. e. d.

6. §. A hossz-varianciák összefüggése a folyamat momentumaival és spektrogramjával

Összefoglaljuk az előző paragrafusokban bebizonyított összefüggéseket és kiegészítjük ezeket a hossz-varianciák és a folyamat spektrogramja közötti összefüggésekkel.

$$(4.1) \quad V^2(L) = C^2(0, L),$$

$$(4.2) \quad B^2(l) = C^2(l, \infty),$$

$$(4.10) \quad C^2(l, 0) \equiv 0,$$

$$(4.10) \quad C^2(\infty, L) \equiv 0,$$

$$(4.9) \quad V^2(0) = B^2(\infty) = C^2(0, 0) = C^2(\infty, \infty) = 0,$$

$$(4.8) \quad V^2(\infty) = B^2(0) = C^2(0, \infty) = \sigma^2,$$

$$(4.12) \quad V^2(L) + B^2(L) = C^2(0, \infty),$$

(3.6) és (4.8)-ból

$$(3.6') \quad C^2(l, L) =$$

$$= \frac{2 C^2(0, \infty)}{l^2 L^2} \int_0^L (L - \tau_1) \int_0^l (l - \tau') [2 r(\tau') - r(\tau_1 + \tau') - r(\tau_1 - \tau')] d\tau' d\tau_1 \dots$$

(4.3) és (4.8)ból

$$(4.3') \quad V^2(L) = \frac{2 V^2(\infty)}{L^2} \int_0^L (L - \tau_1) [1 - r(\tau_1)] d\tau_1.$$

(4.4) és (4.8)-ből

$$(4.4') \quad B^2(l) = \frac{2 B^2(0)}{l^2} \int_0^l (l - \tau') r(\tau') d\tau'.$$

A (4.3') és (4.4') képleteket a textiliparban szintén szokták (4.12) képlettel együtt COX és TOWNSEND-féle képletnek nevezni. Egységesség szempontjából (3.6')-t lehetne *általánosított COX és TOWNSEND-féle képletnek* is nevezni.

$r(\tau)$ korrelogram, ha $f(\lambda)$ spektrogram létezik $0 \leq \lambda < \infty$, a következőképpen fejezhető ki. Minthogy (1.3.4) alapján stacionárius folyamat esetén

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{\sigma^2},$$

és (1.9.2) alapján

$$f(\lambda) = \frac{\tilde{f}(\lambda)}{\sigma^2},$$

az 1.6. tétel szerint F1—F6. feltételek mellett

$$(6.1) \quad r(\tau) = \int_0^\infty \cos \lambda \tau \cdot f(\lambda) d\lambda \quad -\infty < \tau < \infty.$$

(6.1) segítségével a hossz-varianciákat kifejezhetjük $f(\lambda)$ spektrogrammal is. A formulákat egyszerűen (6.1)-nek (3.6'), (4.3') és (4.4')-be való behelyettesítésével, az integrálok sorrendjének felcserélése után elvégzett egyszerű integrálásokkal megkapjuk, úgyhogy a levezetést mellőzzük. Az eredmények a következők:

$$(6.2) \quad C^2(l, L) = C^2(0, \infty) \int_0^\infty \left[\frac{\sin \frac{\lambda l}{2}}{\frac{\lambda l}{2}} \right]^2 \left[1 - \frac{\sin^2 \frac{\lambda L}{2}}{\left(\frac{\lambda L}{2} \right)^2} \right] f(\lambda) d\lambda,$$

$$(6.3) \quad V^2(L) = V^2(\infty) \int_0^\infty \left[1 - \frac{\sin^2 \frac{\lambda L}{2}}{\left(\frac{\lambda L}{2} \right)^2} \right] f(\lambda) d\lambda,$$

$$(6.4) \quad B^2(l) = B^2(0) \int_0^\infty \left[\frac{\sin \frac{\lambda l}{2}}{\frac{\lambda l}{2}} \right]^2 f(\lambda) d\lambda.$$

7. §. Néhány korrelogram és a hozzátartozó spektrogram és belső-variancia

E paragrafusban olyan korrelogramokat fogunk felírni, melyek a textiliparban gyakran használatosak empirikus korrelogramok közelítésére, vagy bizonyos feltételezések mellett elméletileg ilyen korrelogramok vezethetők le.

Minthogy $B^2(L)$ külső-variancia görbéje a (4.12) Cox és TOWNSEND-féle képlet szerint $V^2(L)$ tükörképe a $\sigma^2/2$ magasságú L tengellyel párhuzamos egyenesre, $V^2(L)$ felírása és ábrázolása mellett $B^2(L)$ bemutatása felesleges.

$C^2(l, L)$ konkrét korrelogramokhoz tartozó formuláit nem fogjuk meghatározni, mert azok a legegyszerűbb esetekben is igen bonyolultak.

Az egyszerűbb ábrázolás kedvéért $V^2(L)$ belső-variancia helyett

$$\check{V}^2(L) = \frac{V^2(L)}{V^2(\infty)}$$

variancia-viszonyt fogjuk tekinteni, melynek $r(\tau)$ -val való kifejezése (4.3') alapján

$$(4.3'') \quad \check{V}^2(L) = \frac{2}{L^2} \int_0^L (L - \tau) [1 - r(\tau)] d\tau.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\check{V}^2(\infty) = 1.$$

7.1. Ideális fonodai termék.

Ideálisnak neveznek egy olyan szálanyagból (elemiszál) álló hosszalakban elhelyezett anyaghalmazt, fonodai terméket, amelyben minden szál középpontja egyforma valószínűséggel található a termék bármely keresztmetszetében (vagyis a termék egy darabjában levő szálközéppontok száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó).

Egy ideális termék korrelogramját a következő formula adja meg, melyet a függelékben vezetünk le (1. még [6]):

$$(7.1) \quad \left. \begin{aligned} r_i(\tau) &= \frac{1}{\bar{h}} \int_{\tau}^{h_{\max}} (h - \tau) g(h) dh, & h_{\min} \leq \tau \leq h_{\max} \\ &= 1 - \frac{\tau}{\bar{h}} & \tau \leq h_{\min} \\ &= 0 & \tau \geq h_{\max} \end{aligned} \right\}$$

ahol $g(h)$ az elemiszálak hosszeloszlása, h_{\min} , illetve h_{\max} a minimális, illetve a maximális szálhossz, $h_{\min} \geq 0$, $h_{\max} \leq \infty$, és \bar{h} az átlagos szálhossz.

(7.1) formulát (1.9.4) képletbe helyettesítve megkapjuk az ideális termék spektrogramját

$$(7.2) \quad f_i(\lambda) = \frac{2}{\pi \bar{h} \lambda^2} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} (1 - \cos \lambda h) g(h) dh \quad 0 \leq \lambda < \infty,$$

vagy

$$(7.2') \quad f_i(\lambda) = \frac{\bar{h}}{\pi} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \frac{\sin^2 \frac{\lambda h}{2}}{\left(\frac{\lambda \bar{h}}{2}\right)^2} g(h) dh \quad 0 \leq \lambda < \infty,$$

vagy

$$(7.2'') \quad f_i(\lambda) = \frac{2}{\pi \bar{h} \lambda^2} \left(1 - \operatorname{Re} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} e^{i\lambda h} g(h) dh \right) = \frac{2}{\pi \bar{h} \lambda^2} [1 - \operatorname{Re} \varphi_h(\lambda)], \quad 0 \leq \lambda < \infty,$$

ahol $\varphi_h(\lambda)$ a $g(h)$ eloszlás karakterisztikus függvényét jelenti, $\operatorname{Re} \varphi_h(\lambda)$ pedig e függvény valós részét.

A (7.1) korrelogramhoz tartozó ideális belső-varianciagörbe a következő (4.3'') alapján meghatározva:

$$(7.3) \quad \check{V}_i^2(L) = 1 - \frac{2}{L^2 \bar{h}} \int_{h_{\min}}^L \left[\frac{Lh^2}{2} - \frac{h^3}{6} \right] g(h) dh - \frac{2}{L^2 \bar{h}} \int_L^{h_{\max}} \left[\frac{L^2 h}{2} - \frac{L^3}{6} \right] g(h) dh,$$

ahol $L \leq h_{\min}$ esetén az első integrál eltűnik, a másodikban pedig az alsó határ h_{\min} lesz, míg $L \geq h_{\max}$ esetén a második integrál tűnik el és az első integrálban a felső határ h_{\max} lesz.

$\check{V}_i^2(L)$ képletét átalakíthatjuk a következőképpen is:

$$(7.3') \quad \check{V}_i^2(L) = 1 - \frac{2}{L^2 \bar{h}} \int_{h_{\min}}^L \left[\frac{Lh^2}{2} - \frac{h^3}{6} - \frac{L^2 h}{2} + \frac{L^3}{6} \right] g(h) dh - \\ - \frac{2}{L^2 \bar{h}} \int_L^{h_{\max}} \left[\frac{L^2 h}{2} - \frac{L^3}{6} \right] g(h) dh = \frac{L}{3 \bar{h}} - \frac{1}{3 L^2 \bar{h}} \int_{h_{\min}}^L (L-h)^3 g(h) dh.$$

A (7.1), (7.2) és (7.3) függvények még nem ábrázolhatók, mert tartalmaznak $g(h)$ szálhossz-eloszlást, amely nincs megadva. E formulák segítségével azonban adott $g(h)$ szálhossz-eloszlás esetén $r_i(\tau)$, $f_i(\lambda)$ és $\check{V}_i^2(L)$ jellemzők meghatározhatók.

A következőkben meghatározzuk e jellemzőket néhány adott $g(h)$ szálhossz-eloszlás mellett.

7.2. Ideális termék azonos hosszúságú szálakból.

Legyen az elemiszálak hossza azonos, $a > 0$. Ekkor a szálhossz-eloszlás elfajult eloszlás, vagyis

$$(7.4) \quad g_1(h) dh = 1, \quad \text{ha } h = a, \\ = 0, \quad \text{ha } h \neq a.$$

(7.4) eloszlást (7.1), (7.2) és (7.3)-ba behelyettesítve kapjuk, hogy

$$(7.5) \quad r_{11}(\tau) = 1 - \frac{\tau}{a}, \quad \text{ha } \tau \leq a \\ = 0, \quad \text{ha } \tau \geq a$$

a korrelogram,

$$(7.6) \quad f_{11}(\lambda) = \frac{a}{\pi} \frac{\sin^2 \frac{\lambda a}{2}}{\left(\frac{\lambda a}{2}\right)^2}, \quad 0 \leq \lambda < \infty$$

a spektrogram és

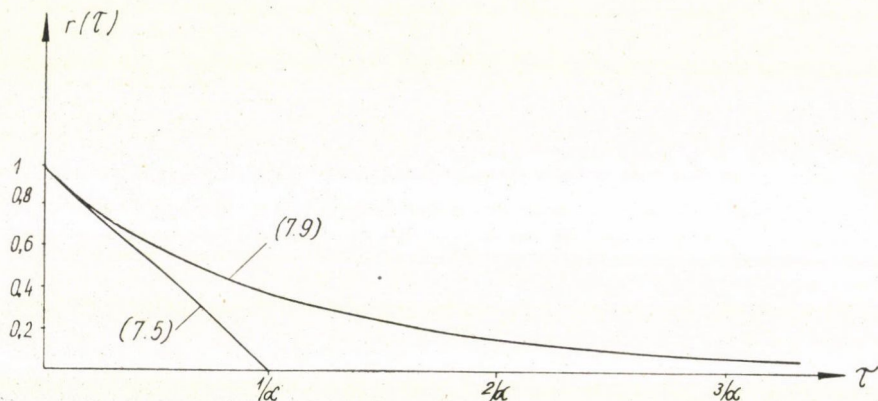
$$(7.7) \quad \check{V}_{11}^2(L) = \frac{L}{3a}, \quad \text{ha } L \leq a \\ = 1 - \frac{a}{L} + \frac{a^2}{3L^2}, \quad \text{ha } L \geq a$$

a belső-varianciagörbe.

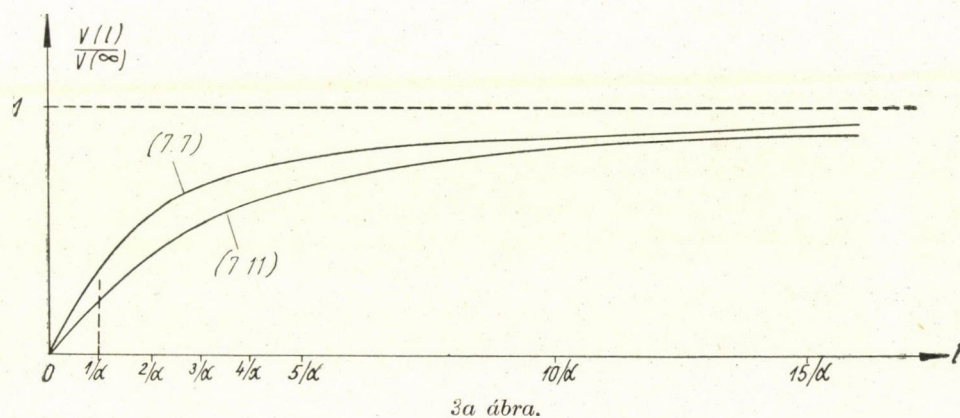
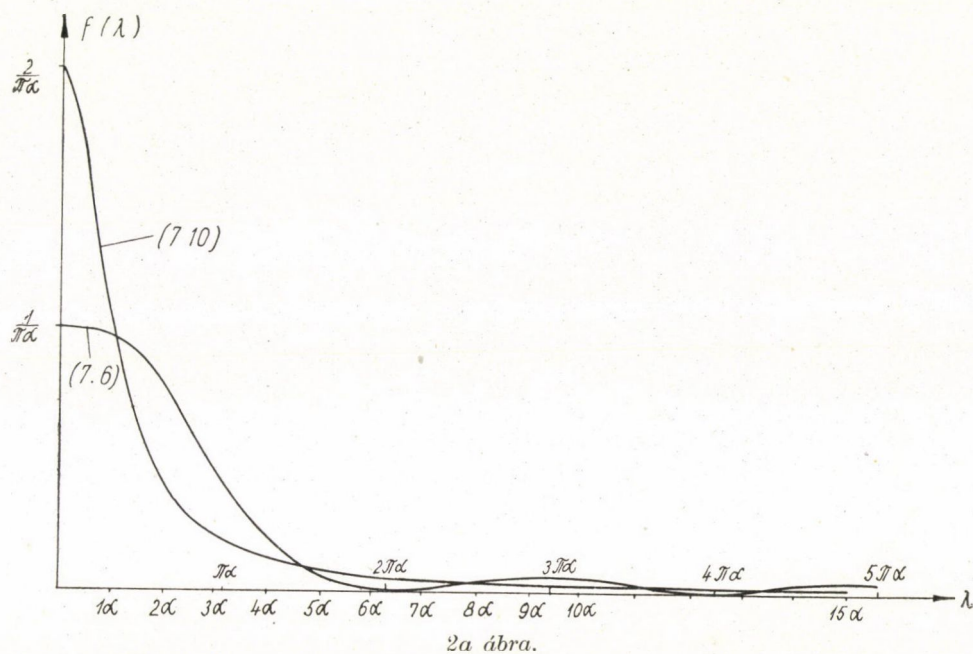
A (7.5) korrelogram képe az 1a ábrán látható. Ez egy $1/a$ iránytangensű egyenes-szakasz.

A (7.6) spektrogramot a 2a ábra mutatja $a = \frac{1}{\alpha}$ jelöléssel. Ez egy erősen csillapított periodikus görbe, melynek maximuma $\lambda = 0$ helyen a/π , lokális maximumai a $3\pi/a, \dots, (2k+1)\pi/a, \dots$ helyeken rendre $\frac{4a}{3\pi^3}, \dots, \frac{4a}{(2k+1)\pi^3}$... A maximális helyek annál sűrűbbek és a maximumok annál „élesebbek”, minél nagyobb az a szálhossz (minél kisebb α). A minimum helyek $2\pi/a, \dots, 2k\pi/a, \dots$ és itt a görbének gyökei vannak.

A (7.7) belső-varianciagörbe képe a 3a ábrán látható. $L = a$ értékig a görbét egy $\frac{1}{3a}$ iránytangensű egyenes alkotja, majd tovább egy hozzá érintőlegesen csatlakozó görbe, amely $L \rightarrow \infty$ esetén aszimptotikusan 1-hez tart.



1a ábra.



7.3. Ideális termék „nulla hosszúságú”, szálakból.

A címben jelzett termék természetesen nem létezik a gyakorlatban, minthogy, ha az elemiszálak hossza 0 lenne, akkor azokból fonodai termék nem képzelhető el. Elméletileg azonban ez az eset nyilván logikusan következik, továbbá erre az esetre való kitérés nem is teljesen haszontalan a gyakorlat szempontjából sem, mert egy olyan termék, melyben az elemiszálak hossza igen kicsi, hasonló tulajdonságokkal fog rendelkezni.

Ez az eset az előző példából úgy származtatható, hogy $a = 0$ értéket tételezünk fel és a jellemzőkben $a \rightarrow 0$ határátmenetet végzünk. A jellemzők:

$$(7.5^I) \quad r_{i2}(\tau) = 1, \quad \text{ha } \tau = 0 \\ = 0, \quad \text{ha } \tau \neq 0,$$

$$(7.6^I) \quad f_{i2}(\lambda) \equiv 0, \quad 0 \leq \lambda < \infty$$

$$(7.7^I) \quad \check{V}_{i2}^2(L) = 0, \quad \text{ha } L = 0 \\ = 1, \quad \text{ha } L > 0.$$

7.4. Ideális termék „végtelen hosszú” szálakból.

A címben jelzett fogalom szintén csak aszimptotikus fogalom, amelynek értelmet csak akkor lehet adni, ha az elemiszálak hossza olyan nagy (de egyenlő), amely gyakorlatilag már végtelennek vehető. Műszálaknál, ahol végtelen szálát darabolnak fel tetszőleges hosszakra, elképzelhető az elemiszál akármilyen nagy hossza és az ebből gyártott termék jellemzői közelítőleg hasonlóak lesznek az „aszimptotikus termék” jellemzőihez.

Ez esetben $a \rightarrow \infty$ határátmenetet kell (7.5), (7.6) és (7.7)-ben elvégezni, amikor is kapjuk, hogy

$$(7.5^{II}) \quad r_{i3}(\tau) \equiv 1, \quad 0 \leq \tau < \infty.$$

A spektrogram elfajul, mégpedig $a \rightarrow \infty$ esetén

$$(7.6^{II}) \quad f_{i3}(\lambda) \rightarrow \infty, \quad \text{ha } \lambda = 0, \\ \rightarrow 0, \quad \text{ha } \lambda > 0$$

úgy, hogy $f_{i3}(\lambda)$ integrálja $(0, \infty)$ -ben mindig 1 maradjon, míg a belső-variancia

$$(7.7^{II}) \quad \check{V}_{i3}^2(L) \equiv 0, \quad 0 \leq L < \infty.$$

7.5. Ideális termék exponenciális szálhossz-eloszlással.

Legyen most a szálhossz-eloszlás exponenciális,

$$(7.8) \quad g_4(h) = \frac{1}{\bar{h}} e^{-h/\bar{h}}.$$

Természetesen gyakorlatilag ilyen szálhossz-eloszlás nincs, mert ez tetszőleges hosszú szálát feltételez, azonban rendszerint jól használható olyan empirikus szálhossz-eloszlás közelítésére, ahol a rövid szálak gyakorisága viszonylag nagy; \bar{h} az átlagos szálhosszat jelöli.

A (7.8) eloszlást a korrelogram (7.1) képletébe helyettesítve és az integrálzást (τ, ∞) határok között elvégezve kapjuk, hogy

$$(7.9) \quad r_{i4}(\tau) = e^{-\tau/\bar{h}}, \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

amely szintén egy exponenciális görbe, melyet ugyancsak 1a ábrán rajzoltunk fel $\bar{h} = \frac{1}{\alpha}$ jelölés mellett a (7.5) görbével együtt.

Ha most (7.8)-at (7.2)-be és (7.3)-ba helyettesítjük és ott $h_{\min} = 0$, $h_{\max} = \infty$ helyettesítést végezzük a határookban, kapjuk a spektrogram és

belső-variancia függvényeket.

$$(7.10) \quad f_{i4}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{\bar{h}}{\bar{h}^2 \lambda^2 + 1}, \quad 0 \leq \lambda < \infty$$

spektrogram grafikonja a 2a ábrán látható (7.6) mellett $\bar{h} = 1/\alpha$ jelöléssel. A görbe maximuma $\lambda = 0$ -nál $2\bar{h}/\pi$ ($= 2/\pi\alpha$), és alakja egy fél haranggörbéhez hasonlít.

$$(7.11) \quad \check{V}_{i4}^2(L) = 1 - \frac{2\bar{h}}{L} \left[1 - \frac{\bar{h}}{L} (1 - e^{-L/\bar{h}}) \right], \quad 0 \leq L < \infty$$

belső-varianciagörbe képe a 3a ábrán látható $\bar{h} = 1/\alpha$ jelöléssel. Ez egy, az egész $(0, \infty)$ intervallumban szigorúan monoton növény, aszimptotikusan 1-hez tartó görbe, mely igen hasonló a vele párhuzamosan felrajzolt (7.7) görbéhez, de mindenütt alatta halad. Ez azt mutatja, hogy a belső-variancia szempontjából előnyösebb, ha az ideális fonodai termékeket felépítő elemiszálak hossza nem állandó, hanem változó, amire talán nem is gondolnánk.

7.6. Ideális termék logaritmikusan normális szálhossz-eloszlással.

Olyan esetekben, amikor a száltömegben az átlagnál hosszabb szálak viszonylag nagyobb gyakorisággal fordulnak elő, célszerű az empirikus eloszlást logaritmikusan normális sűrűségfüggvénnyel közelíteni (l. pl. BRENY [7]).

$$(7.12) \quad g_5(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \operatorname{ch}} e^{-\frac{(\ln h - \ln b)^2}{2c^2}}, \quad 0 \leq h < \infty.$$

Ebben az esetben az átlagos szálhossz

$$(7.13) \quad \bar{h} = be^{c^2/2},$$

a variancia pedig

$$(7.14) \quad \sigma_h^2 = b^2 e^{c^2} (e^{c^2} - 1),$$

amely képletekből b és c kifejezése

$$(7.15) \quad \left. \begin{aligned} b &= \frac{\bar{h}}{\sqrt{V_h^2 + 1}} \\ c &= \sqrt{\ln(V_h^2 + 1)} \end{aligned} \right\},$$

ahol $V_h^2 = \sigma_{h/h}^2$.

A (7.12) szálhossz-eloszláshoz tartozó ideális spektrogramot nem írjuk fel, mert a kapott integrált nem lehet kiintegrálni, csupán a korrelogramot és belső-varianciát határozzuk meg, de azt sem ábrázoljuk.

A korrelogram és belső-variancia kifejezhetők $\Phi(x)$ standardizált normális eloszlásfüggvény segítségével. Ehhez szükségünk van az alábbi integrálra:

$$(7.16) \quad I_h(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} h^k g_5(h) dh.$$

(7.12) eloszlást (7.16) integrálba helyettesítve $\frac{\ln h - \ln b}{c} = x$ helyettesítés után egyszerű számolással adódik, hogy

$$I_k(\alpha, \beta) = \frac{b^k e^{\frac{k^2 c^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{c \ln \alpha / b - kc}}^{\frac{1}{c \ln \beta / b - kc}} e^{-x^2/2} dy = b^k e^{\frac{k^2 c^2}{2}} \left[\Phi\left(\frac{\ln \beta / b}{c} - kc\right) - \Phi\left(\frac{\ln \alpha / b}{c} - kc\right) \right].$$

Vagy (7.15) képleteket felhasználva

$$(7.17) \quad I_k(\alpha, \beta) = \bar{h}^k (\sqrt{V_h^2 + 1})^{k(k-1)} \left\{ \Phi\left(\frac{\ln \beta / \bar{h} - \ln(\sqrt{V_h^2 + 1})^{2k-1}}{\sqrt{\ln(V_h^2 + 1)}}\right) - \Phi\left(\frac{\ln \alpha / \bar{h} - \ln(\sqrt{V_h^2 + 1})^{2k-1}}{\sqrt{\ln(V_h^2 + 1)}}\right) \right\}.$$

A kiszámított (7.16) integrál segítségével a jellemzők közül a korrelogram és első-varianciagörbe a következőképpen írhatók fel:

$$(7.18) \quad r_{i5}(\tau) = \frac{1}{\bar{h}} \int_{\tau}^{\infty} (h - \tau) g_5(h) dh = \frac{1}{\bar{h}} I_1(\tau, \infty) - \frac{\tau}{\bar{h}} I_0(\tau, \infty).$$

$$(7.19) \quad \check{V}_{i5}^2(L) = \frac{L}{3\bar{h}} - \frac{1}{3L^2\bar{h}} \int_0^L (L-h)^3 g_5(h) dh = \frac{L}{3\bar{h}} - \frac{1}{3L^2\bar{h}} \{L^3 I_0(0, L) - 3L^2 I_1(0, L) + 3L I_2(0, L) - I_3(0, L)\}.$$

A (7.18) és (7.19)-be (7.17) speciális alakjait helyettesítve

$$(7.20) \quad r_{i5}(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\bar{h}} - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(1+V_h^2)}} \ln \frac{\tau}{\bar{h} \sqrt{1+V_h^2}}\right) + \frac{\tau}{\bar{h}} \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(1+V_h^2)}} \ln \frac{\tau \sqrt{1+V_h^2}}{\bar{h}}\right),$$

$$(7.21) \quad \check{V}_{i5}^2(L) = \frac{L}{3\bar{h}} - \frac{L}{3\bar{h}} \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(1+V_h^2)}} \ln \frac{L \sqrt{1+V_h^2}}{\bar{h}}\right) + \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(1+V_h^2)}} \ln \frac{L}{\bar{h} \sqrt{1+V_h^2}}\right) - \frac{\bar{h}}{L} (1+V_h^2) \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(1+V_h^2)}} \ln \frac{L}{\bar{h} (\sqrt{1+V_h^2})^3}\right) + \frac{\bar{h}^2}{3L^2} (1+V_h^2)^3 \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(1+V_h^2)}} \ln \frac{L}{\bar{h} \sqrt{1+V_h^2}^5}\right).$$

7.7 Ideális termék normális szálhossz-eloszlással.

Bizonyos esetekben az elemiszálak hosszeloszlása jól közelíthető normális eloszlással. Minthogy a szálhossz csak pozitív lehet, a normális eloszlással csak akkor közelíthetjük, ha a szórás többszörösen kisebb az átlagos szálhossznál. (Legalább $\sigma_h < \frac{\bar{h}}{2}$, ha $\sigma_h \leq \frac{\bar{h}}{3}$, akkor már az eloszlás origótól balra eső valószínűsége nyugodtan elhanyagolható.) Másik feltétel, hogy az empirikus eloszlás közelítőleg szimmetrikus legyen.

Tételezzük fel, hogy a szálhossz-eloszlás

$$(7.22) \quad g_h(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} e^{-\frac{(h-\bar{h})^2}{2\sigma_h^2}} \quad -\infty < h < \infty.$$

Fel fogjuk használni a következő formulákat:

$$(7.23) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2}{2}} = \varphi(A); & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^A e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(A) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^A x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\varphi(A); & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(A) - A\varphi(A) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^A x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\varphi(A)[A^2 + 2]. \end{cases}$$

továbbá, hogy a (7.22) normális eloszlás karakterisztikus függvénye

$$(7.24) \quad \varphi_h(t) = e^{i\bar{h}t - \frac{\sigma_h^2 t^2}{2}},$$

amelynek valós része

$$(7.25) \quad \operatorname{Re} \varphi_h(t) = e^{-\frac{\sigma_h^2 t^2}{2}} \cos \bar{h}t.$$

Mármost helyettesítsük be (7.22) eloszlást a korrelogram (7.1) képletébe,

$$(7.26) \quad \begin{aligned} r_{is}(\tau) &= \frac{1}{\bar{h}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} \int_{\tau}^{\infty} (\tau - h) e^{-\frac{(h-\bar{h})^2}{2\sigma_h^2}} dh = \\ &= \frac{1}{\bar{h}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\tau-\bar{h}}{\sigma_h}}^{\infty} (\tau - \sigma_h x - \bar{h}) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \frac{\tau - \bar{h}}{\bar{h}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\tau - \bar{h}}{\sigma_h}\right) \right] - \frac{\sigma_h}{\bar{h}} \varphi\left(\frac{\tau - \bar{h}}{\sigma_h}\right). \end{aligned}$$

A spektrogram (7.2'') képletét és (7.25) képletet felhasználva rögtön adódik

$$(7.27) \quad f_{i6}(\lambda) = \frac{2}{\pi \bar{h} \lambda^2} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_h^2 \lambda^2}{2}} \cos \bar{h} \lambda \right)$$

spektrogram és végül (7.3')-be (7.22) eloszlást helyettesítve

$$\begin{aligned} \check{V}_{i6}^2(L) &= \frac{L}{3\bar{h}} - \frac{1}{3L^2\bar{h}} \int_{-\infty}^L (L-h)^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} e^{-\frac{(h-\bar{h})^2}{2\sigma_h^2}} dh. \\ \check{V}_{i6}^2(L) &= \frac{L}{3\bar{h}} - \frac{1}{3L^2\bar{h}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{L-\bar{h}}{\sigma_h}} (L-\sigma_h x - \bar{h})^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \frac{L}{3\bar{h}} - \frac{1}{3L^2\bar{h}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{L-\bar{h}}{\sigma_h}} [(L-\bar{h})^3 - 3(L-\bar{h})^2\sigma_h x + 3(L-\bar{h})\sigma_h^2 x^2 - \\ &\quad \sigma_h^3 x^3] e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

Felhasználva (7.23) formulákat, rövid átalakítással adódik, hogy

$$(7.28) \quad \check{V}_{i6}^2(L) = \frac{L}{3\bar{h}} - \frac{\sigma_h^3}{3L^2\bar{h}} \left\{ \left[\left(\frac{L-\bar{h}}{\sigma_h} \right)^3 + 3 \frac{L-\bar{h}}{\sigma_h} \right] \Phi \left(\frac{L-\bar{h}}{\sigma_h} \right) + \left[\left(\frac{L-\bar{h}}{\sigma_h} \right)^2 + 2 \right] \varphi \left(\frac{L-\bar{h}}{\sigma_h} \right) \right\}.$$

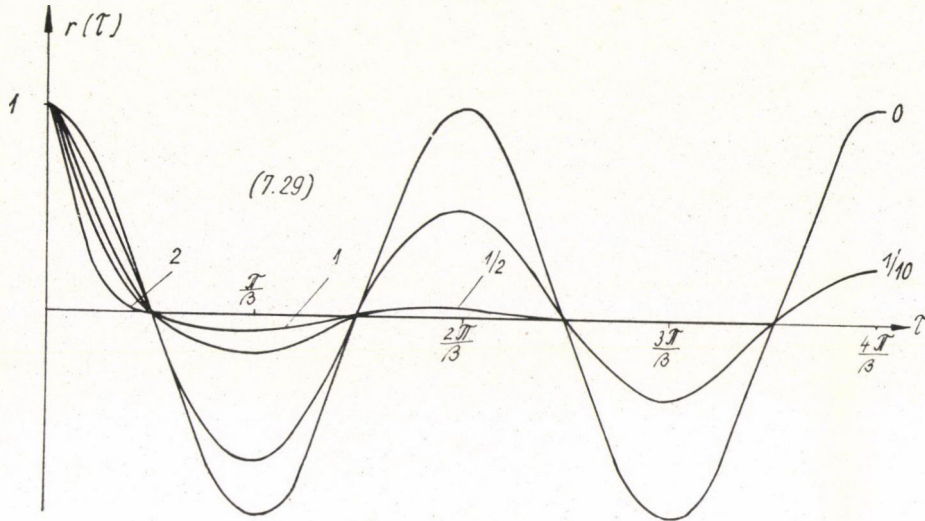
Az elemiszálak hosszeloszlására vonatkozóan a textiliparban még más közelítéseket is használnak, az ideális termékek jellemzőinek további speciális eseteivel azonban nem foglalkozunk. A továbbiakban a korrelogramok még két osztályára fogunk kitérni és ott a hozzátartozó spektrogramot és belső-varianciagörbét megadni.

7.8. Csillapított periodikus korrelogram esete.

Sokszor lehetőség nyílik a gyakorlatban, hogy az empirikus korrelogramot a következő alakú függvénnyel közelítsük:

$$(7.29) \quad r_{\alpha,\beta}(\tau) = e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad 0 \leq \tau < \infty.$$

E függvények grafikonjai $\alpha/\beta = 0, 1/10, 1/2, 1/1, 2/1$ paraméter-viszonyok mellett az 1b ábrán láthatók. $\alpha > 0$ esetén a görbe mindig egy csillapított, cosinus jellegű hullámvonal a csillapítás annál erősebb, minél nagyobb α , ill. α/β viszony. $\alpha \geq 2\beta$ esetén gyakorlatilag már nem is periodikus a görbe, hanem csak egy meredeken lefutó ága marad meg.



1b ábra.

$\alpha = 0$ -ra viszont

$$(7.29^I) \quad r_{0,\beta}(\tau) = \cos \beta \tau, \quad 0 \leq \tau < \infty$$

cosinus-görbe adódik, ami azonban a gyakorlatban nem fordul elő; ismét csak aszimptotikus értéknek tekinthető, ha α kicsi. Ha $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ egyszerre, akkor

$$(7.29^{II}) \quad r_{0,0}(\tau) \equiv 1, \quad 0 \leq \tau < \infty$$

amely szintén csak aszimptotikus esetnek tekinthető a gyakorlat szempontjából (ez ugyanaz, mint (7.5^{II}), a végtelen hosszú szálakból készített ideális termék korrelogramja).

Ha $\alpha \rightarrow \infty$, akkor

$$(7.29^{III}) \quad r_{\alpha,\beta}(\tau) \rightarrow 1, \text{ ha } \tau = 0, \\ \rightarrow 0, \text{ ha } \tau > 0$$

(ugyanaz, mint (7.5^I), nulla hosszúságú szálakból alkotott ideális termék korrelogramja).

Ha viszont $\beta = 0$, akkor

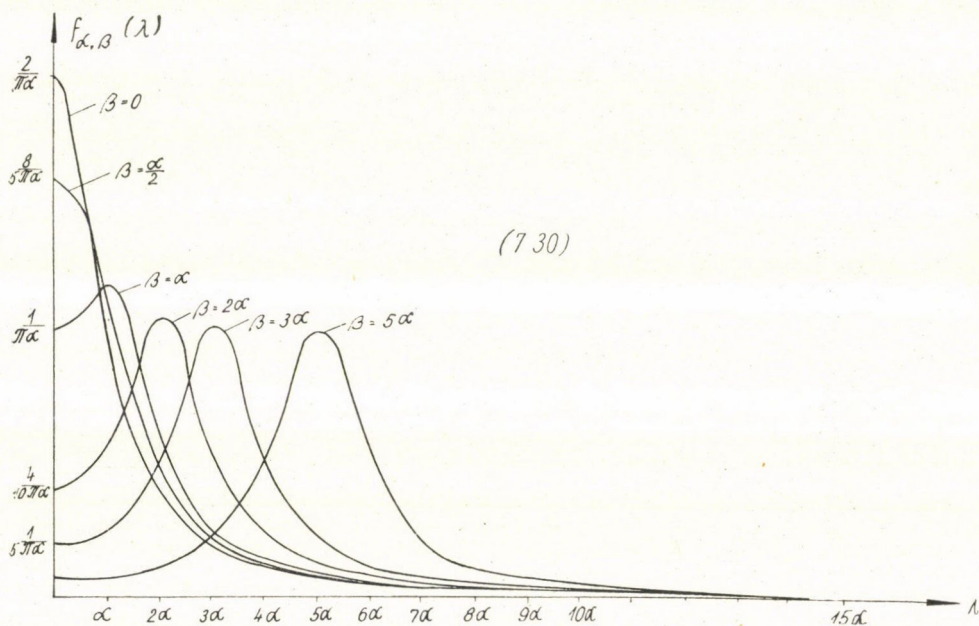
$$(7.29^{IV}) \quad r_{\alpha,0}(\tau) = e^{-\alpha\tau}, \quad 0 \leq \tau < \infty$$

éppen (7.9), az exponenciális szálhossz-eloszlású ideális termék korrelogramja $\bar{h} = \frac{1}{\alpha}$ átlagos szálhossz esetén.

Ha $\alpha/\beta \rightarrow 0$ úgy, hogy α állandó és $\beta \rightarrow \infty$, akkor $r_{\alpha,\beta}(\tau)$ -nak nincs határértéke.

A (7.29) korrelogramhoz tartozó spektrogram könnyen meghatározható, ha azt (1.9.4) formulába helyettesítjük és rövid számítás után adódik, hogy

$$(7.30) \quad f_{\alpha, \beta}(\lambda) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\beta - \lambda)^2} \right], \quad 0 \leq \lambda < \infty$$



2b ábra.

A (7.30) görbék $\beta/\alpha = 0, 1/2, 1, 2, 3, 5$ paraméter-viszonyok mellett 2b ábrán láthatók. A görbék maximuma mindig $\lambda = \beta$ -nál van és ott értékük

$$\frac{1}{\pi\alpha} \left[1 - \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2} \right],$$

azaz annál nagyobb (rögzített α -nál), minél nagyobb β és ezt annál nagyobb λ -ra veszi fel. Továbbá, ha β nő, akkor a görbe mindinkább szimetrikussá válik $\lambda = \beta$ pontra. Ha viszont β állandó és α csökken, akkor a maximális hely változatlan, de a maximum értéke nő és mindinkább „élesebbé” válik. $\alpha \rightarrow 0$ esetén a spektrogram elfajul

$$(7.30^I) \quad \left. \begin{aligned} f_{\alpha, \beta}(\lambda) &\rightarrow \infty, & \text{ha } \lambda &= \beta \\ &\rightarrow 0, & \text{ha } \lambda &\neq \beta \end{aligned} \right\},$$

vagyis akkor nincs spektrogram. Ez minden β -ra így van, speciálisan $\beta = 0$ -nál is, amikor is (7.6^{II})-höz jutunk.

$\alpha \rightarrow \infty$ esetén

$$(7.30^{III}) \quad f_{\alpha,\beta}(\lambda) \rightarrow 0, \quad 0 \leq \lambda < \infty$$

ugyanaz, mint (7.6^I).

Ha viszont $\beta = 0$, akkor

$$(7.30^{IV}) \quad f_{\alpha,0}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2},$$

amely éppen az exponenciális szálhossz-eloszlású ideális termék (7.10) spektrogramja $\bar{h} = \frac{1}{\alpha}$ -val.

Ha végül $\beta \rightarrow \infty$, akkor

$$(7.30^V) \quad f_{\alpha,\beta}(\lambda) \rightarrow 0, \quad 0 \leq \lambda < \infty$$

annak ellenére, hogy $r_{\alpha,\infty}(\tau)$ -nak nem adhatnak meghatározott értelmet. (7.30^{III}) és (7.30^V) határértékek úgy értendők, hogy $f(\lambda) \rightarrow 0$, de integrálja mindig egységnyi marad $(0, \infty)$ intervallumon. Ugyancsak így értendő (7.30^I) határérték is.

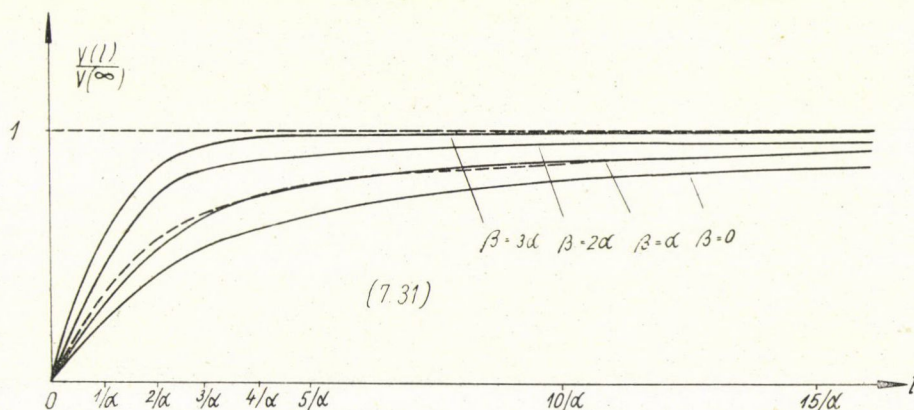
A (7.29) korrelogramhoz, ill. (7.30) spektrogramhoz tartozó belső-varianciagörbe (4.3'') alapján kiszámítva:

$$(7.31) \quad \check{V}_{\alpha,\beta}^2(L) = 1 - \frac{2}{L^2(\alpha^2 + \beta^2)^2} \{L\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + (\beta^2 - \alpha^2) - e^{-\alpha L} [(\beta^2 - \alpha^2) \cos \beta L + 2\alpha\beta \sin \beta L]\}.$$

Ennek képe $\beta/a = 0, 1, 2, 3$ esetén 3b ábrán látható. $\check{V}_{\alpha,\beta}^2(L)$ annál meredekebb érintővel indul és annál gyorsabban közelíti aszimptotikusan a $\check{V}^2(\infty) = 1$ vízszintes egyenest, minél nagyobb β/a viszony.

A 3b ábrán szaggatott vonallal berajzoltuk még a (7.7) szerinti $\check{V}_{i_1}^2(L)$ ideális belső-varianciagörbét is és látszik, hogy az elég jó egyezést mutat

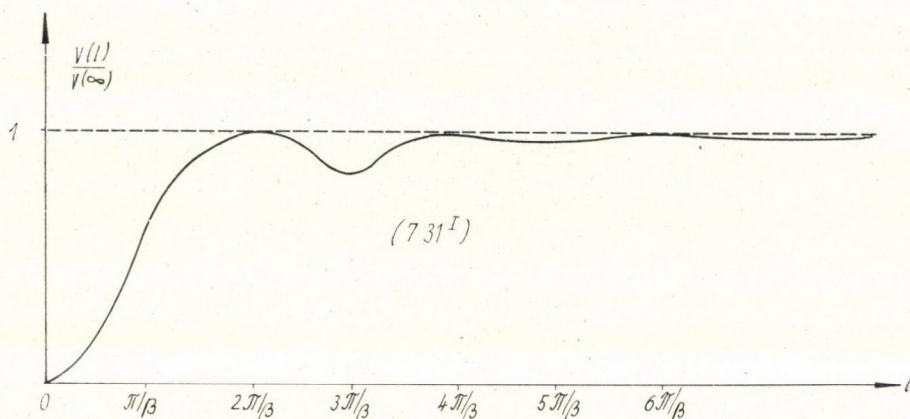
$$(7.29^0) \quad r_{\alpha,\alpha}(\tau) = e^{-\alpha\tau} \cos \alpha\tau$$



3b ábra.

korrelogramhoz tartozó

$$(7.31^0) \quad \check{V}_{a,a}^2(L) = 1 - \frac{1}{\alpha L} + \frac{1}{\alpha^2 L^2} e^{-\alpha L} \sin \alpha L$$



3c ábra.

belső-varianciagörbével, ha (7.7)-ben $a = 1/a$ helyettesítést végezzük.

Ha $a = 0$ és β rögzített, akkor

$$(7.31^I) \quad \check{V}_{0,\beta}^2(L) = 1 - \frac{\sin^2 \frac{\beta L}{2}}{\left(\frac{\beta L}{2}\right)^2}$$

a (7.29^I) korrelogramhoz tartozó belső-varianciagörbe, melyet külön felrajzoltunk a 3c ábrán. Az összes felrajzolt belső-variancia görbék között az egyetlen, melynek monoton növekedése nem töretlen. Mint mondtunk, ez azonban gyakorlatban nem fordul elő.

Ha $\beta/\alpha = \gamma$ jelölést használjuk (7.31) átalakítható a következőképpen:

$$\begin{aligned} \check{V}_{a,\beta}^2(L) = 1 - \frac{2}{(\alpha L)^2 (1 + \gamma^2)^2} \{ & \alpha L (1 + \gamma^2) + \\ & + (\gamma^2 - 1) - e^{-\alpha L} [(\gamma^2 - 1) \cos \gamma \alpha L + 2 \gamma \sin \gamma \alpha L] \}. \end{aligned}$$

Innen könnyen kimutatható, hogy ha $a \rightarrow 0$ és $\beta \rightarrow 0$ úgy, hogy γ állandó legyen, akkor

$$(7.31^{II}) \quad \check{V}_{a,\beta}^2(L) \rightarrow 0, \quad 0 \leq L < \infty$$

(ugyanaz, mint (7.7^{II})).

Ha $\alpha \rightarrow \infty$, akkor (7.31)-ből

$$(7.31^{III}) \quad \begin{aligned} \check{V}_{a,\beta}^2(L) &\rightarrow 0, & \text{ha } L &= 0 \\ &\rightarrow 1, & \text{ha } L &> 0 \end{aligned}$$

(ugyanaz, mint (7.7)).

Ha viszont $\beta = 0$, akkor

$$(7.31^{\text{IV}}) \quad \check{V}_{a,0}^2(L) = 1 - \frac{2}{L\alpha} \left[1 - \frac{1}{L\alpha} (1 - e^{-aL}) \right], \quad 0 \leq L < \infty$$

ami éppen (7.11), ha ott $\bar{h} = 1/a$, ami kell is, hogy legyen.

Ha végül $\beta \rightarrow \infty$, vagyis $\gamma \rightarrow \infty$, emellett a állandó, akkor $L = 0$ -nál nincs határérték és

$$(7.31^{\text{V}}) \quad \check{V}_{a,\beta}^2(L) \rightarrow \sim, \quad \text{ha } L = 0 \\ \rightarrow 1, \quad \text{ha } L > 0.$$

7.9. Általánosabb csillapított periodikus korrelogram

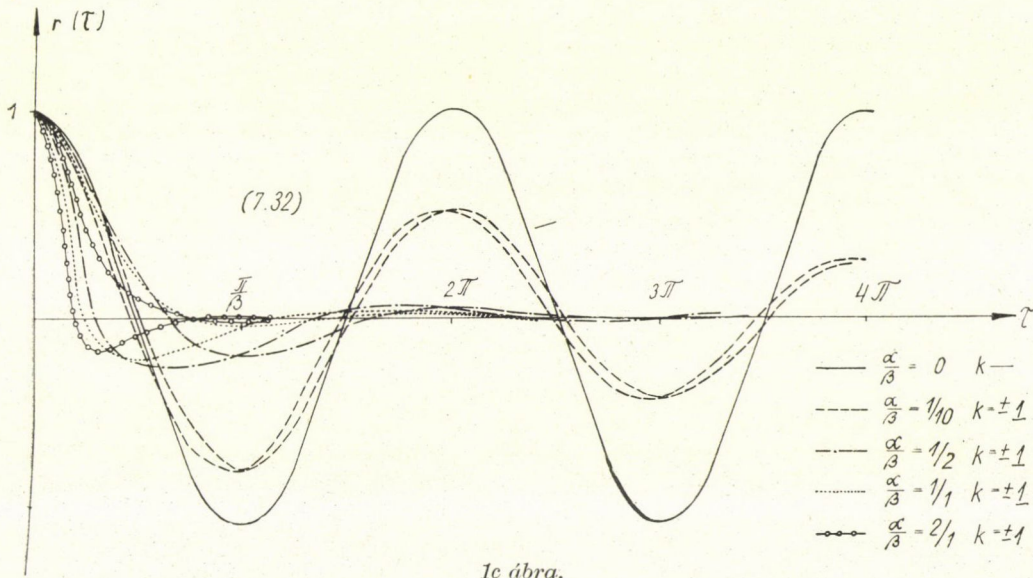
A (7.29) korrelogram felfogható a következő korrelogram speciális eseteként $k = 0$ -ra:

$$(7.32) \quad r_{a,\beta,k}(\tau) = e^{-a\tau} \left(\cos \beta\tau + k \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau \right), \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

ahol $\alpha, \beta \geq 0$, $|k| \leq 1$. Csak $|k| \leq 1$ -re lehet korrelogram, ellenkező esetben $|r_{a,\beta,k}(\tau)| \leq 1$ ($0 \leq \tau < \infty$) nem lenne biztosítva. $r_{a,\beta,k}(\tau)$ görbéje rögzített α, β mellett $k > 0$ -ra $r_{a,\beta}(\tau)$ fölött, $k < 0$ esetén alatta halad, sőt

$$(7.33) \quad r_{a,\beta}(\tau) = \frac{1}{2} [r_{a,\beta,k}(\tau) + r_{a,\beta,-k}(\tau)].$$

Az 1c ábrán $k = +1$ és $k = -1$ mellett felrajzoltuk $\alpha/\beta = 0, 1/10, 1/2, 1/1$ és $2/1$ paraméter-viszonyokhoz tartozó görbepárokat. $|k| < 1$ értékekhez tar-



1c ábra.

tozó görbék a $k = +1$, és $k = -1$ görbepár között haladnának. Az ábrából is látható, hogy k értéke lényegesen csak α/β nagyobb értékénél befolyásolja a görbét, kis α/β -nál a (7.32) sinusos tagja elhanyagolható.

A (7.32)-höz tartozó spektrogramot és belső-varianciagörbét nem ábrázoljuk, csak formulájukat írjuk fel:

$$(7.34) \quad f_{\alpha,\beta,k}(\lambda) = \frac{\alpha}{\beta\pi} \left[\frac{\beta + k(\beta + \lambda)}{\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2} + \frac{\beta + k(\beta - \lambda)}{\alpha^2 + (\beta - \lambda)^2} \right], \quad 0 \leq \lambda < \infty,$$

$$(7.35) \quad \begin{aligned} \check{V}_{\alpha,\beta,k}^2(L) = 1 - \frac{2}{L^2(\alpha^2 + \beta^2)^2} & \left\{ L \alpha(1+k)(\alpha^2 + \beta^2) + \beta^2 - \alpha^2(1+2k) - \right. \\ & \left. - e^{-\alpha L} \left[(\beta^2 - \alpha^2 \langle 1+2k \rangle) \cos \beta L + \left(\frac{k\alpha}{\beta} \langle \beta^2 - \alpha^2 \rangle + 2\alpha\beta \right) \sin \beta L \right] \right\}. \end{aligned}$$

Természetesen $k = 0$ -ra (7.32), (7.34), (7.35) rendre átmegy (7.29), (7.30), (7.31)-be.

A fonodai termékek egyenletlenségeit elméletileg elemző munkákban az említetteken kívül más korrelogramok is előfordulnak még a valóságos korrelogramok közelítésére, mi azonban többre nem térünk ki. A leggyakoribb eseteket így is összefoglaltuk.

FÜGGELÉK

Az ideális termék korrelogramjának meghatározása

A (7.1) képlet levezetése különböző módszerek és elvek alapján több helyen megtalálható, így pl. K. MIHIRA japán kutató (6) cikkében is.

A formulát azonban egyszerűen megkaphatjuk a következőképpen is.

Tekintsünk először egy T hosszúságú termékdarabot, tegyük fel, hogy a benne szereplő szálak száma N , a szálak hosszeloszlásának sűrűségfüggvénye $g(h)$, átlagos hossz \bar{h} . Jelöljük $n(x)$ -el a termékdarab x keresztmetszetét keresztező szálak számát, $n(x)$ értékei lehetnek $0, 1, 2, \dots, N$.

$n(x)$ valószínűségi változót felfoghatjuk N páronként független valószínűségi változó összegeként

$$n(x) = \sum_{i=1}^N \xi_i(x),$$

ahol

$$\xi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik szál keresztezi } x\text{-et,} \\ 0, & \text{ellenkező esetben.} \end{cases}$$

Annak valószínűsége, hogy az i -edik szál keresztezze x pontot h_i/T , ahol h_i az i -edik szál hossza, vagyis

$$P(\xi_i(x) = 1 | h_i = h) = \frac{h}{T}.$$

A teljes valószínűség tétele egy általánosítása szerint ez esetben

$$\mathbf{P}(\xi_i(x) = 1) = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \frac{h}{T} g(h) dh = \frac{\bar{h}}{T}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Igy

$$\mathbf{M}\{\xi_i^2(x)\} = \mathbf{M}\{\xi_i(x)\} = \frac{\bar{h}}{T}$$

$$\mathbf{M}\{[\xi_i(x) - \mathbf{M}\{\xi_i(x)\}]^2\} = \frac{\bar{h}}{T} - \left(\frac{\bar{h}}{T}\right)^2.$$

Ezekután könnyen kiszámíthatjuk, $n(x)$ várható értékét és varianciáját.

$$(I) \quad \bar{n} = \mathbf{M}\{n(x)\} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}\{\xi_i(x)\} = N \frac{\bar{h}}{T}.$$

$$(II) \quad \sigma^2 = \mathbf{M}\{[n(x) - \bar{n}]^2\} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}\{[\xi_i(x) - \mathbf{M}\{\xi_i(x)\}]^2\} = N \frac{\bar{h}}{T} - N \frac{\bar{h}^2}{T^2}.$$

Meg kell még határoznunk $n(x) n(x + \tau)$ szorzat várható értékét. Minthogy

$$\mathbf{M}\{\xi_i(x) \xi_j(y)\} = \mathbf{M}\{\xi_i(x)\} \mathbf{M}\{\xi_j(y)\}, \quad \text{ha } i \neq j, x, y \text{ tetszőleges, ezért}$$

$$\mathbf{M}\{n(x) n(x + \tau)\} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}\{\xi_i(x) \xi_i(x + \tau)\} + \sum_{i \neq j} \mathbf{M}\{\xi_i(x)\} \mathbf{M}\{\xi_j(x + \tau)\}.$$

Azonban

$$\mathbf{M}\{\xi_i(x) \xi_i(x + \tau)\} = \mathbf{P}\{\xi_i(x) = 1, \xi_i(x + \tau) = 1\},$$

vagyis annak valószínűsége, hogy az i -edik szál keresztezze egyszerre x és $x + \tau$ pontot, ami, ha $\tau \leq h_{\max}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_1(x) = 1, \xi_1(x + \tau) = 1) &= \int_{\tau}^{h_{\max}} \mathbf{P}(\xi_i(x) = 1, \xi_i(x + \tau) = 1 | h_i = h) dP(h_i < h) = \\ (III) \quad &= \int_{\tau}^{h_{\max}} \frac{h - \tau}{T} g(h) dh, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Továbbá

$$\mathbf{M}\{\xi_i(x)\} \mathbf{M}\{\xi_j(x + \tau)\} = \frac{\bar{h}^2}{T^2}, \quad i \neq j.$$

A kapott eredményeket behelyettesítve, illetve szorozva a tagok számával

$$(IV) \quad \mathbf{M}\{n(x) n(x + \tau)\} = N \int_{\tau}^{h_{\max}} \frac{h - \tau}{T} g(h) dh + N(N - 1) \frac{\bar{h}^2}{T^2}.$$

(I), (II) és (IV) alapján a korrelogram közelítő értéke

$$r_i(\tau) \approx \frac{N \int_{\tau}^{h_{\max}} \frac{h - \tau}{T} g(h) dh + N(N-1) \frac{\bar{h}^2}{T^2} - N^2 \frac{\bar{h}^2}{T^2}}{N \frac{\bar{h}}{T} - N \frac{\bar{h}^2}{T^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\bar{h}} \int_{\tau}^{h_{\max}} (h - \tau) g(h) dh - \frac{\bar{h}}{T}}{1 - \frac{\bar{h}}{T}}.$$

Ha most $T \rightarrow \infty$, megkapjuk $r_i(\tau)$ pontos értékét, ha a határérték létezik, vagyis valóban

$$r_i(\tau) = \frac{1}{\bar{h}} \int_{\tau}^{h_{\max}} (h - \tau) g(h) dh, \quad 0 \leq \tau \leq h_{\max}$$

a (7.1) alatti korrelogram, figyelembe véve, hogy $0 \leq \tau \leq h_{\min}$ esetén az integrálban az alsó határ h_{\min} , $\tau \geq h_{\max}$ esetén pedig (III) valószínűség nyilvánvalóan 0.

(Beérkezett: 1959. augusztus 13.)

IRODALOM

- [1] STANGE, K.: „Probenahme vom Band.” *Metrika* **1** (1958) 177—222.
- [2] GROSSBERG, P., PALMER, R. C.: „The Use of the Zellweger Irregularity Tester in Finding the Variance-Length Curve of Worsted Yarn.” *The Journal of the Textile Institute* **43** (1954) Trans. T. 275.
- [3] TOWNSEND, M. W., COX, D. R.: „The Analysis of Yarn Irregularity.” *The Journal of the Textile Institute* **40** (1951), Proc. P. 107.
- [4] VANDEN ABEELE, A. M.: „Réflexions au sujet des concepts utilisés pour expérimenter l'irregularité des fils textiles.” *Ann. Sc. Tex. Belg. Bruxelles* **1** (1956) 91.
- [5] ЯГЛОМ, А. М.: «Введение в теорию стационарных случайных функций.» *Успехи Мат. Наук*, **8** (1952), 5 (51) 1—168.
- [6] MIHIRA, K.: „Some Theoretical Considerations on the Irregularity of Drafting.” *Journal of the Textile Machinery Society of Japan* **2** (1956) No 1.
- [7] BRENY, H.: „The Calculation of the Variance-Length Curve from the Length Distribution of Fibres I, II.” *The Journal of the Textile Institute* **40** (1953) Proc. Pl, P 10.
- [8] SPENCER-SMITH, J. L., TODD, H. A. C.: „A Time Series Met with in Textile Research.” *Suppl. J. Roy. Stat. Soc.* **7** (1941) 131.
- [9] MARTINDALE, J. G.: „A New Method of Measuring the Irregularity of Yarns with Some Observations on the Origin of Irregularities in Worsted Slivers and Yarns.” *The Journal of the Textile Institute* **36** (1945) Trans. T 35.
- [10] VANDEN ABEELE, A. M.: „Contribution to the Study of Irregularity of Yarns, Rovings and Slivers.” *The Journal of the Textile Institute* **40** (1951) Proc. P 162.
- [11] HANNAH, M., RODDEN, S.: „Variance-Length Relations in a Yarn With Restricted Variation in Fibre Position.” *The Journal of the Textile Institute* **45** (1956) Trans. T 402.
- [12] DOOB, J. L.: *Stochastic Processes*. New-York, 1952.
- [13] ГНЕДЕНКО, Б. В.: *Курс теории вероятностей*. Москва, 1954.
- [14] GRENNANDER, U., ROSENBLATT, M.: *Statistical Analysis of Stationary Time series*. New-York, 1957.

A CHARACTERISTIC OF STATIONARY PROCESSES USED IN TEXTILE RESEARCH

by

J. TANKÓ

Abstract

In the scientific literature on textiles a great number of concepts is used when investigating theoretically the irregularity properties of spun products, the analogues of which are well known and defined mathematically in the theory of stationary processes.

There is, however, the concept "length-variance" with textiles whose analogue with stationary processes is defined the first time in this study.

In § 1 known theorems are cited as preparation for dealing with the problems in the following §§. The definition of length-variance is based on the use of "moving averages" that are discussed in § 2. By starting from a process $\xi(t)$ being stationary both in the weak and strong sense and satisfying certain requirements the single and double moving averages are defined by formulae (2.1) and (2.3).

In § 3 the concept general length variance — a term lending itself from the domain of textile research — is defined by (3.4). It is the expected value of the process called in short "moving variance" and defined by (3.1) or otherwise that of the variance of the moving average $\xi_l(u)$ having a range l and calculated with the mean value of moving average measured within a length L .

In § 4 the particular cases of the general length-variance $C^2(l, L)$ are discussed, being of interest by themselves and of peculiar importance in textiles.

With the assumption $l = 0$ the within-variance, with the one $L = \infty$ the between-variance, and with both assumptions $l = 0$ and $L = \infty$ at the same time the total variance is obtained.

The connections between different length-variances and correlation function $r(\tau)$, spectrogram $f(\lambda)$ and variance σ^2 of the stationary process are given by the formulae in § 6.

In the last § the particular functions of between-variance pertaining to theoretical correlograms and spectrograms as used often in theoretical research work on textiles are established.

The within-variance of s. c. ideal spun products having correlograms of the shape as defined by (7.1) is given by (7.7), (7.7^I), (7.7^{II}), (7.11), (7.21) and (7.28) for the case of fibre length distribution according to (7.4) as well as for its particular cases, further for the distributions as represented by (7.8), (7.12) and (7.22). The curves of formulae (7.7) and (7.11) are shown on fig. 3a.

The within-variance function of a stationary process having a correlogram as represented by (7.29) is given by (7.31) and its particular cases by (7.31^o), (7.31^I), (7.31^{II}), (7.31^{III}), (7.31^{IV}) and (7.31^V). On fig. 3b the curve of (7.31) pertaining to several parameters is shown. The function of the within-variance of a stationary process having a correlogram as represented by (7.32) is given by (7.35).

ОДНА ИЗ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ, УПОТРЕБЛЯЕМАЯ В ТЕКСТИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Л. TANKÓ

Резюме

В научной литературе по текстильной промышленности, в исследовании неровностных свойств изделий прядельного производства употребляется ряд понятий, равноценное значение которых известно и хорошо-дефинируемо математически в теории стационарных процессов. Все же существует одно понятие, известное в текстильной промышленности под названием «вариации длины»; равноценное значение которого у стационарных процессов впервые дефинировалось в настоящей работе.

Для подготовки этой дефиниции в § 1 цитируются теоремы намеченные для использования при обсуждениях. Дефиниция вариации длины основывается на использовании так наз. «движущихся средних»; данный вопрос обсуждается в § 2. Исходя из $\xi(t)$, удовлетворяющее определенные условия и в узком и широком смысле стационарного процесса, формулы (2.1) и (2.3) дефинируют однократные и двукратные движущиеся средние.

В § 3 понятие общей вариации длины, взятое из текстильной литературы, дефинируется формулой (3.4). Это является ожиданием величине процесса, называемого коротко «движущейся вариацией» или другими словами является ожиданием величине вариации рассчитанной при помощи среднего значения движущейся средней объема l в интервале длины L .

В § 4 занимаемся с само по себе интересными специальными случаями, общей вариации длины $C^2(l, L)$, имеющими особое значение в текстильной промышленности. При $l = 0$ получается внутренняя вариация; для $L = \infty$ внешняя вариация, а в случае одновременности $l = 0, L = \infty$ — полная вариация.

Соотношения между вариацией длины и корреляционной функцией $r(\tau)$, спектрограммой $f(\lambda)$ и вариацией σ^2 стационарного процесса резюмирована формулами §-а 6.

В последнем параграфе определены конкретные функции внутренней вариации, относящейся к теоретическим коррелограммам и спектрограммам, часто употребляемым в теории текстильных исследований. Внутренние вариации так наз. идеальных изделий прядельного производства, показывающих коррелограммы формы (7.1), определяются формулами (7.7), (7.7^I), (7.7^{II}), (7.11), (7.21) и (7.28) с распределением волокон (7.4) и специальных случаев, а также для случаев (7.8), (7.12) и (7.22). Кривые функций (7.7) и (7.11) видны на рис. 3а. Функция внутренней вариации стационарного процесса с коррелограммой (7.29) будет (7.31), а в специальных случаях (7.31^I), (7.31^{II}), (7.31^{III}), (7.31^{IV}) и (7.31^V). Кривая (7.31) относящаяся к нескольким параметрам, показана на рис. 3б. Функция внутренней вариации стационарного процесса в коррелограммой (7.31) будет (7.35).

A LEHMANN PRÓBÁRÓL

ZAJTA AURÉL¹

A LEHMANN-próba két minta összehasonlítására szolgál. A próba a nem-paraméteres módszerek közé, pontosabban: a rendezett minták elméletébe tartozik, és a WILCOXON-próba továbbfejlesztésének tekinthető.

Definíciók és jelölések

A két összehasonlítandó minta közül az egyiknek elemeit ξ_i -vel ($i = 1, 2, \dots, m$), a másiknak az elemeit η_k -val ($k = 1, 2, \dots, n$) jelöljük. A minták elemszámai, m és n nem szükségképpen egyenlők. A ξ_i , ill. η_k mintavételi változók eloszlásfüggvényeit $F(x)$ -szel, ill. $G(x)$ -szel jelöljük; ezekről feltesszük, hogy folytonosak. Így zérussal egyenlő annak a valószínűsége, hogy a ξ_i és η_k változók együttesében két változó értéke megegyezzek, s ezért jogosan tételezhetjük fel, hogy valamennyi ξ_i és η_k különböző. Ebből viszont tovább következik, hogy a ξ_i és η_k változók, külön-külön és együttesen is, szigorúan növekvő sorozatba rendezhetők.

A nagyság szerint rendezett ξ -változók közül az i -ediket ξ_i^* -gal, s hasonlóképp az η -változók rendezett sorában a k -adikat η_k^* -gal jelöljük. Ha a két mintát egyesítjük és ismét nagyság szerint növekvő sorozatba rendezzük, a ξ_i^* , ill. η_k^* változók pozíciója általában megváltozik, rangszámaik általában nagyobbak, mint az eredeti i , ill. k rangszámok (sorszámok). A ξ_i^* új rangszámát r_i -vel, az η_k^* új rangszámát pedig s_k -val jelölve, fennáll, hogy

$$(1) \quad i + k = \begin{cases} r_i, & \text{ha } \eta_k^* < \xi_i^* < \eta_{k+1}^*, \\ s_k, & \text{ha } \xi_i^* < \eta_k^* < \xi_{i+1}^*. \end{cases}$$

A minták eloszlásfüggvényeit (az ún. empirikus eloszlásfüggvényeket) $F_m(x)$ -szel, ill. $G_n(x)$ -szel jelöljük. Ezek definíciója, mint ismeretes, a következő:

$$(2) \quad F_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq \xi_1^*, \\ \frac{i}{m}, & \text{ha } \xi_i^* < x \leq \xi_{i+1}^*, \\ 1, & \text{ha } \xi_m^* < x, \end{cases}$$

¹ Agrártudományi Egyetem.

$$(2a) \quad G_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq \eta_1^*, \\ \frac{k}{n}, & \text{ha } \eta_k^* < x \leq \eta_{k+1}^*, \\ 1, & \text{ha } \eta_n^* < x. \end{cases}$$

Szükségünk lesz még a z_{ik} és \bar{z}_{ik} karakterisztikus változókra. Ezeket az alábbi módon értelmezzük:

$$(3) \quad z_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \eta_k < \xi_i, \\ 1, & \text{ha } \eta_k > \xi_i. \end{cases}$$

$$(4) \quad \bar{z}_{ik} = 1 - z_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \eta_k < \xi_i, \\ 1, & \text{ha } \eta_k > \xi_i. \end{cases}$$

Figyelemre méltó, hogy míg az empirikus eloszlásfüggvények definíciói a rendezett mintaelemek alapján történtek, addig a z_{ik} definíciójához az eredeti mintaelemeket használtuk fel.

Bevezetés

A LEHMANN-próbánál, akárcsak a WILCOXON próbánál, nullhipotézisnek az $F(x) = G(x)$ hipotézist, alternatív hipotézisnek pedig az ettől különböző hipotéziseket nevezzük, tehát minden alternatív hipotézisnél legalább egy mérhető halmazon $F(x) \neq G(x)$. Amíg azonban a WILCOXON próbánál az

$$(5) \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (G(x) - F(x)) dF(x).$$

Stieltjes-integrált becsüljük meg, melynek értéke alternatív hipotézis esetén is zérussá válhat, a LEHMANN-próbánál lényegében az

$$(6) \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (G(x) - F(x))^2 dF(x)$$

integrált becsüljük, amely csak a két eloszlásfüggvény egyezése esetén tűnhet el. A két eloszlásfüggvény különböző volta viszont mindig egy irányban (pozitív irányban) tolja el az I_2 értékét, amiből következik, hogy az I_2 becslésére szolgáló mennyiségnek is csak a pozitív irányú eltéréséből következtethetünk a két eloszlásfüggvény különböző voltára, más szóval: a próba egyoldalú.

A LEHMANN- és a WILCOXON-próba rendstatisztikai jellege abból a tényből fakad, hogy az I_2 és az I_1 Stieltjes-integrálok becsléséhez nincs szükségünk a mintaelemek tényleges értékeire, csupán egymáshoz viszonyított helyzetükre, ezt pedig a rangszámok egyértelműen meghatározzák. Az I_2 -vel kapcsolatos becslés céljára LEHMANN [1] és RÉNYI [2] más-más kifejezést adtak; a RÉNYI-től származó W lényegesen egyszerűbb, mint a LEHMANN-féle L -vel jelölt kifejezés. Az L és W között egyszerű lineáris kapcsolat áll fenn:

$$(7) \quad L = 2W - 1.$$

Ezt CSÁKI E. ismerte fel először [3], s ezzel bebizonyította, hogy a RÉNYI által javasolt próba azonos a LEHMANN-próbával.

E cikkben új bizonyítást adom a (7) összefüggésnek, s ezenkívül megadok egy harmadik statisztikai függvényt is (ezt V -vel fogjuk jelölni) a próba végrehajtására, mely bizonyos szempontból még a RÉNYI-féle W -nél is egyszerűbb. Végül kiszámítom a W szórásnégyzetét az általános esetben (tehát alternatív hipotézis esetén), ahonnan $G(x) = F(x)$ helyettesítésre könnyen adódik a szórásnégyzetnek nullhipotézis teljesülése esetén érvényes képlete.

1. §. A próba alapjául szolgáló kifejezések

A LEHMANN-féle L -függvény eredeti definíciója:

$$(8) \quad \frac{L_1 + L_2}{\binom{m}{2} \binom{n}{2}},$$

ahol L_1 jelenti azon $(\xi_i, \xi_j, \eta_k, \eta_l)$ elemnégyek számát, melyekre az

$$\eta_k < \xi_i, \eta_k < \xi_j, \eta_l < \xi_i, \eta_l < \xi_j$$

egyenlőtlenségek egyidejűleg teljesülnek, s hasonlóképpen L_2 jelenti azon $(\xi_i, \xi_j, \eta_k, \eta_l)$ elemnégyesek számát, melyekre az

$$\eta_k > \xi_i, \eta_k > \xi_j, \eta_l > \xi_i, \eta_l > \xi_j$$

egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek. A bevezetett karakterisztikus változókkal L_1 és L_2 a következőképp írható:

$$(9) \quad \begin{cases} L_1 = \sum_{i,j,k,l} z_{ik} z_{il} z_{jk} z_{jl}, \\ L_2 = \sum_{i,j,k,l} \bar{z}_{ik} \bar{z}_{il} \bar{z}_{jk} \bar{z}_{jl}, \end{cases}$$

megjegyezve, hogy itt (és a továbbiakban mindenütt) az egyező helyen álló de eltérő módon jelölt indexek egyúttal eltérő értékű indexeket is jelentenek

A képletekből látható, hogy az $\frac{L_1}{\binom{m}{2} \binom{n}{2}}$ kifejezéssel a $z_{ik} z_{il} z_{jk} z_{jl}$ szorzat

várható értékét, az $\frac{L_2}{\binom{m}{2} \binom{n}{2}}$ kifejezéssel pedig a $\bar{z}_{ik} \bar{z}_{il} \bar{z}_{jk} \bar{z}_{jl}$ várható értékét

becsüljük meg. Mivel pedig

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{M}(z_{ik} z_{il} z_{jk} z_{jl}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} G^2(x) (1 - F(x)) dF(x), \\ \mathbf{M}(\bar{z}_{ik} \bar{z}_{il} \bar{z}_{jk} \bar{z}_{jl}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) (1 - G(x)) dG(x), \end{cases}$$

kis számítással azonnal adódik, hogy

$$(11) \quad \mathbf{M}(L) = \frac{1}{3} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} (G(x) - F(x))^2 dF(x) = \frac{1}{3} + 2I_2.$$

A RÉNYI-féle W -kifejezés definíciója egyszerűbb:

$$(12) \quad W = \frac{W_1}{m \binom{n}{2}} + \frac{W_2}{n \binom{m}{2}}.$$

Itt W_1 jelenti azon (ξ_i, η_k, η_l) elemhármasok számát, amelyekre

$$\eta_k < \xi_i \text{ és } \eta_l < \xi_i$$

egyidejűleg teljesül, s hasonlóképp W_2 jelenti azon (ξ_i, ξ_j, η_k) elemhármasok számát, amelyekre

$$\eta_k > \xi_i \text{ és } \eta_k > \xi_j$$

egyszerre teljesül. A W_1 és W_2 karakterisztikus változókkal így fejezhetők ki:

$$(13) \quad \begin{cases} W_1 = \sum_{i,k,l} z_{ik} z_{il}, \\ W_2 = \sum_{i,j,k} \bar{z}_{ik} \bar{z}_{jk}. \end{cases}$$

Ezeknek megfelelően a $\frac{W_1}{m \binom{n}{2}}$ -vel a $z_{ik} z_{il}$ szorzat várható értékét, a $\frac{W_2}{n \binom{m}{2}}$ -vel pedig a $\bar{z}_{ik} \bar{z}_{jk}$ szorzat várható értékét becsüljük meg. Minthogy pedig

$$(14) \quad \begin{cases} \mathbf{M}(z_{ik} z_{il}) = \int_{-\infty}^{\infty} G^2(x) dF(x), \\ \mathbf{M}(\bar{z}_{ik} \bar{z}_{jk}) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) dG(x), \end{cases}$$

kis számítással most azt kapjuk, hogy

$$(15) \quad \mathbf{M}(W) = \frac{2}{3} + \int_{-\infty}^{\infty} (G(x) - F(x))^2 dF(x) = \frac{2}{3} + I_2.$$

A (11)-ből és (15)-ből következik az

$$\mathbf{M}(L) = 2\mathbf{M}(W) - 1,$$

ill.

$$\mathbf{M}(2W - L - 1) = 0$$

összefüggés. Ebből már sejteni lehet, hogy a $(2W - L - 1)$ mennyiségnek nemesak a várható értéke, hanem az értéke is zérus, azaz a (7) is fennáll.² Ennek bizonyítását a 2. pontban végezzük el. A bizonyítás a W és L explicit alakjainak összehasonlításával történik, ezért előbb az explicit alakokat adjuk közre:

$$(16) \quad \begin{cases} L_1 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m (r_i - i)(r_i - i - 1)(m - i), \\ L_2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^m (s_k - k)(s_k - k - 1)(n - k), \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} W_1 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (r_i - i)(r_i - i - 1), \\ W_2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (s_k - k)(s_k - k - 1). \end{cases}$$

E rangszámok függvényeiként megadott formulák könnyen beláthatók a fentebb közölt definíciók alapján.

2. §. Identikus összefüggések levezetése

Az (1) összefüggést felhasználva, rendre kiszámítjuk az empirikus eloszlásfüggvényekből képezett alábbi Stieltjes-integrálokat:

$$(18) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G_n(x) dF_m(x) = \sum_{i=1}^m \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{nm} \cdot \sum_{i=1}^m (r_i - i),$$

$$(19) \quad \int_{-\infty}^{\infty} F_m(x) dG_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{i}{m} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{mn} \cdot \sum_{k=1}^n (s_k - k),$$

$$(20) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G_n^2(x) dF_m(x) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{n^2 m} \cdot \sum_{i=1}^m (r_i - i)^2,$$

$$(21) \quad \int_{-\infty}^{\infty} F_m^2(x) dG_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{m^2 n} \cdot \sum_{k=1}^n (s_k - k)^2,$$

² A várható értékek között fennálló összefüggésből tulajdonképpen szintén következik a megfelelő statisztikai függvények közötti hasonló összefüggés, ha alkalmazzuk Lehmann és Scheffé egy lemmáját (vö. [1] vagy [3], 314. o.).

$$(22) \quad \int_{-\infty}^{\infty} F_m(x) dG_n^2(x) = \sum_{k=1}^n \frac{i}{m} \cdot \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^2 - \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{mn^2} \cdot \sum_{k=1}^n (s_k - k)(2k - 1),$$

$$(23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G_n(x) dF_m^2(x) = \sum_{i=1}^m \frac{k}{n} \cdot \left\{ \left(\frac{i}{m} \right)^2 - \left(\frac{i-1}{m} \right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{nm^2} \cdot \sum_{i=1}^m (r_i - i)(2i - 1),$$

$$(24) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G_n^2(x) dF_m^2(x) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{2i-1}{m^2} = \frac{1}{n^2 m^2} \cdot \sum_{i=1}^m (r_i - i)^2 \cdot (2i - 1),$$

$$(25) \quad \int_{-\infty}^{\infty} F_m^2(x) dG_n^2(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{m} \right)^2 \cdot \frac{2k-1}{n^2} = \frac{1}{m^2 n^2} \cdot \sum_{k=1}^n (s_k - k)^2 \cdot (2k - 1).$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva, a (18)- és (19)-ből az alábbi eredményt nyerjük:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_n(x) dF_m(x) + \int_{-\infty}^{\infty} F_m(x) dG_n(x) = \left[G_n(x) \cdot F_m(x) \right]_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= 1 = \frac{1}{nm} \cdot \sum_{i=1}^m (r_i - i) + \frac{1}{mn} \cdot \sum_{k=1}^n (s_k - k),$$

azaz

$$(26) \quad \sum_{i=1}^m (r_i - i) + \sum_{k=1}^n (s_k - k) = mn.$$

Hasonló összefüggéseket kapunk a (20)–(22), (21)–(23), ill. a (24) és (25) összevetésével:

$$(27) \quad \sum_{i=1}^m (r_i - i)^2 + \sum_{k=1}^n (s_k - k)(2k - 1) = n^2 m,$$

$$(28) \quad \sum_{k=1}^n (s_k - k)^2 + \sum_{i=1}^m (r_i - i)(2i - 1) = m^2 n,$$

$$(29) \quad \sum_{i=1}^m (r_i - i)^2 (2i - 1) + \sum_{k=1}^n (s_k - k)^2 (2k - 1) = m^2 n^2.$$

Megjegyezzük, hogy a (26) közvetlenül is levezethető:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (r_i - i) + \sum_{k=1}^n (s_k - k) &= \sum_{t=1}^{m+n} t - \sum_{i=1}^m i - \sum_{k=1}^n k = \\ &= \frac{1}{2} (m+n)(m+n+1) - \frac{1}{2} m(m+1) - \frac{1}{2} n(n+1) = mn. \end{aligned}$$

Fentebb mégis azért alkalmaztuk az integrálokkal történő levezetést, hogy ezzel a módszert bemutassuk.

A kapott identitások kombinációjából újabbakat nyerhetünk. Adjuk össze a (29) és (26) megfelelő oldalait és vonjuk ki ezekből a (27) és (28) megfelelő oldalait. Az összevonások elvégzése és 4-gyel való osztás után az alábbi összefüggés származik:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m (r_i - i)(r_i - i - 1)(i - 1) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (s_k - k)(s_k - k - 1)(k - 1) &= \\ &= \binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

Ennek felhasználásával és a (17)-re való tekintettel a LEHMANN-féle L -függvény a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m (r_i - i)(r_i - i - 1)(m - 1) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (s_k - k)(s_k - k - 1)(n - 1) - \binom{m}{2} \binom{n}{2}}{\binom{m}{2} \binom{n}{2}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m (r_i - i)(r_i - i - 1)}{m \binom{n}{2}} + \frac{\sum_{k=1}^n (s_k - k)(s_k - k - 1)}{n \binom{m}{2}} - 1, \end{aligned}$$

amiről már nem nehéz felismerni, hogy $(2W - 1)$ -gyel egyenlő (vö. (12) és (17)). Ezzel a (7) azonosságot bebizonyítottuk.

További újabb identitásokhoz jutunk, ha a (27), ill. (28) megfelelő oldaliból kivonjuk a (26) megfelelő oldalait:

$$(30) \quad \sum_{i=1}^m (r_i - i)(r_i - i - 1) + 2 \sum_{k=1}^n (s_k - k)(k - 1) = nm(n - 1),$$

$$(31) \quad \sum_{k=1}^n (s_k - k)(s_k - k - 1) + 2 \sum_{i=1}^m (r_i - i)(i - 1) = nm(m - 1).$$

Ha bevezetjük a következő jelöléseket:

$$V_1 = \sum_{i=1}^m (r_i - i) (i - 1), \quad (32)$$

$$V_2 = \sum_{k=1}^n (s_k - k) (k - 1),$$

ezeknek és a (17) alatti összefüggéseknek figyelembevételével a (30) és (31). így is írható:

$$W_1 + V_2 = m \binom{n}{2}, \quad (33)$$

$$W_2 + V_1 = n \binom{m}{2}.$$

Amennyiben tehát a

$$V = \frac{V_1}{nm(m-1)} + \frac{V_2}{mn(n-1)} \quad (34)$$

képlettel definiálunk új statisztikai függvényt, ez szintén felhasználható a próba céljára, mivel a W -vel a következő kapcsolatban áll:

$$V = 1 - \frac{W}{2}. \quad (35)$$

A (35)-ös összefüggés a (12), (33) és (34) összevetéséből adódik.

Néhány megjegyzés az új kifejezéssel kapcsolatban. A (34)-gyel definiált V azért tekinthető egyszerűbbnek a W -nél, mivel a rangszámoknak csak lineáris kifejezéseit tartalmazza. Ez mindenképp az elméleti számításoknál jelenthet előnyt, mivel a próba gyakorlati alkalmazásánál felmerülő numerikus számításoknál a W könnyebben számítható ki, mint a V , annak ellenére, hogy a rangszámokban kvadratikusan. A V -nek a gyakorlatban való felhasználásánál ügyelni kell arra is, hogy a nullhipotézis nem-teljesülésére most a negatív irányú eltéréstől következtetünk, tekintettel a (35)-re.

Az L -hez és W -hez hasonlóan a V is definiálható a mintaváltozók nagyságrendi eseményei segítségével. V_1 jelenti azon (η_k, ξ_i, ξ_j) elemhármasok számát, melyekre

$$\eta_k < \xi_j, \quad \xi_i < \xi_j$$

és V_2 azon (ξ_i, η_k, η_l) elemhármasok számát, melyekre

$$\xi_i < \eta_l, \quad \eta_k < \eta_l$$

egyidejűleg teljesül. Tekintettel azonban arra, hogy

$$\mathbf{P}(\eta_k < \xi_j, \xi_i < \xi_j) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) F(x) dF(x),$$

és

$$\mathbf{P}(\xi_i < \eta_l, \eta_k < \eta_l) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) G(x) dG(x),$$

a V -vel tulajdonképpen a jobboldalakon álló két integrál összegét becsüljük meg, azaz

$$\mathbf{M}(V) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) F(x) dF(x) + \int_{-\infty}^{\infty} F(x) G(x) dG(x),$$

vagy a parciális integrálások megfelelő alkalmazásával:

$$\mathbf{M}(V) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (G(x) - F(x))^2 \cdot dF(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot I_2,$$

teljes összhangban a (35)-tel és (15)-tel.

3. §. A W szórásnégyzetének kiszámítása

Alternatív hipotézis esetén a három statisztikai függvény (L , W és V) közül aránylag a W szórásnégyzete határozható meg legkönnyebben, az is csak akkor, ha a (12) és (13) alakokból indulunk ki. A (12)-ből következik:

$$(36) \quad \mathbf{D}^2(W) = \frac{1}{m^2 \cdot \binom{n}{2}^2} \cdot \mathbf{D}^2(W_1) + \frac{1}{n^2 \binom{m}{2}^2} \cdot \mathbf{D}^2(W_2) + \frac{2 \text{Cov}(W_1, W_2)}{mn \binom{m}{2} \binom{n}{2}}.$$

Cov-val a zárójelbe tett két változó kovarianciáját jelöltük, ennek definíciója

$$\text{Cov}(\zeta_1, \zeta_2) = \mathbf{M}\{(\zeta_1 - \mathbf{M}(\zeta_1))(\zeta_2 - \mathbf{M}(\zeta_2))\}.$$

A (36) szerint a W szórásnégyzetéhez a W_1 és W_2 kovarianciáját és szórásnégyzeteit kell előbb meghatározunk.

A W_1 szórásnégyzetének kiszámítását az alábbi számításmenet mutatja:

$$(37) \quad \begin{aligned} W_1 &= \sum_{i,k,l} z_{ik} z_{il}, \\ \mathbf{D}^2(W_1) &= \mathbf{M}\left[\left(\sum_{i,k,l} z_{ik} z_{il}\right)^2\right] - \left[\mathbf{M}\left(\sum_{i,k,l} z_{ik} z_{il}\right)\right]^2, \\ \mathbf{M}\left(\sum_{i,k,l} z_{ik} z_{il}\right) &= \sum_{i,k,l} \mathbf{M}(z_{ik} z_{il}) = m \binom{n}{2} \cdot p_2, \\ \left(\sum_{i,k,l} z_{ik} z_{il}\right)^2 &= \sum z_{ik}^2 z_{il}^2 + 2 \sum z_{ik} z_{il} z_{jk} z_{jl} + 2 \sum z_{ik_1} z_{il} z_{jk_2} z_{jl} + \\ &+ 2 \sum z_{ik_1} z_{il_1} z_{jk_2} z_{jl_2} + 2 \sum z_{ik_1} z_{il} z_{ik_2} z_{il} + 2 \sum z_{ik_1} z_{il_1} z_{ik_2} z_{il_2}, \end{aligned}$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{M}(\sum z_{ik}^2 z_{il}^2) &= m \binom{n}{2} \cdot p_2, \\ \mathbf{M}(2 \sum z_{ik} z_{il} z_{jk} z_{jl}) &= 2 \binom{m}{2} \binom{n}{2} (2 p_2 - 2 p_{21}), \\ \mathbf{M}(2 \sum z_{ik_1} z_{il} z_{jk_2} z_{jl}) &= 2 \binom{m}{2} n(n-1)(n-2) \cdot 2s, \\ \mathbf{M}(2 \sum z_{ik_1} z_{il_1} z_{jk_2} z_{jl_2}) &= 2 \binom{m}{2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \cdot p_2^2, \\ \mathbf{M}(2 \sum z_{ik_1} z_{il} z_{ik_2} z_{il}) &= 2 m \binom{n}{2} \cdot (n-2) \cdot p_2, \\ \mathbf{M}(2 \sum z_{ik_1} z_{il_1} z_{ik_2} z_{il_2}) &= 2 m \cdot \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \cdot p_4. \end{aligned} \right.$$

A jobboldalalon szereplő betűjelek (p_2, p_{21}, s, p_3, p_4) különféle integrálokat jelentenek; pontos jelentésüket a cikk végén levő táblázatban foglaltuk össze. A kapott eredményeknek a (37)-be való behelyettesítésével és az egyszerűsítések elvégzésével azt kapjuk, hogy

$$(39) \quad \mathbf{D}^2(W_1) = m \binom{n}{2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &p_2 + 2(m-1)(p_2 - p_{21}) + 4(m-1)(n-2)s - \\ &- m(2n-3)p_2^2 + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(p_4 - p_2^2) + 2(n-2)p_3 \end{aligned} \right\}.$$

Teljesen analóg módon nyerhető a W_2 szórásnégyszete is:

$$(40) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}^2(W_2) &= \\ &= n \binom{m}{2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\bar{p}_2 + 2(n-1)(\bar{p}_2 - \bar{p}_{21}) + 4(n-1)(m-2)\bar{s} - \\ &- n(2m-3)\bar{p}_2^2 + \frac{1}{2}(m-2)(m-3)(\bar{p}_4 - \bar{p}_2^2) + 2(m-2)\bar{p}_3 \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

A W_1 és W_2 kovarianciájának kiszámítása céljából a W_2 -t a

$$W_2 = \sum_{i,j,k} (1 - z_{ik})(1 - z_{jk})$$

alakba írva vonjuk be a számításba. A számítás menete

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_1, W_2) &= \sum \text{Cov}\{z_{ik}, z_{il}, (1 - z_{ik})(1 - z_{jk})\} + \\ &+ \sum \text{Cov}\{z_{ik}, z_{il}, (1 - z_{ik_2})(1 - z_{jk_2})\} + \sum \text{Cov}\{z_{ik_1} z_{il_1}, (1 - z_{ik_2})(1 - z_{jk_2})\}, \end{aligned}$$

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \text{Cov} \{z_{ik} z_{il}, (1 - z_{ik}) (1 - z_{jk})\} &= 4 \binom{m}{2} \binom{n}{2} \cdot (-p_2 \bar{p}_2), \\ \sum \text{Cov} \{z_{ik_1} z_{il}, (1 - z_{ik_2}) (1 - z_{jk_2})\} &= \\ &= 2 \binom{m}{2} \binom{n}{2} (n-2) (-s - p_{31} - p_2 \bar{p}_2 + p_2), \\ \sum \text{Cov} \{z_{i_1 k} z_{i_1 l}, (1 - z_{i_2 k}) (1 - z_{jk})\} &= \\ &= \sum \text{Cov} \{(1 - \bar{z}_{i_1 k}) (1 - \bar{z}_{i_1 l}), \bar{z}_{i_2 k} \bar{z}_{jk}\} = \\ &= 2 \binom{m}{2} \binom{n}{2} (m-2) (-\bar{s} - \bar{p}_{31} - p_2 \bar{p}_2 + \bar{p}_2), \end{aligned} \right.$$

tehát végül is

$$(42) \quad \text{Cov}(W_1, W_2) = -2 \binom{m}{2} \binom{n}{2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &2 p_2 \bar{p}_2 + (n-2) (s + p_{31} + p_2 \bar{p}_2 - p_2) + \\ &+ (m-2) (\bar{s} + \bar{p}_{31} + p_2 \bar{p}_2 - \bar{p}_2) \end{aligned} \right\}.$$

A W szórásnégyzete ezek után már könnyen kapható, mivel a nyert eredményeket ((39), (40) és (42)) csak be kell helyettesíteni a (36)-ba.

Nullhipotézis esetén a képletek nagyban leegyszerűsödnek. Ha az említett táblázatból a p_2, p_{31}, p_3 , stb. integrálok nullhipotézis esetére kiszámított értékeit a képletekbe behelyettesítjük, az alábbi eredményeket kapjuk:

$$(43.a) \quad D^2(W_1) = \frac{1}{90} m \binom{n}{2} (m+n+1) (4n-3),$$

$$(43.b) \quad D^2(W_2) = \frac{1}{90} n \binom{m}{2} (m+n+1) (4m-3),$$

$$(44) \quad \text{Cov}(W_1, W_2) = -\frac{4}{45} \binom{m}{2} \binom{n}{2} (m+n+1),$$

s ezeknek megfelelően:

$$(45) \quad D^2(W) = \frac{1}{45} \cdot \frac{(m+n+1)(m+n-2)}{m(m-1)n(n-1)}.$$

Ami a kész alakban megadott (38), ill. (41) alatti közbeeső eredményeket illeti, ezekkel kapcsolatban csak annyit jegyzünk meg, hogy a z_{ik} karakterisztikus változókból alkotható különféle szorzatok várható értékei a közölt táblázat integráljaival adhatók meg. A megfelelő számítások részletezése túlságosan hosszúra nyúltaná a dolgozatot, ezért itt azt elhagyjuk.

Az integrálok táblázata

Az integrál jele	Az integrál kifejezése	Az integrál értéke nullhipotézis esetén
p_2	$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(x) dF(x)$	$\frac{1}{3}$
\bar{p}_2	$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) dG(x)$	$\frac{1}{3}$
p_3	$\int_{-\infty}^{\infty} G^3(x) dF(x)$	$\frac{1}{4}$
\bar{p}_3	$\int_{-\infty}^{\infty} F^3(x) dG(x)$	$\frac{1}{4}$
$p_{21} = \frac{1}{2} - \bar{p}_{21}$	$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(x) F(x) dF(x) = \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) G(x) dG(x)$	$\frac{1}{4}$
p_4	$\int_{-\infty}^{\infty} G^4(x) dF(x)$	$\frac{1}{5}$
\bar{p}_4	$\int_{-\infty}^{\infty} F^4(x) dG(x)$	$\frac{1}{5}$
p_{31}	$\int_{-\infty}^{\infty} G^3(x) F(x) dF(x)$	$\frac{1}{5}$
\bar{p}_{31}	$\int_{-\infty}^{\infty} F^3(x) G(x) dG(x)$	$\frac{1}{5}$
s	$\int_{-\infty}^{\infty} G(x_2) \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{x_2} G^2(x_1) dF(x_1) \right\} dF(x_2)$	$\frac{1}{15}$
\bar{s}	$\int_{-\infty}^{\infty} F(x_2) \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{x_2} F^2(x_1) dG(x_1) \right\} dG(x_2)$	$\frac{1}{15}$

(Beérkezett : 1959. szeptember 29.)

IRODALOM

- [1] LEHMANN, E. L.: „Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests.” *Ann. Math. Stat.* **22** (1951) 165—180.
 [2] RÉNYI A.: „Újabb kritériumok két minta összehasonlítására.” *Alk. Mat. Int. közleményei* **2** (1953) 243—265.
 [3] CSÁKI E.: „A Wilcoxon-statisztika két módosításáról.” *MTA Mat. Kut. Intézet Közleményei* **4** (1959) 313—319.

ON THE LEHMANN TEST

A. ZAJTA

Abstract

In order to eliminate the deficiencies of the Wilcoxon test, LEHMANN [1] and RÉNYI [2] developed new tests which are consistent with any alternative hypothesis of the null hypothesis. Since the expressions L and W — proposed by LEHMANN and RÉNYI to perform the test — differ from each other, the two procedures have, for a long time, been considered as two separate tests. It was just recently that CSÁKI [3] realized their identity, the relationship between L and W being a simple linear one:

$$L = 2W - 1.$$

In the present paper, a new proof of this connection is given and a third expression (V) is put forward to perform the test. The new expression is, in certain respects, even simpler than W in that it contains only linear functions of the rank numbers (Paragraph 2.). In addition, the variance of W is calculated for the general case from which a formula (45), suitable for the substitution $G(x) = F(x)$ and valid for the case of the null hypothesis may be derived.

О ПРОБЕ LEHMANN-A

A. ZAJTA

Резюме

Чтобы освободиться от недостатков пробы WILCOXON-а, LEHMANN [1] и RÉNYI [2] построили новую пробу, консистентную относительно всех альтернативных гипотез гипотезы нуля. Так как выражения L и W , предложенные LEHMANN-ом и RÉNYI для проведения пробы, отличаются друг от друга, долгое время эти две пробы считались различными, и лишь недавно Е. CSÁKI [3] заметил, что они тождественны, так как между L и W имеет место простое линейное соотношение

$$L = 2W - 1.$$

В настоящей работе дается новое доказательство этого соотношения и дается третье выражение (V) для проведения пробы. Новое выражение с некоторой точки зрения проще чем W , так как содержит лишь линейные функции ранговых чисел (пункт 2). Кроме того вычисляется дисперсия W в общем случае, откуда в случае $G(x) = F(x)$ получается формула (45), справедливая в случае гипотезы нуля.

A MODERN OPERÁTORSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA EGYSZERŰ ÁTVIVŐRENDSZEREK VÁLASZ-ANALÍZISÉBEN

FÉNYES TAMÁS

Bevezetés

A lineáris átvivőrendszerek válasz-analízisének alapfeladata a rendszerre érkező bemenő jel és a szóban forgó rendszer ismeretében a rendszerből kimenő jel meghatározása. Az irodalomban DOETSCH, WAGNER és CARSON munkái alapján ezen általános feladat sok esetben a Laplace-transzformáció alkalmazásával megoldható. A bemenő, illetve kimenő jel, vagy ha úgy tetszik a gerjesztés és a válasz között a következő összefüggés ismeretes:

$$(1) \quad v(s) = T(s) g(s).$$

Itt $g(s)$, $v(s)$ a gerjesztés, illetve a válasz Laplace-transzformáltjai, $T(s)$ pedig a rendszer átviteli tényezője.

A műszaki gyakorlatban azonban fontos szerepet játszanak azon jelek is, melyek nem írhatók le a klasszikus analízis függvényeivel (impulzusok, doubletek). Impulzusokkal gerjesztett rendszer a Laplace-transzformáció segítségével egzakt módon nem tárgyalható; a tárgyalásmód ekkor formális, a kapott eredmények helyessége nem látható be. Ilyen típusú problémák egzakt megoldásához be kell vezetni a Mikusiński-féle operátorszámítást. MIKUSIŃSKI könyvében ([1]) néhány speciális példát találhatunk impulzusgerjesztésű rendszerek vizsgálatára.

Előfordulhat azonban az is, hogy a gerjesztő jel ugyan klasszikus függvény, a kimenő válasz azonban nem. A Laplace-transzformáció alkalmazására vonatkozóan ekkor az előzőekhez hasonlók állnak fenn. Ezt is figyelembe véve rámutathatunk arra, hogy a modern operátorszámítás nemcsak speciális gerjesztések esetén alkalmazandó módszer, hanem az átvivőrendszerek egységes elméletének megalapozásában alapvető és nélkülözhetetlen, ahol a klasszikus analízis módszerei már elégtelennek bizonyulnak.

A Mikusiński-féle operátorszámítás bevezetése után az (1) összefüggés a vizsgált rendszert már teljesen általánosan jellemzi, ahol $v(s)$, $g(s)$ nem feltétlenül klasszikus függvény. $T(s)$ -t célszerű a vizsgált rendszer átviteli-operátorának nevezni. Ekkor természetesen s már nem komplex változó, hanem a differenciáloperátor. Nem tárgyaljuk a tetszőleges átviteli-operátorral bíró rendszerek általános válasz-analízisét, hanem csak az elektrotechnikai gyakorlatban nagy fontosságú R , L , C elemekből felépített elektromos kétpólusok vizsgálatára szorítkozunk. Ezen elektromos kétpólusok válasz-analízisének szisztematikus operátoros tárgyalását elvégezzük és ezen belül meghatározzuk az ún. válaszkritériumokat, melyek segítségével adott bemenő jelhez tartozó kimenő jel operátorstruktúrája azonnal eldönthető.

A kapott eredmények természetesen minden további nélkül átvihetők bármilyen tetszőleges lineáris fizikai átvivőrendszerre, melynek átviteli operátora megegyezik a vizsgált elektromos kétpólus admittanciaoperátorával, továbbá a módszer általánosítható tetszőleges reacionális törtfüggvénnyel, mint átviteli operátorral bíró átvivőrendszerekre is (feszültségátvitel, lineáris elektroncsöves erősítőkácsolások, stb.).

Végül megjegyezzük, hogy a kapott eredmények a disztribúciók elméletében is értelmezhetők, mert a gerjesztések, illetve válaszok mindig véges disztribúciók, melyeknek tartója a $\langle 0, \infty \rangle$ intervallum.

1. §. Az egység-doublet operátor definíciója és függvényekkel való approximációja

A modern áramkör-analízisben, mint látni fogjuk, az egység-impulzus-operátoron kívül alapvető jelentősége van az egység-doublet operátornak. Ezért mielőtt rátérünk a válasz-analízis feladatának meghatározására és a válasz-analízis ismertetésére, feltétlenül foglalkoznunk kell az egység-doublet operátor fogalmával.

Tekintsük a következő folytonos függvényekből álló függvénsorozatot:

$$\{g_n(t)\} = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq t \leq \lambda, \\ f_1(t) > 0, & \text{ha } \lambda < t < \lambda + \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{ha } t = \lambda + \frac{1}{n}, \\ f_2(t) < 0, & \text{ha } \lambda + \frac{1}{n} < t < \lambda + \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{ha } \lambda + \frac{2}{n} \leq t < \infty, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

továbbá legyen

$$(2) \quad \int_{\lambda}^{\lambda + \frac{2}{n}} g_n(t) dt = 0$$

és

$$(3) \quad \int_{\lambda}^{\lambda + \frac{2}{n}} G_n(t) dt = A_0,$$

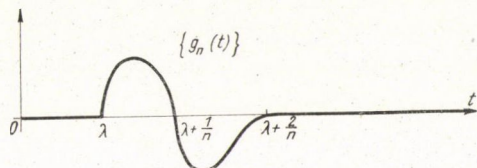
ahol

$$(4) \quad G_n(t) = \int_{\lambda}^t g_n(\tau) d\tau.$$

Az alábbi ábrán látható a $\{g_n\}$ függvénsorozat egyik eleme. (l. 463. old.)

Nagy n esetben $g_n(t)$ a λ környezetében először erősen növekedik, majd csökken, és utána növekedve hamar nullává válik.

Ha $n \rightarrow \infty$ akkor a klasszikus analízisben nem beszélhetünk a $\{g_n(t)\}$ sorozat konvergenciájáról. Az operátorszámítás értelmében azonban a sorozat



1. ábra.

konvergens, mert előállítható mint egy operátornak és egy a $0 \leq t < \infty$ -ben fekvő tetszőleges zárt (a, b) intervallumon folytonos és egyenletesen konvergens $\{c_n(t)\}$ függvénysorozat szorzata.

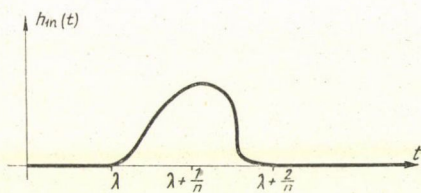
Ugyanis

$$(5) \quad \{g_n(t)\} = s^3 \mathcal{L}^3 \{g_n(t)\} = s^3 \{c_n(t)\}.$$

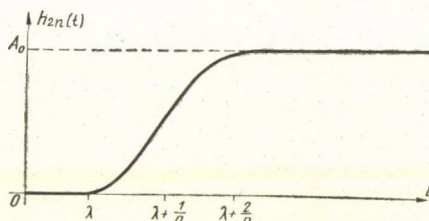
Az

$$\mathcal{L} \{g_n(t)\} = \left\{ \int_0^t g_n(\tau) d\tau \right\} = \{h_{1n}(t)\}$$

függvény a 2. ábra szerint változik:



2. ábra.



3. ábra.

Az

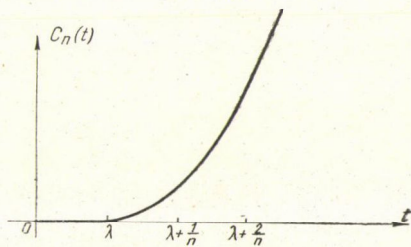
$$\mathcal{L}^2 \{g_n(t)\} = \mathcal{L} \{h_{1n}(t)\} = \{h_{2n}(t)\}$$

függvény menetét lásd a 3. ábrán.

A

$$\{c_n(t)\} = \mathcal{L}^3 \{g_n(t)\} = \mathcal{L}^2 \{h_{1n}(t)\} = \mathcal{L} \{h_{2n}(t)\}$$

függvény pedig az alábbi ábra szerint változik:



4. ábra.

Rögtön látható, hogy a $\{c_n(t)\}$ sorozat már egyenletesen konvergens minden véges intervallumon és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t) = c(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq t \leq \lambda, \\ A_0(t - \lambda), & \text{ha } t > \lambda, \end{cases}$$

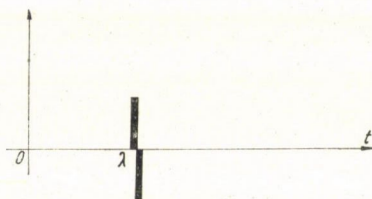
Tehát

$$(6) \quad \{c(t)\} = A_0 h^\lambda \frac{1}{s^2}, \text{ ahol } h \text{ az eltolási operátor.}$$

Következésképp tehát az eredeti $\{g_n(t)\}$ függvénysorozat általánosított értelemben konvergens és határértéke a következő operátor:

$$(7) \quad s^3 A_0 \frac{1}{s^2} h^\lambda = A_0 s h^\lambda = A_0 \{D(t - \lambda)\}.$$

A jobboldalon álló operátort a λ időpontban fellépő A_0 nagyságú doublet-nek nevezzük. $A_0 = 1$ esetben egység-doublet-ről beszélünk. Az elnevezés oka kézenfekvő. Matematikailag teljesen pongyolán mondhatjuk, hogy $D(t - \lambda)$ „függvény”. Ilyenkor a következő jelképes ábrázolás adható meg:



5. ábra.

A doublet-operátornak könnyen adhatunk fizikai interpretációt is. Ha egy kondenzátort például a $t = 0$ időpontban egy impulzussal gerjesztünk, akkor az áram az 5. ábra szerint változik. A kondenzátor feltöltődik és rögtön ki is sül.

Az általánosított Ohm-törvényt a kondenzátorra felírva kapjuk, hogy

$$I(s) \frac{1}{Cs} = 1,$$

ahonnan az áram operátorára tehát azt kapjuk, hogy

$$(8) \quad I(s) = Cs.$$

Ez pedig a $t = 0$ -ban fellépő A_0 nagyságú doublet operátora.

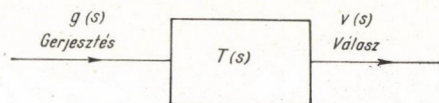
2. §. Válasz-analízis

Kétpólusú áramkörök válasz-analízisének alapfeladatát a következőkben határozzuk meg.

Tekintsünk egy R, L, C elemekből felépített elektromos kétpólust. Meghatározandó az áram, ha adott a kétpólus kapesaira kapcsolt feszültség és a

kétpólus admittanciájának operátora. A következőkben feszültség helyett gerjesztésről, áram helyett válaszról, admittancia helyett átvitel-operátorról és kétpólus helyett átvivő-rendszerről beszélünk.

Az átvivő-rendszer sémája az alábbi ábrán látható.



6. ábra.

Az általánosabb terminológiát azért használjuk, mert tetszőleges olyan lineáris átvivő-rendszer válasz-analízisének feladata, melynek átvitel-operátora admittancia operátor típusú, megegyezik a kétpólusú áramkörök válasz-analízisének problémájával.

Tehát a feladat általános megfogalmazásban a következő. Adva a gerjesztés operátora és a rendszer átvitel-operátora. Meghatározandó a válasz operátora.

Ezen belül foglalkozunk azzal a fontos kérdéssel, milyen kritérium dönti el, hogy a válasz függvény-e vagy általános operátor.

Írjuk fel a 6. ábrán látható átvivő-rendszer egyenletét:

$$(9) \quad v(s) = T(s) g(s) .$$

Szóban forgó rendszerünk átvitel-operátora a következő alakú:

$$T(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n} .$$

Feltesszük, hogy $T(s)$ nem egyszerűsíthető. Mint az áramkörelméletből ismeretes

$$(10) \quad |m - n| = 0, \text{ vagy } 1 .$$

Legyen először $n > 0$. Három esetet különböztetünk meg.

I.

$$(11) \quad n = m + 1 .$$

Ebben az esetben parciális törtekre bontással kapjuk, hogy

$$(12) \quad T(s) = \sum_{k=1}^n A_k \frac{1}{(s - \alpha_k)^{\theta_k}} .$$

α_k komplex is lehet.

Tehát a válasz

$$(13) \quad v(s) = \sum_{k=1}^n A_k \frac{g(s)}{(s - \alpha_k)^{\theta_k}} .$$

Ha a gerjesztés függvény, tehát $g(s) = \{U(t)\}$, akkor tekintve, hogy

$$(14) \quad \frac{1}{(s - \alpha_k)^{\vartheta_k}} = \left\{ \frac{t^{\vartheta_k-1}}{(\vartheta_k - 1)!} e^{\alpha_k t} \right\},$$

a válasz is természetesen függvény és (13), illetve (14) alapján

$$(15) \quad v(s) = \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \int_0^t U(t - \tau) \frac{\tau^{\vartheta_k-1}}{(\vartheta_k - 1)!} e^{\alpha_k \tau} d\tau \right\}.$$

A konvolúció tulajdonságaiból következik (lásd [2]), hogy amennyiben a gerjesztésre fennáll, hogy $U(t) \in C^n$, akkor $v(s) \in C^{n+1}$. Itt C^n a $0 \leq t < \infty$ -ben n -szer folytonosan differenciálható függvények osztályát jelenti, $n = 0$ esetben a folytonos függvények osztályáról, $n = -1$ esetben pedig az ún. K osztályba tartozó függvényekről beszélünk $C^{-1} = K$ (lásd [1]).

Ha a gerjesztés impulzusokból áll, $g(s) = \sum_{\mu} B_{\mu} h^{t_{\mu}}$ akkor

$$(16) \quad v(s) = g(s) \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \frac{t^{\vartheta_k-1}}{(\vartheta_k - 1)!} e^{\alpha_k t} \right\}.$$

Mivel a $g(s)$ operátor csak az eltolási operátort tartalmazza, tehát (16) is függvény. Továbbá mivel (16)-ban a zárójelben levő függvény a nulla időpontban nem lehet nulla, tehát $v(s) \in K$. Ha $g(s) = B_0$, vagyis az impulzus a 0 időpontban lép fel, akkor $v(s) \in C^{\infty}$.

Kimondhatjuk tehát a következőt. Ha $n = m + 1$, akkor a válasz függvény.

$$\text{II.} \quad n = m.$$

Ekkor

$$(17) \quad T(s) = A + \sum_{k=1}^n A_k \frac{1}{(s - \alpha_k)^{\vartheta_k}}$$

alakban írható fel az átvitel-operátor. Tehát a válasz ebben az esetben

$$(18) \quad v(s) = A g(s) + \sum_{k=1}^n A_k \frac{g(s)}{(s - \alpha_k)^{\vartheta_k}}.$$

Ha a gerjesztés függvény, $g(s) = \{U(t)\}$, akkor (14)-gyel kapjuk, hogy

$$(19) \quad v(s) = \left\{ A U(t) + \sum_{k=1}^n A_k \int_0^t U(t - \tau) \frac{\tau^{\vartheta_k-1}}{(\vartheta_k - 1)!} e^{\alpha_k \tau} d\tau \right\}.$$

A válasz szintén függvény, és ha $U(t) \in C^n$, akkor $v(s) \in C^n$.

Ha a gerjesztés impulzus vagy impulzussorozat,

$$g(s) = \sum_{\mu} B_{\mu} h^{t_{\mu}}$$

akkor a válasz (18) figyelembevételével

$$(20) \quad v(s) = A \sum_{\mu} B_{\mu} h^{\mu} + \sum_{\mu} B_{\mu} h^{\mu} \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \frac{t^{\theta_k-1}}{(\theta_k-1)!} e^{\alpha_k t} \right\}.$$

Ezen összeg első tagja már nem függvény. Látható, hogy a válasz-operátor függvényt és egy a gerjesztéssel arányos impulzus, vagy impulzussorozat operátorát tartalmazza.

Kimondhatjuk, hogy ha $n = m$, akkor a válasz függvény, ha a gerjesztés is függvény, általános operátor, ha a gerjesztés is az.

III. $n = m - 1$.

Ekkor parciális törtekrebonatással az átvitel-operátort általában a következő formában írhatjuk fel:

$$(21) \quad T(s) = A + Bs + \sum_{k=1}^n A_k \frac{1}{(s - \alpha_k)^{\theta_k}}.$$

Legyen a gerjesztés először függvény, akkor a válasz az előzőek mintájára

$$(22) \quad v(s) = Bs U(t) + \left\{ AU(t) + \sum_{k=1}^n A_k \int_0^t U(t - \tau) \frac{\tau^{\theta_k-1}}{(\theta_k-1)!} e^{\alpha_k \tau} d\tau \right\}.$$

Itt meg kell különböztetnünk két esetet a következő értelemben.

1. Legyen $U(t) \in C^n$, $n > 0$, vagy legyen $U(t)$ a $0 \leq t < \infty$ intervallumban, — minden véges zárt részintervallumon véges számú pont kivételével — mindenütt differenciálható C osztálybeli függvény, melynek $U'(t)$ deriváltja a K osztályhoz tartozik. Ekkor tekintve, hogy

$$(23) \quad sU(t) = \{U'(t)\} + U(0),$$

(22) a következőképp írható

$$(24) \quad v(s) = \left\{ BU'(t) + AU(t) + \sum_{k=1}^n A_k \int_0^t U(t - \tau) \frac{\tau^{\theta_k-1}}{(\theta_k-1)!} e^{\alpha_k \tau} d\tau \right\} + BU(0).$$

(24)-ből látható, hogy ha a gerjesztés a 0 időpontban nem zérus, akkor a válasz impulzust is tartalmazó operátort állít elő.

Ha a gerjesztés a 0 időpontban zérus, akkor (24) alapján a válasz függvény és

a) ha $U(t) \in C^n$, akkor $v(s) \in C^{n-1}$, $n > 0$,

b) ha $U(t) \in C$ és $U'(t) \in K$, akkor $v(s) \in K$.

2. Legyen $U(t)$ szakaszonként folytonos, mely a t_v pontokban $\beta_v = U(t_v + 0) - U(t_v - 0)$ ($v = 1, 2 \dots$) ugrásokkal bír, és deriváltja $U'(t)$ a K osztályhoz tartozik. Ekkor, tekintve hogy

$$(25) \quad sU(t) = \{U'(t)\} + U(0) + \sum_v \beta_v h^{t_v},$$

(22) a következő lesz

$$(26) \quad v(s) = \left\{ AU(t) + BU'(t) + \sum_{k=1}^n A_k \int_0^t U(t-\tau) \frac{\tau^{\partial_k-1}}{(\partial_k-1)!} e^{a_k \tau} d\tau \right\} + BU(0) + B \sum_v \beta_v h^{t_v}.$$

A válasz tehát egy operátor, mely egy függvényt és egy véges, vagy végtelen impulzussorozatot tartalmaz.

Legyen a gerjesztés impulzus, vagy impulzussorozat, melynek operátora

$$g(s) = \sum_{\mu} B_{\mu} h^{t_{\mu}}.$$

Ekkor a válasz a következő alakot veszi fel:

$$(27) \quad v(s) = Ag(s) + Bsg(s) + g(s) \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \frac{t^{k-1}}{(\partial_k-1)!} e^{a_k t} \right\}.$$

A válaszoperátor tehát nemcsak függvényt, hanem impulzust és doublet-et is tartalmaz, impulzusokat csak akkor, ha $A \neq 0$. Vizsgálatainkból látható, hogy a válasz-analízis egyszerű kritériumokat szolgáltat a válasz struktúrájának eldöntésére. Az operátorszámítás az áramkörelméletben, illetve az átvivő rendszerek elméletében tehát nemcsak speciális feladatok megoldásában fontos módszer, hanem egyben az elmélet egzakt matematikai megalapozása szempontjából nélkülözhetetlen, mert a klasszikus analízis módszerei itt már elégtelennek bizonyulnak.

Most röviden összefoglaljuk a válasz-kritériumokat.

I. $n = m + 1.$

A válasz függvény.

II. $n = m.$

1. Ha a gerjesztés függvény, a válasz is függvény.
2. Ha a gerjesztés impulzus(sorozat), a válasz függvény + impulzus(sorozat).

III. $n = m - 1.$

1. Ha a gerjesztés folytonos függvény, melynek deriváltja legalább a K osztályba tartozik, akkor

- a) ha a gerjesztés a nulla időpontban nulla, a válasz függvény,
- b) ha a gerjesztés a nulla időpontban nem nulla, a válasz függvény, + 0 időpontban fellépő impulzus.

2. Ha a gerjesztés szakaszonként folytonos függvény, melynek deriváltja a K osztályba tartozik, akkor a válasz függvény + impulzus(sorozat).

3. Ha a gerjesztés impulzus(sorozat), akkor a válasz függvény + impulzus(sorozat) + doublet(sorozat).

Ha $A = 0$, akkor a válasz impulzusokat nem tartalmaz.

3. §. Speciális átvitel-operátorral bíró átvivőrendszerek

Az előzőekben meghatároztuk a válasz-analízis általános kritériumait. Most a következő speciális eseteket vizsgáljuk.

$$a) \quad n = m = 0 .$$

Ekkor az átvitel-operátor egy közönséges szám, mely például fizikailag egy egyszerű R ohmos ellenállással realizálható. Ebben az esetben természetesen az impulzus-gerjesztés hatására fellépő válasz függvényt egyáltalán nem tartalmazó operátor.

$$b) \quad m = 1, n = 0 .$$

Az átvitel-operátor most a következő egyszerű alakot veszi fel:

$$(28) \quad T(s) = A + Bs .$$

Ilyen átvitel-operátorral bír például a párhuzamosan kapcsolt ellenállásból, illetve kapacitásból álló áramkör.

Ha az átvivőrendszer operátora (28) alakú, akkor előző vizsgálataink alapján az impulzusgerjesztés hatására fellépő válasz operátora függvényt egyáltalán nem is tartalmaz. Továbbá, ha

$$A = 0 ,$$

akkor a válasz még impulzusokat sem tartalmazhat és kizárólag doubletekből állhat (tisztá kapacitás esete).

(Beérkezett: 1960. szeptember 19.)

IRODALOM

- [1] MIKUSIŃSKI, J.: *Operatorenrechnung*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.
- [2] MIKUSIŃSKI, J., RYLL-NARDZEWSKI, C.: „Sur le produit de composition.” *Studia Mathematica* **12** (1951) 52—57.

DIE ANWENDUNG DER MODERNEN OPERATORENRECHNUNG BEI DER ANTWORT-ANALYSIS EINFACHER ÜBERTRAGUNGSSYSTEME

von

T. FÉNYES

Zusammenfassung

Das Grundproblem der Antwortanalysis linearer Übertragungssysteme besteht aus der Bestimmung des Ausgangssignals in Kenntnis des betreffenden Systems und des Eingangssignals. Diese allgemeine Aufgabe kann auf Grund der Arbeiten von G. DOETSCH; K. W. WAGNER und CARSON in vielen Fällen durch Anwendung der Laplaceschen Transformation gelöst werden. Zwischen dem Eingangs- und dem Ausgangssignal, d. h. zwischen der Erregung und der Antwort, ist der folgende Zusammenhang bekannt:

$$(1) \quad v(s) = T(s) g(s).$$

Dabei bezeichnen $g(s)$ bzw. $v(s)$ die Laplace-Transformierten der Erregung bzw. der Antwort und $T(s)$ den Übertragungsfaktor des Systems.

In den technischen Praxis spielen jedoch auch solche Signale wichtige Rolle, die nicht durch Funktionen der klassischen Analyse beschrieben werden können (Impulse, Doubleten). Ein durch Impulse erregtes System kann mit Hilfe der Laplaceschen Transformation nicht exakt behandelt werden, diese Methode ist in diesem Falle formal, die Richtigkeit der erhaltenen Ergebnisse kann nicht eingesehen werden. Zur exakten Lösung der Probleme solchen Typs muss die Mikusinskische Operatorenrechnung einbezogen werden. Im Buche von MIKUSINSKI findet man einige Beispiele über die Untersuchung von Systemen mit Impulserregungen.

Es kann auch vorkommen, dass zwar die Erregung einer klassischen Funktion entspricht, die ausgehende Antwort jedoch nicht. Bezüglich der Anwendung der Laplaceschen Transformation gilt in diesem Falle ähnliches wie vorhin. In Betrachtung dieses Umstandes können wir darauf hinweisen, dass die moderne Operatorenrechnung nicht nur eine bei speziellen Erregungen anwendbare Methode gibt, sondern bei der Begründung der einheitlichen Theorie der Übertragungssysteme, wo die Methoden der klassischen Analysis sich als ungenügend erweisen, eine grundlegende und unentbehrliche Rolle einnimmt.

Nach Einführung der Mikusinskischen Operatorenrechnung charakterisiert der Zusammenhang (1) bereits ganz allgemein das untersuchte System, wobei $g(s)$ und $v(s)$ nicht unbedingt klassische Funktionen bedeuten. $T(s)$ nennen wir den Übertragungsoperator des betrachteten Systems; in diesem Falle bedeutet s selbst verständlich nunmehr keine komplexe Veränderliche, sondern den Differentiationsoperator. Wir beschäftigen uns nicht mit der allgemeinen Antwortanalyse von Systemen mit beliebigen Übertragungsoperatoren, sondern beschränken uns lediglich auf die Untersuchung der aus R , L , C -Elementen aufgebauten elektrischen Zweipole, die in der Praxis der Elektrotechnik von grosser Bedeutung sind. Es wird die systematische Behandlung der Antwortanalyse dieser elektrischen Zweipole auf Grund der Operatorenrechnung durchgeführt, und im Rahmen dieses Problems die sogenannten Antwortkriterien bestimmt, mit deren Hilfe die Operatorenstruktur des Ausgangssignals eines gegebenen Eingangssignals sofort entschieden werden kann.

ПРИЛОЖЕНИЯ СОВРЕМЕННОГО ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ОТВЕТНОМУ АНАЛИЗУ ПРОСТЫХ ПЕРЕНОСНЫХ СИСТЕМ

T. FÉNYES

Резюме

Основная задача ответного анализа линейных переносных систем — определение исходящего из системы сигнала, зная поступающий в систему сигнал и саму систему. На основании работ DOETSCH-а, WAGNER-а и CARSON-а эта общая задача часто может быть решена с помощью преобразования Лапласа. Между входящим и исходящим сигналом, т. е. между возбуждением и ответом имеет место соотношение

$$(1) \quad v(s) = T(s)g(s).$$

Здесь $g(s)$ и $v(s)$ суть преобразования Лапласа возбуждения и ответа, а $T(s)$ переносный фактор системы.

Однако, в инженерной практике играют важную роль и сигналы, которые не могут быть описаны функциями классического анализа (импульсы, дублеты). Система возбужденная импульсами, не может быть эгзактно рассмотрена с помощью преобразования Лапласа; рассмотрение в этом случае формально, в правильности полученных результатов нельзя убедиться. Чтобы эгзактно решить проблемы такого типа, следует ввести операционное исчисление от *Mikusinski*. В книге от *Mikusinski* можно найти несколько специальных примеров исследования систем, возбужденных импульсами.

Может, однако, случиться, что входящий импульс является классической функцией, а исходящий нет. Относительно применения преобразования Лапласа положение аналогично вышеприведенному. Принимая во внимание и это можно указать, что современное операционное исчисление не является методом, который следует применять лишь в случае специальных возбуждений, но фундаментален и необходим для обоснования единой теории переносных систем, где методы классического анализа уже не достаточны.

После введения операционного исчисления от *Mikusinski* соотношение (1) описывает исследуемую систему уже в совершенно общем виде, где $g(s)$ и $v(s)$ не обязательно классические функции. Целесообразно называть $T(s)$ оператором переноса исследуемой системы. Тогда, естественно, s уже не комплексная переменная, а дифференциальный оператор. Автор не рассматривает общий ответный анализ систем с произвольным оператором переноса, а ограничивается исследованием электрических диполей, построенных из элементов R , L и C , которые имеют большое значение в электротехнической практике. Производится систематическое операционное рассмотрение ответного анализа этих электрических диполей, причем определяются так называемые критерии ответа, с помощью которых сразу же может быть определена операторная структура исходящего сигнала, относящегося к данного входящему сигналу.

TÖRPESTRANSZFORMÁTOROK LEMEZMAGLAPJAINAK ÁLTALÁNOS GEOMETRIAI GAZDASÁGOSSÁGI PROBLÉMÁI

FÉNYES TAMÁS és NÁDAS TIBOR¹

Bevezetés

Szerzők [1]-ben foglalkoztak szabványosított méretű transzformátor-lemezmaglapok geometriai gazdaságosságának problémájával. Meghatározták a leggazdaságosabb hulladékmentesen sajtolható EI lemez relatív geometriai méreteit (lásd [1]) és foglalkoztak a DIN-szabvány által megadott méretű lemezeknek az optimumtól való gazdaságossági eltérésének kérdésével is. Szerzők a feladatot kizárólag a felhasznált vas- és rézanyag árának figyelembevételével oldották meg. A probléma nagy népgazdasági jelentőséggel bír, hiszen gazdaságossági szempontból nem megfelelő méretű lemezek használata esetén feleslegesen tékozlódik el réz- és vasanyag, amely figyelembe véve, a hazai gyengeáramú ipar jelentős kapacitását, államunknak tetemes veszteséget jelenthet.

Azonban ezen vizsgálatok csupán a probléma speciális megoldását szolgáltatták. Népgazdasági szempontból igen lényeges, hogy a transzformátorok jó hatásfokúak is legyenek, vagyis olyanok, melyeknél a fellépő vas- és réz-veszteségek aránylag kicsinyek és így bennük az összüzemidő alatt elvesző elektromos energia ára is kicsiny. Sok esetben fontos az olyan méretű lemezek alkalmazása, melyek révén a súly szempontjából optimális transzformátor állítható elő. Látható, hogy a probléma a gazdaságosság különböző szempontjai alapján általánosítható.

Figyelembe kell venni, hogy a hazai gyengeáramú ipar, a DIN-szabványtól átvett méretben nemcsak hulladékmentes, hanem kis hulladékkal sajtolható EI lemezeket is használ (KGMSZ 635.438 szabvány, 92—231 mm főméret). Tehát az összes fenti gazdaságossági kérdések értelemszerűen fennállnak ezen utóbbi lemezek esetében is. Ezen lemezeknél nincs függvényszerű összefüggés az egyes méretek között, mint a hulladékmentesen sajtolható lemezek esetében. Ily módon látható, hogy az eredeti probléma általános alakú lemezmaglap esetére is általánosítható.

Szerzők ezen cikkben úgy a hulladékmentesen sajtolható EI lemezmaglapok, mint a geometriai kötöttségmentes lemezmaglapok általános geometriai gazdaságossági problémáival foglalkoznak. A hulladékmentes lemezmaglap vizsgálatánál matematikai módszert dolgoznak ki, melynek segítségével a probléma igen egyszerűen tárgyalható. Utóbbi általánosabb alakú lemezmaglap esetében szerzők alkalmazzák Silleni [2] módszerét, melyet némileg kiegészítenek. Szerzők az optimális méretű lemezmaglapok ismeretében megvizsgál-

¹ Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet.

ják a szabványméretek és az optimális méretek közti gazdaságossági eltérést. A számítások eredményeit szerzők könnyen kezelhető diagramokban, illetve táblázatokban tüntetik fel.

1. §. Hulladékmentesen sajtolható EI típusú lemezmaglakok általános vizsgálata. Általános megjegyzések

A transzformátor tekercs maximális áramsűrűségének, továbbá a maximális vasmagindukciónak értékét a transzformátor megengedhető melegedése határozza meg. Ezen értékeket számításainkban állandónak tekintjük és végeredményben a vizsgálatokat a következő numerikus értékek felvétele mellett végezzük el.²

$\gamma_v = 7,65 \text{ kg/dm}^3$	a vas fajsúlya,
$p_v = 5,22 \text{ Ft/kg}$	a vas egységára,
$f_v = 0,95$	vaskitöltési tényező,
$\gamma_r = 8,89 \text{ kg/dm}^3$	a réz fajsúlya,
$p_r = 41,56 \text{ Ft/kg}$	a leggyakrabban használt rézhuzalok közepes egységára,
$f_r = 0,2$, ill $0,3$	rézkitöltési tényező értékek (l. [1]),
$B_{\max} = 10\,000 \text{ Gauss}$	maximális vasmagindukció,
$i = 3 \text{ A/mm}^2$	megengedhető áramsűrűség,
$W_v = 1,6 \text{ W/kg}$	B_{\max} -nál fellépő súlyegységre eső vasvesztés,
$W_r = 157,5 \text{ W/dm}^3$	maximális áramsűrűségnél fellépő térfogategységre eső rézvesztés,
$T = 14\,400 \text{ óra}$	a transzformátor 10 év alatti átlagos üzemideje,
$\theta = 0,35 \text{ Ft/kWó}$	az áram egységára.

Számításainkban a lemezcsomag vastagságát nem tekintjük független változónak, hanem a gyakorlatnak megfelelően a két határesetet vizsgáljuk. Vizsgálatainkat részletesen négyzet alakú oszlopkeresztmetszet felvétele esetén ismertetjük, az ún. $\sqrt{2}$ -es oszlopkeresztmetszet esetén — tekintve, hogy a számítási eljárás teljesen ugyanaz — csak eredményeket közlünk. Feltételezzük, hogy a primér, illetve szekundér tekercs ugyanolyan látszólagos teljesítményt kap, és így az ablak felét a primér tekercselés, felét a szekundér tekercselés foglalja el. A transzformátor gazdaságosságára az ún. fajlagos ár, fajlagos veszteség, fajlagos ár + fajlagos energiafogyasztás ára, illetve fajlagos súly, vagyis a felhasznált vas és réz árai összegének, veszteségei összegének, árai + energiafogyasztási árai összegének, illetve súlyai összegének és a teljesítménynek hányadosa jellemző. Rögzített oszlopszélesség esetén meghatározzuk ezen függvények minimumát szolgáltató optimális ablakméreteket.

2. §. Négyzetes oszlopkeresztmetszetű transzformátorok

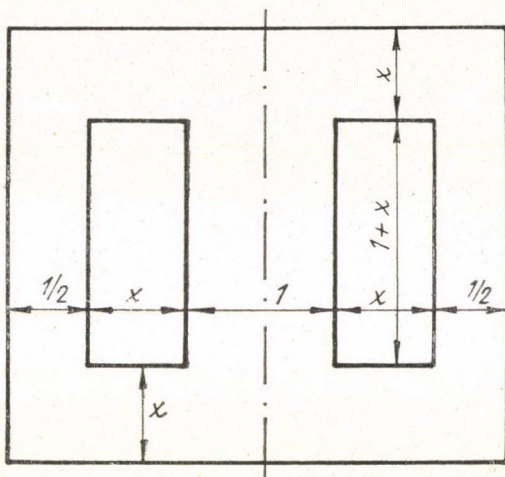
A transzformátorlemez beméretezett rajza egységnyinek felvett oszlopszélesség esetén az alábbi 1. ábrán látható.

² A gyakorlatban természetesen ezen értékek általában csak átlagot jelentenek. Tekintve, hogy főcélunk a szabványban megadott lemezek gazdaságossági ellenőrzése, a numerikus átlagértékekkel való számolás elegendőnek mutatkozik.

Mint ismeretes, a teljesítményre a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$(1) \quad N = 2,22 B_{\max} i f f_r f_v x (1 + x),$$

ahol f a frekvencia értéke. A teljesítmény arányos az ablak és a vaskeresztmetszet szorzatával. A fellépő arányossági tényező értékét, mely vizsgálataink



1. ábra.

szempontjából állandó faktorok szorzatait tartalmazza, válasszuk az egységnek, tehát írható, hogy

$$(2) \quad N = x(1 + x).$$

a) Fajlagos nyersanyag-ár optimum meghatározása

Határozzuk meg a transzformátor fajlagos nyersanyag-árának kifejezését. A transzformátor vasanyagának súlya

$$G_v = 2 \gamma_v f_v (1 + x) (1 + 2x).$$

A rézanyag súlya közelítően a közepes menethossz figyelembevételével

$$G_r = 4 \gamma_r f_r x (1 + x)^2.$$

Ezekből a transzformátor nyersanyag-ára közelítően

$$Q = 2 \gamma_v f_v p_v (1 + x) (1 + 2x) + 4 \gamma_r f_r p_r x (1 + x)^2.$$

Most már felírhatjuk a fajlagos árat, ha figyelembe vesszük (2)-t.

$$(3) \quad P(x) = \frac{Q}{N} = 2 \gamma_v f_v p_v \left(2 + \frac{1}{x} \right) + 4 \gamma_r f_r p_r (1 + x).$$

Ezen függvény minimumának helyét meghatározva

$$\frac{dP(x)}{dx} = -\frac{2\gamma_v f_v p_v}{x^2} + 4\gamma_r f_r p_r = 0$$

-ból

$$(4) \quad x_{opt} = \sqrt{\frac{A_a}{2}}$$

adódik, ahol

$$(5) \quad A_a = \frac{\gamma_v f_v p_v}{\gamma_r f_r p_r},$$

mely érték a réz és vas ismertetett adataiból számítható.

Rá kívánunk mutatni egy igen fontos körülményre. Ismeretes, hogy hulladékmentesen sajtolható EI típusú lemezmaglap ablakszélessége az oszlopszélesség felénél kisebb nem lehet. Ez azt jelenti, hogy amennyiben (4)-et kiszámítva 0,5-nél kisebb értéket kapunk, akkor a 0,5 értéket kell optimálisnak tekinteni, mert a függvény x_{opt} -től monoton nő. Pontosabban tehát az optimális ablakméret a következő kifejezés alapján határozható meg:

$$(6) \quad x_{opt} = \begin{cases} \sqrt{\frac{A_a}{2}} & \text{ha } \sqrt{\frac{A_a}{2}} \geq 0,5, \\ 0,5 & \text{ha } \sqrt{\frac{A_a}{2}} < 0,5. \end{cases}$$

Vezessük be az $M(x)\%$ függvényt a következő definíció alapján: Legyen $M(x)\%$ a tetszőleges x relatív mérettel bíró transzformátor, és az optimális méretű transzformátor fajlagos árai különbségének a tetszőleges x mérettel bíró transzformátor fajlagos árával képezett hányadosának százalékos értéke, akkor per definitionem

$$(7) \quad M(x)\% = 100 \left[1 - \frac{\frac{A_a}{x_{opt}} + 2x_{opt} + 2A_a + 2}{\frac{A_a}{x} + 2x + 2A_a + 2} \right].$$

Ezen függvény független a teljesítmény (1) kifejezésében szereplő arányossági tényezőtől és a transzformátor oszlopszélességétől is és igen jellemző a szóban forgó lemezmaglap százalékos gazdaságosságára.

b) Fajlagos veszteség optimum meghatározása

Könnyen belátható, hogy (6) és (7) kifejezés ezen esetben is változatlanul érvényben marad, csupán (5) változik. Ezen esetben igen egyszerűen adódik, hogy

$$(8) \quad A_b = \frac{f_v \gamma_v W_v}{f_r W_r}.$$

c) Fajlagos súly optimum meghatározása

Itt is (6) szolgáltatja az optimális relatív ablakszélességet, és (7) a százalékos gazdaságosság — kifejezését.

Esetünkben

$$(9) \quad A_c = \frac{\gamma_v f_v}{\gamma_r f_r}.$$

d) Fajlagos nyersanyagár + fajlagos energiafogyasztási-ár optimum meghatározása

(6) és (7) érvénye ebben az esetben is fennáll.

$$(10) \quad A_d = \frac{\gamma_v f_v (p_v + W_v T \vartheta 10^{-3})}{f_r (\gamma_r p_r + W_r T \vartheta 10^{-3})}.$$

3. §. $\sqrt{2}$ -es oszlopkeresztmetszetű transzformátorok

Mint már említettük, erre vonatkozólag csak az eredményeket ismertetjük. Tetszőleges szempontból vizsgált optimális relatív ablakszélesség a következő módon számítható:

$$(11) \quad x_{opt} = \begin{cases} \sqrt{\frac{A}{2}} & \text{ha } \sqrt{\frac{A}{2}} \geq 0,5, \\ 0,5 & \text{ha } \sqrt{\frac{A}{2}} < 0,5 \end{cases}$$

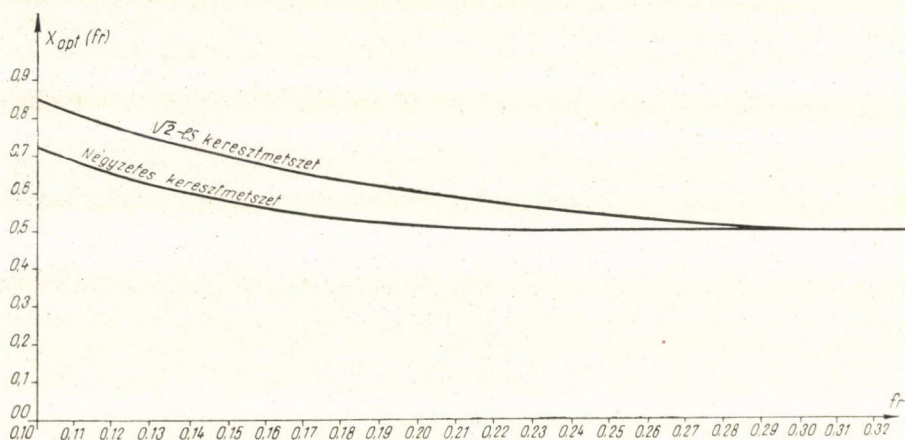
és

$$(12) \quad M(x)\% = 100 \left[1 - \frac{2 \frac{A}{x_{opt}} + 2\sqrt{2} x_{opt} + 4A + 2 + \sqrt{2}}{2 \frac{A}{x} + 2\sqrt{2} x + 4A + 2 + \sqrt{2}} \right].$$

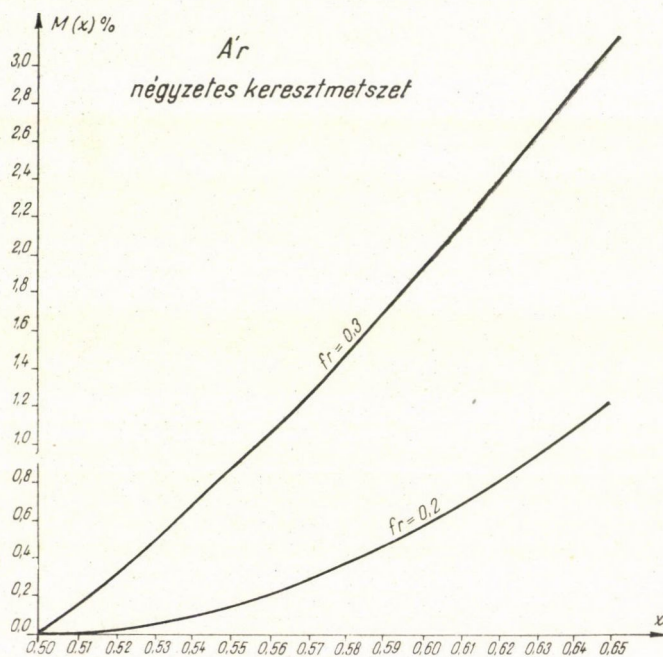
A formulákban szereplő A értékek a négyzetes keresztmetszetű transzformátorlemez vizsgálatánál szereplő A értékkel értelemszerűen megegyeznek.

4. §. Szabványlemezmaglapok vizsgálata

A kapott eredményeket az alábbi diagramokban tüntettük fel. A 2. ábra az optimális relatív ablakszélesség és a rézköltési tényező közötti kapcsolatot ábrázolja úgy négyzetes, mint $\sqrt{2}$ -es oszlopkeresztmetszet esetén. A 3. ábra az optimumtól való százalékos gazdaságossági eltérés és a relatív ablakméret közti összefüggést mutatja különböző rézköltési tényezők esetében négyzetes oszlopkeresztmetszet, a 4. ábra pedig $\sqrt{2}$ -es oszlopkeresztmetszet esetében. Ezen ábrák a nyersanyag-ár szempontjából végzett számítások eredményeit tüntetik fel. A többi ábrák pedig a többi gazdaságossági szempont alapján végzett számítások eredményeit mutatják. Mindegyik ábrán fel van tüntetve, hogy melyik gazdaságossági szempontra vonatkozik.



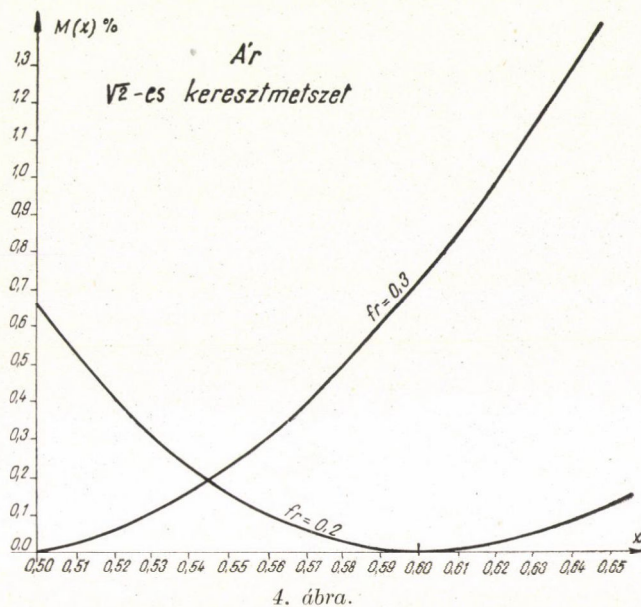
2. ábra.



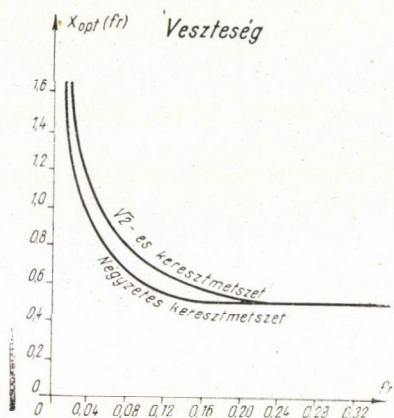
3. ábra.

Ezen diagramokból a DIN-szabvány által meghatározott lemezforma következő fontos gazdaságossági tulajdonságai olvashatók le.

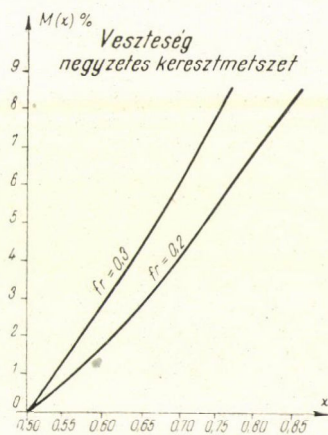
I. A lemezek fajlagos nyersanyag-ár, veszteség, nyersanyag-ár + energia-fogyasztás szempontjából gazdaságilag közel optimálisak. Az ezekből a szempontokból vizsgált optimális relatív ablakméretek gyakorlatilag egyenlők. Ez a tény rámutat ezen típusú lemezmaglapok nagy alkalmazási lehetőségeire és így népgazdasági jelentőségére.



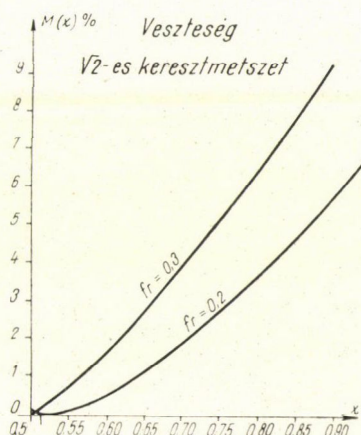
4. ábra.



5. ábra.



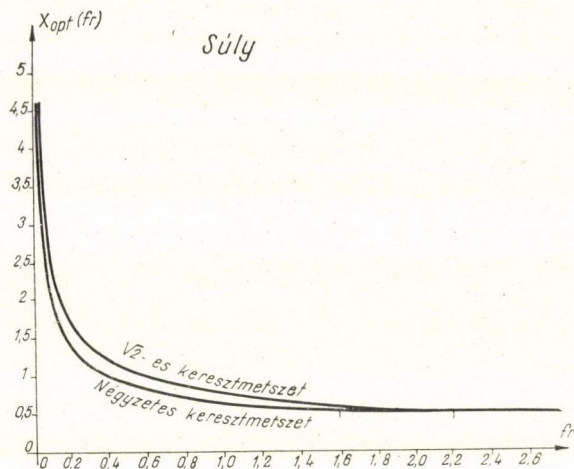
6. ábra.



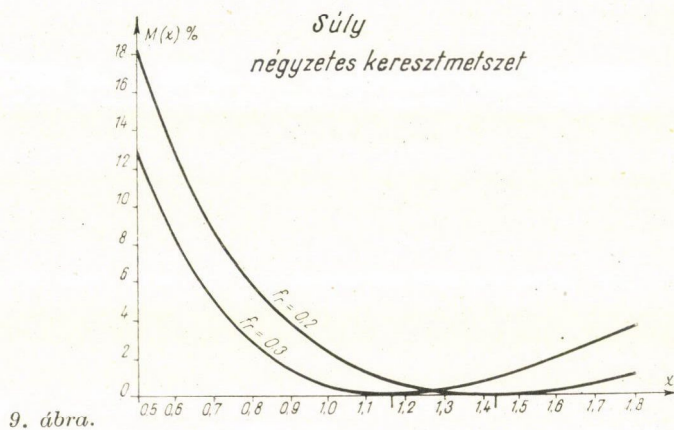
7. ábra.

II. Fentebbi gazdaságossági szempontok esetében a szabványlemezek a normál 0,3-nál nagyobb rézköltési tényező mellett is gazdaságilag optimálisak. Következésképp törekedni kell a tekercselési tér minél jobb kihasználására.

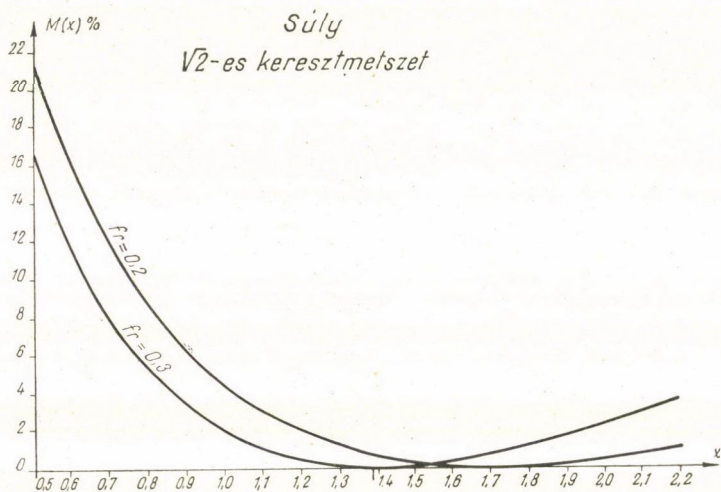
III. A súly szempontjából optimális lemezforma igen széles ablakméretű. Az optimális lemezforma és a szabvány lemezforma között jelentős geometriai és gazdaságossági eltérés mutatkozik.



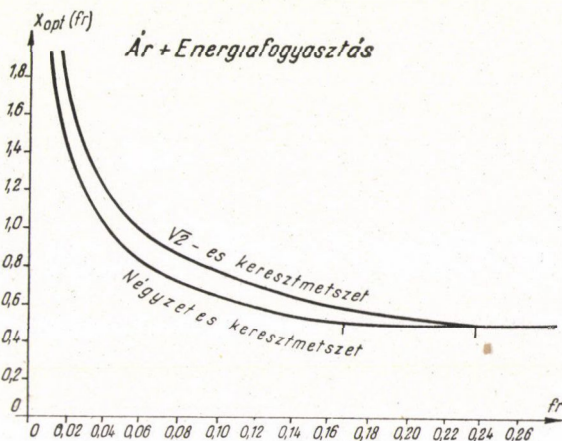
8. ábra.



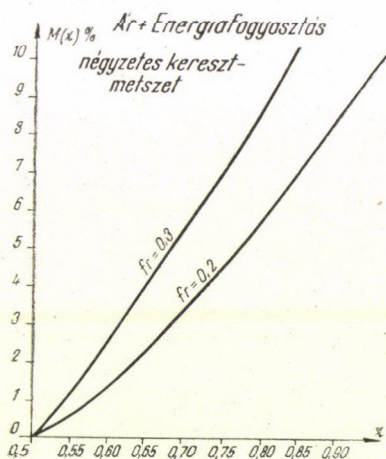
9. ábra.



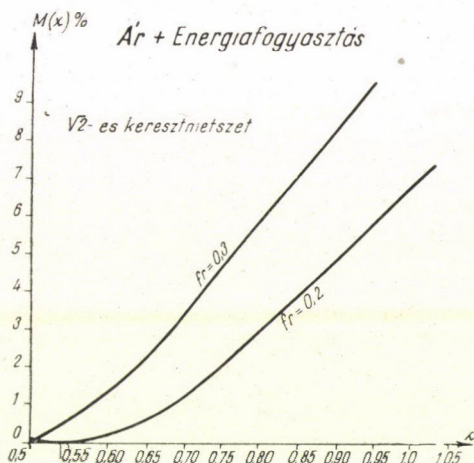
10. ábra.



11. ábra.



12. ábra.



13. ábra.

5. §. Általános alakú transzformátor lemezmaglapok vizsgálata.

Általános megjegyzések

Rátérünk az általánosabb probléma vizsgálatára. Tekintsünk egy transzformátorlemez tetszőleges ablakméretekkel.

Az oszlopszélesség ismét legyen egységnyi. (l. 14. ábrát.)

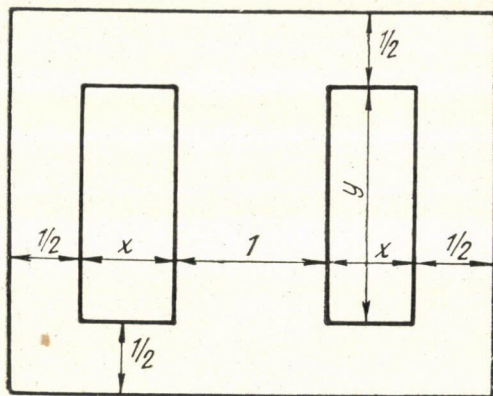
Határozzuk meg a transzformátor fajlagos árát négyzetes oszlopkeresztmetszet esetében. Itt már figyelembe kell venni a hulladékvas árát is.

A transzformátor elkészítéséhez szükséges vas súlya

$$G_v = 2 \gamma_v f_v (1 + x) (1 + y).$$

A felhasznált rézanyag súlya közelítően

$$G_r = 4 \gamma_r f_r xy (1 + x).$$



14. ábra.

A transzformátor ára közelítően

$$Q = 2 \gamma_v f_v p_v (1 + x) (1 + y) + 4 \gamma_r f_r p_r y x (1 + x).$$

A fajlagos ár

$$(13) \quad P(x, y) = 2 \gamma_v f_v p_v \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) + 4 \gamma_r f_r p_r (1 + x).$$

Látható, hogy ez a kifejezés az y ablakhosszúság függvényében monoton csökken. Ezért az előzőekben alkalmazott eljárásunk most nem alkalmazható. SILLENI [2] módszerét fogjuk alkalmazni. A feladatot most a következő módon fogalmazzuk meg. Legyen adva a teljesítmény. Meghatározandók az egyes gazdaságossági szempontok szerint optimális lemezmaglapok méretei. A számításokat részletesen most is csak négyzetes oszlopkeresztmetszet esetén ismer-tetjük, míg a $\sqrt{2}$ -es oszlopkeresztmetszet esetében csak eredményeket köz-lünk. Megjegyezzük továbbá, hogy SILLENI [2]-ben a vashulladékot nem veszi figyelembe. Tekintve, hogy a vashulladék a transzformátor összes vasanya-gának nem elhanyagolható hányadát jelenti, mi a vashulladékot a gazdasá-gossági számításokban értelemszerűen figyelembe vesszük, és ebben a vonat-kozásban [2]-őt kiegészítjük. Természetesen nem vesszük figyelembe a vas-hulladékot a veszteség, illetve a súlyvizsgálatoknál. A rézkitöltési tényező-t ezekben a vizsgálatokban csak 0,3 értékkel vesszük tekintetbe.

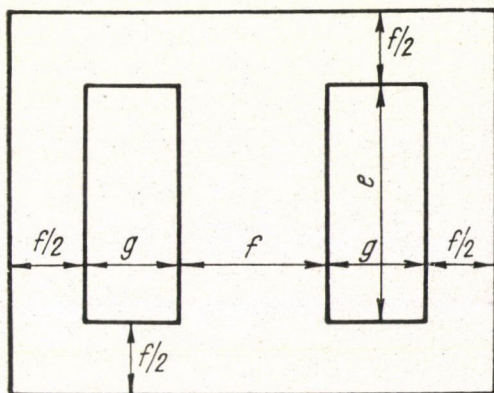
6. §. Négyzetes oszlopkeresztmetszetű transzformátorok

a) Nyersanyag-ár optimum meghatározása

Tekintsünk egy, az alábbi ábrán látható beméretezett lemezmaglapot. Írjuk fel ismét a teljesítményt (1) alapján.

A maximális indukció, áramsűrűség, frekvencia és a kitöltési tényezők sorozatát tartalmazó arányossági tényezőt α -val jelölve írható, hogy

$$(14) \quad N = \alpha g e f^2.$$



15. ábra.

Vezessük be a következő dimenzió nélküli mennyiségeket

$$(15) \quad \mu^4 = \frac{f^2}{ge},$$

mely az oszlopkeresztmetszet és az ablakkeresztmetszet hányadosa, továbbá legyen

$$(16) \quad \varrho^2 = \frac{e}{g},$$

mely az ablakhosszúság és az ablakszélesség hányadosa.

(15)-ből eg -t kifejezve és (14)-be helyettesítve írható, hogy

$$(17) \quad N = \alpha \frac{f^4}{\mu^4}.$$

Ebből

$$f^2 = \sqrt{\frac{N}{\alpha}} \mu^2 = C^2 \mu^2$$

mert a gyök alatti mennyiség állandó, ha a teljesítményt rögzítjük. Következésképp

$$(18) \quad f = C \mu.$$

Határozzuk meg most a transzformátor nyersanyag-árát. A vasanyag áránál figyelembe vesszük a lemez sajtolásánál keletkező hulladékvasat is. A vas ára

$$P_v = 2 \gamma_v f_v p_v f(f + e)(f + g).$$

A rézanyag ára a közepes menethossz figyelembevételével közelítően

$$P_r = 4 \gamma_r f_r p_r (f + g) eg.$$

A transzformátor ára tehát

$$(19) \quad P_v + P_r = 2\gamma_v f_v p_v f(f+e)(f+g) + 4\gamma_r f_r p_r(f+g)eg$$

(15) és (16)-ból kapjuk, hogy

$$(20) \quad g = \frac{f}{\mu^2 \varrho},$$

$$e = \frac{f \varrho}{\mu^2}.$$

(20)-at (19)-be helyettesítve nyerjük a következőt:

$$(21) \quad P_r + P_v = 2\gamma_v f_v p_v f^3 \left(1 + \frac{1}{\mu^2 \varrho}\right) \left(1 + \frac{\varrho}{\mu^2}\right) + 4\gamma_r f_r p_r f^3 \left(1 + \frac{1}{\mu^2 \varrho}\right) \frac{1}{\mu^4}.$$

Végezetül (21)-be (18)-at helyettesítve a transzformátor árara a következőt kapjuk:

$$(22) \quad P_r + P_v = 2C^3 \gamma_v f_v p_v \left(\mu^3 + \frac{\mu}{\varrho}\right) \left(1 + \frac{\varrho}{\mu^2}\right) + 4C^3 \gamma_r f_r p_r \left(1 + \frac{1}{\mu^2 \varrho}\right) \frac{1}{\mu}.$$

Mivel a teljesítményt rögzítettük, az egyenletet $2C^3 \gamma_r f_r p_r$ -rel végigoszthatjuk és ismét bevezetve a $A_a = \frac{\gamma_v f_v p_v}{\gamma_r f_r p_r}$ mennyiséget, az optimum meghatározására a következő kétváltozós függvény szélsőértékét kell kiszámítani.

$$(23) \quad F(\mu, \varrho) = 2 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3 \varrho} \right) + A_a \left(\mu^3 + \frac{\mu}{\varrho} + \mu \varrho + \frac{1}{\mu} \right).$$

Ha már ismeretesek az optimális μ és ϱ értékek, akkor az ismert, előírt teljesítményből (18) alapján az optimális transzformátor-lemezmaglap oszlop-mérete, (20) alapján pedig az ablakméretei számíthatók ki. (23) parciális deriváltjait kiszámítva és őket zérussal egyenlővé téve kapjuk a következő kétismeretlenes egyenletrendszer:

$$(24) \quad \frac{\partial F}{\partial \mu} = -2 \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{3}{\varrho \mu^4} \right) + A_a \left(3\mu^2 + \varrho + \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\mu^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = -\frac{2}{\mu^3 \varrho^2} + A_a \left(\mu - \frac{\mu}{\varrho^2} \right) = 0.$$

Meg kívánjuk jegyezni, hogy a négyzetes oszlopkeresztmetszetű transzformátor tárgyalásánál Silleni [2]-ben az ablakméretek hányadosára jellemző ϱ mennyiséget paraméternek tekinti, melynek különböző konstans értékeket adva (23)-at, mint μ függvényét vizsgálja. Mi az ϱ mennyiségét is változónak tekintjük, látni fogjuk, hogy a (24) egyenletrendszer egyszerűen megoldható. Röviden vázoljuk a megoldás menetét. A hosszadalmas számítások ismerte-

tését — melyekben egyébként semmi elvi nehézség nincs — mellőzzük. A (24) egyenletrendszer második egyenletéből

$$(25) \quad \varrho = + \sqrt{\frac{2 + A_a \mu^4}{A_a \mu^4}}.$$

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve egyszerű, de hosszadalmas számolással a következő redukálható tizenkettedfokú egyenletre jutunk

$$(26) \quad 9A_a^3 \mu^{12} + A_a^2(6 - 10 A_a) \mu^8 + A_a(A_a^2 + 8 A_a - 20) \mu^4 + 2 A_a^2 - 8 A_a + 8 = 0.$$

Vezessük be a következő helyettesítést:

$$(27) \quad t = \mu^4.$$

Ily módon a következő harmadfokú egyenletet kapjuk:

$$(28) \quad 9A_a^3 t^3 + A_a^2(6 - 10 A_a) t^2 + A_a(A_a^2 + 8 A_a - 20) t + 2 A_a^2 - 8 A_a + 8 = 0.$$

Ennek pozitív gyökeit meghatározzuk. Az ezekhez tartozó pozitív μ értékeket (27)-ből határozzuk meg. Ezekután (25)-ből kiszámítjuk a megfelelő ϱ értékeket is. Az az (μ, ϱ) értékpár szolgáltatja az optimumot, mely kielégíti a (24) egyenletrendszert. Ez viszont most már egyszerű behelyettesítéssel eldönthető.³

Vezessük be a százalékos gazdaságossági eltérést a következő definícióval. Legyen $M(\mu, \varrho)$ a tetszőleges (μ, ϱ) értékkel bíró transzformátor és az ugyanolyan teljesítményű optimális (μ, ϱ) értékekkel bíró transzformátor árai különbségének, a tetszőleges (μ, ϱ) értékekkel bíró transzformátor árával képezett hányadosának százalékos értéke.

Ekkor per definitionem

$$(29) \quad M(\mu, \varrho) \% = 100 \left[1 - \frac{2 \left(\frac{1}{\mu_{opt}} + \frac{1}{\mu_{opt}^3 \varrho_{opt}} \right) + A_a \left(\mu_{opt}^3 + \frac{\mu_{opt}}{\varrho_{opt}} + \mu_{opt} \varrho_{opt} + \frac{1}{\mu_{opt}} \right)}{2 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3 \varrho} \right) + A_a \left(\mu^3 + \frac{\mu}{\varrho} + \mu \varrho + \frac{1}{\mu} \right)} \right].$$

b) Veszteség optimum meghatározása

Ebben az esetben a vasveszteség kiszámításánál a hulladékvasat természetesen nem kell figyelembe venni. A 15. ábra alapján a vasban fellépő veszteség

$$V_v = 2 \gamma_v f_v W_v f^2 (f + e + g).$$

A rézvesztés

$$V_r = 4 f_r W_r (f + g) eg.$$

³ Természetesen (24) teljesülése a minimum létezésének csupán szükséges feltétele. Azonban könnyen belátható, hogy $\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} > 0$ akár tetszőleges pozitív μ és ϱ esetében, továbbá kimutattuk, hogy az optimális μ és ϱ esetében a $\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial \varrho} \right)^2 > 0$ feltétel is teljesül. Ez a további számításokra is vonatkozik (lásd b), c), d)).

Tehát az egész veszteség

$$(30) \quad V_v + V_r = 2 \gamma_v f_v W_v f^2(f + e + g) + 4 f_r W_r(f + g) eg.$$

(15), (16), (18) és (20) alapján a probléma a következő kétváltozós függvény szélsőértékének meghatározására van visszavezetve:

$$(31) \quad F(\mu, \varrho) = 2 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3 \varrho} \right) + A_b \left(\mu^3 + \mu \varrho + \frac{\mu}{\varrho} \right),$$

ahol

$$(32) \quad A_b = \frac{\gamma_v f_v W_v}{f_r W_r}.$$

A parciális deriváltakat kiszámítva

$$(33) \quad \frac{\partial F}{\partial \mu} = -2 \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{3}{\varrho \mu^4} \right) + A_b \left(3\mu^2 + \varrho + \frac{1}{\varrho} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = -\frac{2}{\varrho^2 \mu^3} + A_b \left(\mu - \frac{\mu}{\varrho^2} \right) = 0$$

kétismeretlenes egyenletrendszerre jutunk. A megoldás menete teljesen analóg az a) esetben vizsgáltéval. $t = \mu^4$ helyettesítéssel a következő harmadfokú algebrai egyenletre jutunk:

$$(34) \quad 9 A_b^3 t^3 + 2 A_b^2 (3 - 2 A_b) t^2 + A_b (16 A_b - 20) t - 16 A_b + 8 = 0.$$

Ennek pozitív gyökeit meghatározzuk, majd figyelembe vesszük, hogy

$$\mu = + \sqrt[4]{t}$$

és a (33) alsó egyenletéből

$$\varrho = + \sqrt[3]{\frac{2 + A_b \mu^4}{A_b \mu^4}}.$$

Több pozitív gyök esetén az az (μ, ϱ) értékpár, az optimum, mely utólagos visszahelyettesítés elvégzésével (33)-t kielégíti.

A százalékos gazdaságossági eltérés pedig

$$(35) \quad M(\mu, \varrho)\% = 100 \left[1 - \frac{2 \left(\frac{1}{\mu_{opt}} + \frac{1}{\mu_{opt}^3 \varrho_{opt}} \right) + A_b \left(\mu_{opt}^3 + \mu_{opt} \varrho_{opt} + \frac{\mu_{opt}}{\varrho_{opt}} \right)}{2 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3 \varrho} \right) + A_b \left(\mu^3 + \mu \varrho + \frac{\mu}{\varrho} \right)} \right].$$

c) Súly optimum meghatározása

(15), (16), (18), (20), (31), (33), (34) és (35) összefüggések itt is érvényesek. Ebben az esetben

$$(36) \quad A_c = \frac{\gamma_v f_v}{\gamma_r f_r}.$$

d) Nyersanyag-ár + energiafogyasztási ár optimumának meghatározása

A transzformátor nyersanyag-árának és az energiafogyasztás árának összegét a geometriai méretek függvényében felírva, majd alkalmazva (15), (16), (18) és (20) összefüggéseket, a) és b)-vel analóg módon a feladat a következő függvény szélsőértékének meghatározására van visszavezetve

$$(37) \quad F(\mu, \varrho) = 2 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3 \varrho} \right) + E \left(\mu^3 + \mu \varrho + \frac{\mu}{\varrho} \right) + \frac{S}{\mu}$$

$$E = \frac{\gamma_v f_v (p_v + W_v T \vartheta 10^{-3})}{f_r (\gamma_r p_r + W_r T \vartheta 10^{-3})}$$

$$(38) \quad S = \frac{\gamma_v f_v p_v}{\gamma_r f_r p_r + f_r W_r T \vartheta 10^{-3}}$$

A parciális deriváltak

$$(39) \quad \frac{\partial F}{\partial \mu} = -2 \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{3}{\varrho \mu^4} \right) + E \left(3\mu^2 + \varrho + \frac{1}{\varrho} \right) - \frac{S}{\mu^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = -2 \frac{1}{\mu^3 \varrho^2} + E \left(\mu - \frac{\mu}{\varrho^2} \right).$$

Teljesen hasonló módon eljárva, mint az előző esetekben, a következő harmad-fokú egyenletet nyerjük

$$(40) \quad 9E^3 t^3 + 2E^2 [9 - 3(S + 2) - 2E] t^2 + E[16 + (S + 2)^2 - 12(S + 2)] t + 2(S + 2)^2 - 16E = 0.$$

Ennek meghatározzuk pozitív gyökeit, majd figyelembe vesszük, hogy

$$\mu = + \sqrt[4]{t}$$

és (39) alsó egyenletéből

$$\varrho = + \sqrt[4]{\frac{2 + E \mu^4}{E \mu^4}}.$$

Több pozitív gyök esetén az a μ, ϱ értékpár az optimum, mely utólagos visszahelyettesítéssel (39)-et kielégíti.

A százalékos gazdaságossági eltérés

$$(41) \quad M(\mu, \varrho) \% = 100 \left[1 - \frac{2 \left(\frac{1}{\mu_{opt}} + \frac{1}{\mu_{opt}^3 \varrho_{opt}} \right) + E \left(\mu_{opt}^3 + \mu_{opt} \varrho_{opt} + \frac{\mu_{opt}}{\varrho_{opt}} \right) + \frac{S}{\mu_{opt}}}{2 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3 \varrho} \right) + E \left(\mu^3 + \mu \varrho + \frac{\mu}{\varrho} \right) + \frac{S}{\mu}} \right].$$

7. §. $\sqrt{2}$ -es oszlopkeresztmetszetű transzformátorok

Erre vonatkozólag csupán eredmények közlésére szorítkoztunk, tekintve, hogy a számítások elvileg az előzőekkel teljesen megegyeznek.

a) Nyersanyag-ár optimum meghatározása

Az optimális (μ, ϱ) értékek kielégítik az alábbi kétismeretlenes egyenlet-rendszert:

$$(43) \quad \begin{aligned} -\frac{1+\sqrt{2}}{\mu^2} - \frac{6}{\mu^4 \varrho} + \sqrt{2} A_a \left(3\mu^2 + \frac{1}{\varrho} + \varrho - \frac{1}{\mu^2} \right) &= 0, \\ -\frac{2}{\mu^3 \varrho^2} + \sqrt{2} A_a \left(\mu - \frac{\mu}{\varrho^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

ahol

$$A_a = \frac{\gamma_v f_v p_v}{\gamma_r f_r p_r}.$$

(43)-ból kapjuk a következő harmadfokú egyenletet:

$$(44) \quad 18\sqrt{2} A_a^3 t^3 + 4 A_a^2 [6 - 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} A_a] t^2 + [2\sqrt{2} A_a^3 + (12 + 4\sqrt{2}) A_a^2 - (20 + 9\sqrt{2}) A_a] t + 4 A_a^3 + (8 - 12\sqrt{2}) A_a + 6 + 4\sqrt{2} = 0.$$

Ennek meghatározzuk pozitív gyökeit, majd figyelembe vesszük, hogy

$$\mu = + \sqrt[4]{t}$$

és (43) alsó egyenletéből

$$(45) \quad \varrho = + \sqrt{\frac{\sqrt{2} A_a \mu^4 + 2}{\sqrt{2} A_a \mu^4}}.$$

Több pozitív t gyök esetében az az (μ, ϱ) értékpár szolgáltatja az optimumot, mely utólagos visszahelyettesítés elvégzésével (43)-at kielégíti.

A százalékos gazdaságossági eltérés:

$$(46) \quad \begin{aligned} M(\mu, \varrho)\% &= \\ &= 100 \left[1 - \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{\mu^2} + \frac{2}{\mu^4 \varrho} + \sqrt{2} A_a \left(\mu_{opt}^3 + \frac{\mu_{opt}}{\varrho_{opt}} + \mu_{opt} \varrho_{opt} + \frac{1}{\mu_{opt}} \right)}{\frac{1+\sqrt{2}}{\mu} + \frac{2}{\mu^3 \varrho} + \sqrt{2} A_a \left(\mu^3 + \frac{\mu}{\varrho} + \mu \varrho + \frac{1}{\mu} \right)} \right]. \end{aligned}$$

b) Veszteségoptimum meghatározása

Az optimális (μ, ϱ) értékek kielégítik az alábbi kétismeretlenes egyenlet-rendszert:

$$(47) \quad \begin{aligned} -\frac{1+\sqrt{2}}{\mu^2} - \frac{6}{\mu^4 \varrho} + \sqrt{2} A_b \left(3\mu^2 + \frac{1}{\varrho} + \varrho \right) &= 0, \\ -\frac{2}{\mu^3 \varrho^2} + \sqrt{2} A_b \left(\mu - \frac{\mu}{\varrho^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

ahol

$$A_b = \frac{\gamma_v f_v W_v}{f_r W_r}.$$

(47)-ből kapjuk a következő harmadfokú egyenletet:

$$(48) \quad 18\sqrt{2} A_b^3 t^3 + 4 A_b^2 (6 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} A_b) t^2 + A_b (32 A_b - 9\sqrt{2} - 20) t + 6 + 4\sqrt{2} - 16\sqrt{2} A_b = 0.$$

Ennek meghatározzuk pozitív gyökeit, majd figyelembe vesszük, hogy

$$\mu = + \sqrt[4]{t}$$

és (47) alsó egyenletéből

$$(49) \quad \varrho = \sqrt{\frac{\sqrt{2} A_b \mu^4 + 2}{\sqrt{2} A_b \mu^4}}.$$

Több pozitív t gyök esetében az az (μ, ϱ) értékpár szolgáltatja az optimumot, mely utólagos visszahelyettesítés elvégzésével (47)-et kielégíti.

A százalékos gazdaságossági eltérés:

$$(50) \quad M(\mu, \varrho)\% = 100 \left[1 - \frac{\frac{1 + \sqrt{2}}{\mu_{opt}} + \frac{2}{\mu_{opt}^3 \varrho_{opt}} + \sqrt{2} A_b \left(\mu_{opt}^3 + \frac{\mu_{opt}}{\varrho_{opt}} + \mu_{opt} \varrho_{opt} \right)}{\frac{1 + \sqrt{2}}{\mu} + \frac{2}{\mu^3 \varrho} + \sqrt{2} A_b \left(\mu^3 + \frac{\mu}{\varrho} + \mu \varrho \right)} \right].$$

c) Súlyoptimum meghatározása

Az eredmények b) eredményeivel megegyeznek. Itt

$$(51) \quad A_c = \frac{\gamma_v f_v}{\gamma_r f_r}.$$

d) Nyersanyag-ár + energiafogyasztási ár optimum meghatározása

Az optimális (μ, ϱ) értékek kielégítik az alábbi kétismeretlenes egyenlet-rendszert:

$$(52) \quad -\frac{1 + \sqrt{2}}{\mu^2} - \frac{6}{\varrho \mu^4} + \sqrt{2} E \left(3 \mu^2 + \varrho + \frac{1}{\varrho} \right) - \frac{\sqrt{2} S}{\mu^2} = 0$$

$$-\frac{2}{\mu^3 \varrho^2} + \sqrt{2} E \left(\mu - \frac{\mu}{\varrho^2} \right) = 0$$

lásd (38)-at.

(52)-ből kapjuk a következő harmadfokú egyenletet:

$$(53) \quad 18\sqrt{2} E^3 t^3 + 4 E^2 (6 - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} S - 2\sqrt{2} E) t^2 + E [2\sqrt{2} S^2 + (4\sqrt{2} - 20) S - 9\sqrt{2} - 20 + 32 E] t + 4 S^2 + (8 + 4\sqrt{2}) S + 6 + 4\sqrt{2} - 16\sqrt{2} E = 0.$$

Ennek meghatározzuk pozitív gyökeit, majd figyelembe vesszük, hogy

$$\mu = + \sqrt[4]{t}$$

és (52) alsó egyenletéből

$$(54) \quad \varrho = + \sqrt{\frac{\sqrt{2} E \mu^4 + 2}{\sqrt{2} E \mu^4}}.$$

Több pozitív t gyök esetében az az (μ, ϱ) értékpár szolgáltatja az optimumot, mely utólagos visszahelyettesítés elvégzésével (52)-öt kielégíti.

A százalékos gazdaságossági eltérés:

$$(55) \quad M(\mu, \varrho) \% = 100 \left[1 - \frac{\frac{1 + \sqrt{2}}{\mu_{opt}} + \frac{2}{\mu_{opt}^3 \varrho_{opt}} + \sqrt{2} E \left(\mu_{opt}^3 + \mu_{opt} \varrho_{opt} + \frac{\mu_{opt}}{\varrho_{opt}} \right) + \frac{\sqrt{2} S}{\mu_{opt}}}{\frac{1 + \sqrt{2}}{\mu} + \frac{2}{\mu^3 \varrho} + \sqrt{2} E \left(\mu^3 + \mu \varrho + \frac{\mu}{\varrho} \right) + \frac{\sqrt{2} S}{\mu}} \right].$$

8. §. Szabványlemezmaglakok vizsgálata. Összefoglalás

Az előzőekben ismertetett módszer alapján foglalkoztunk a (KGMSZ 635.438 szabvány 92-231) mm főméretekig terjedő lemezmaglakok gazdaságossági problémáival. A vizsgált szabványban szereplő lemezmaglakok gazdaságossági tulajdonságai igen egyszerűen leolvashatók a 16. és 17. ábrán feltüntetett 1. és 2. táblázatból. A táblázatokon az első főoszlop tartalmazza a szabványméreteket, ezután következik négy főoszlop (ár, veszteség, súly, ár + energiafogyasztás). Ezen főoszlopok öt oszlopot tartalmaznak, melyek sorrendben az optimális méretű lemezmaglaptól való százalékos gazdaságossági eltérést és magukat a minimalizáló méreteket tartalmazzák. Az optimális oszlopméret meghatározásánál a teljesítmény kiszámítása mellőzhető. Ugyanis a (18) összefüggés alapján írható, hogy

$$(56) \quad f = C \mu.$$

A teljesítményt rögzítve a minimalizáló oszlopméretű lemezmaglapra a következő írható fel:

$$(57) \quad f_m = C \mu_{opt}.$$

(56) és (57)-ből a teljesítményt tartalmazó faktort kiküszöbölve kapjuk, hogy

$$(58) \quad f_m = \frac{\mu_{opt}}{\mu} f.$$

A szóbanforgó táblázatokon a vizsgált lemezmaglapok következő tulajdonságai olvashatók le.

I. Ár, veszteség, ár + energiafogyasztás szempontjából, tehát népgazdasági szempontból a lemezmaglapok a széles ablakméretek miatt nem gazdaságosak. Veszteség (hatásfok) szempontjából a lemezmaglapok még valamivel rosszabbak is, mint nyersanyag-ár szempontjából. Az optimális, minimalizáló geometriai méretek erősen eltérnek a szabványméretektől. Az optimális lemezek széles oszlopmeretűek keskeny ablakkal.

II. Súly szempontjából a vizsgált lemezmaglapok gyakorlatilag teljesen gazdaságosoknak mondhatók. Bár geometriai méretekben mutatkozik némi eltérés, a százalékos gazdaságossági eltérés elenyésző.

Érdekes, hogy eredményeink a hulladékmentesen sajtolható lemezmaglapokra vonatkozó eredményekkel teljesen ellenkező jellegűek. Míg a hulladékmentesen sajtolható EI szabványlemezmaglapok ár, veszteség, energiafogyasztási ár szempontjából igen gazdaságosak, addig utóbbi vizsgálatainkban szereplő lemezmaglapok súly szempontjából optimális méretűek. Célszerűnek mutatkozik tehát, speciális célokra készült transzformátoroktól eltekintve a hulladékmentesen sajtolható EI lemezmaglapok nagyobb transzformátorok esetén is való alkalmazása.

1. Táblázat

Négyzetes oszlopkeresztmetszet																		
			Ár				Veszteség				Súly				Ár + energiafogyasztás			
f	e	g	M%	f _m	e _m	g _m	M%	f _m	e _m	g _m	M%	f _m	e _m	g _m	M%	f _m	e _m	g _m
23	51	23	33	37	37	12	39	39	37	11	0,25	23	57	21	37	38	37	12
29	56	24	24	43	43	14	30	45	43	13	1,2	26	66	24	28	44	43	14
35	70	30	26	52	53	18	32	55	53	16	0,78	32	81	30	30	54	53	17
40	80	35	26	60	61	20	33	63	60	19	0,67	37	93	35	31	62	61	19
45	95	40	28	69	70	23	34	73	69	21	0,38	43	107	40	32	71	69	22
55	125	42,5	24	83	84	28	30	87	83	25	1,2	51	128	48	28	86	83	26
65	144	50,5	24	97	98	33	30	103	98	30	1,2	60	151	56	28	101	98	31

16. ábra.

2. Táblázat

2. táblázat

V ₂ -es oszlopkeresztmetszet																		
			Ár				Veszteség				Súly				Ár + energiafogyasztás			
f	e	g	M%	f _m	e _m	g _m	M%	f _m	e _m	g _m	M%	f _m	e _m	g _m	M%	f _m	e _m	g _m
23	51	23	26	35	37	14	32	37	37	12	0,69	21	59	23	30	36	37	13
29	56	24	18	41	43	16	24	43	43	14	3,6	25	68	27	22	42	43	15
35	70	30	20	50	53	20	25	52	53	18	2,8	31	84	33	23	52	53	18
40	80	35	20	57	60	22	26	60	60	20	2,5	35	96	38	24	59	60	21
45	95	40	21	66	69	26	27	69	69	23	2,0	40	110	43	25	68	69	24
55	125	42,5	18	79	83	31	24	83	83	28	3,7	48	132	52	21	82	83	29
65	144	50,5	18	93	98	38	23	98	98	33	3,7	57	155	61	21	96	98	34

17. ábra.

Végezetül összefoglaljuk számításaink eredményeit.

I. Széles ablakú lemezmaglapok a súly szempontjából gazdaságosak.

II. Hulladékmentesen sajtolható EI lemezmaglapok esetében az összes többi szempontból számított optimumok helyei egybeesnek.

Meg kívánjuk jegyezni, hogy egy későbbi cikkünkben transzformátorok anyagainak gazdaságossági problémáival kívánunk foglalkozni.

Köszönetet mondunk POLITU KULA tudományos s. munkatársnak, aki a problémával kapcsolatos numerikus és grafikus munkák elvégzésével segítségünkre volt.

(Beérkezett: 1960. nov. 1.)

IRODALOM

- [1] NÁDAS T.—FÉNYES T.: „Lemezmaglapok gazdaságosságának vizsgálata.” *Magyar Híradástechnika*, X. (1959) 115—119.
- [2] SILLENTI, S.: „Proporzionamento economico di piccoli trasformatori.” *Tecnica Italiana*, 1947. 231—235.

UNTERSUCHUNG DER ALLGEMEINEN GEOMETRISCHEN WIRTSCHAFTLICHKEIT DER KERNBLECHE VON KLEINTRANSFORMATOREN

T. FÉNYES und T. NÁDAS

Zusammenfassung

Autoren befassten sich in [1] mit dem Problem der geometrischen Wirtschaftlichkeit der Transformatoren-Kernbleche mit genormten Abmessungen. Sie haben die relativen geometrischen Masse der wirtschaftlichsten, abfalllosen EI Kernbleche bestimmt (siehe [1]) und befassten sich auch mit der Frage der Abweichung vom Optimum solcher Kernbleche, deren Abmessungen den DIN entsprechen. Autoren lösten das Problem ausschliesslich indem sie den Preis das Eisen- und Kupfermaterials in Betracht zogen. Das Problem hat eine grosse volkswirtschaftliche Bedeutung, da bei Verwendung von Kernblechen mit Abmessungen, die aus dem Standpunkt der Wirtschaftlichkeit nicht entsprechen, überflüssiger Weise Kupfer- und Eisenmaterial verschwendet wird. Dies kann in Betracht der bedeutenden Kapazität der ungarischen Schwachstrom-Industrie, einen grossen Verlust bedeuten.

Diese Untersuchungen aber lieferten nur die spezielle Lösung des Problems. Aus volkswirtschaftlichem Standpunkt ist es sehr wichtig, dass die Transformatoren einen guten Wirkungsgrad haben. Deshalb soll bei ihnen der auftretende Verlust klein und der Preis der während der Betriebszeit in ihnen verloren gehenden elektrischen-Energie niedrig sein. In vielen Fällen ist es wichtig Kernbleche mit solchen Abmessungen zu verwenden, mit denen ein aus dem Gesichtspunkt des Gewichts, optimaler Transformator hergestellt werden kann. Man sieht, dass das Problem aus verschiedenen Gesichtspunkten der Wirtschaftlichkeit verallgemeinert werden kann.

Man muss aber in Betracht ziehen, dass die ungarische Schwachstrom-Industrie nicht nur abfallose Kernbleche mit aus den DIN übernehmenen Abmessungen benützt; sondern auch EI Kernbleche mit einem kleinen Abfall (KGMSZ. Norme 635.438, Hauptmass 92—231 mm). So bestehen daher alle vorerwähnte Wirtschaftlichkeits-Fragen sinngemäss auch im Falle der letzteren Kernblechen. Bei diesen Kernblechen besteht kein mathematischer Zusammenhang zwischen einzelnen Massen, wie im Fall von abfallosen Kernblechen. So sieht man, dass das Grundproblem auch auf den Fall von Kernblechen mit allgemeiner Form verallgemeinert werden kann.

Die Autoren befassen sich in dieser Abhandlung mit den Problemen der allgemeinen geometrischen Wirtschaftlichkeit der abfallosen EI Kernblechen, sowie der Kernblechen ohne geometrischer Gebundenheit. Beider Untersuchung der abfallosen Kernblechen arbeiten sie eine mathematische Methode aus, mit deren Hilfe das Problem sehr einfach behandelt werden kann. In letzteren Fall, bei Kernblechen mit allgemeiner Form, wird die Methode von SILLEN [2] von den Verfassern angewendet, die sie etwas erweitern. Die Verfasser untersuchen — in Kenntniss der Kernbleche mit optimaler Abmessung — die wirtschaftliche Abweichung der genormten Masse von den optimalen Massen. Die Ergebnisse der Berechnungen sind von den Verfassern in leicht handhabbaren Diagrammen, resp. Tabellen angeführt.

ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИЧНОСТИ ПЛАСТИНОЧНЫХ ЯДЕРНЫХ ЛИСТОВ КАРЛИКОВЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

T. FÉNYES и T. NÁDAS

Резюме

Авторы в работе [1] занимались проблемой геометрической экономичности пластиночных ядерных листов трансформаторов стандартных размеров. Они определили относительные геометрические размеры наиболее экономичных прессуемых без отбросов пластинок EI и занимались вопросом об экономическом отклонении от оптимума пластинок размеров, данных стандартом DIN. Авторы решили задачу, принимая во внимание лишь цену используемого железа и меди. Проблема имеет большое народно-хозяйственное значение, так как в случае использования пластинок, размеры которых не хороши с точки зрения экономичности, напрасно расходуется медь и железо, что приносит большой ущерб государству.

Однако эти исследования дали лишь специальное решение проблемы. Для народного хозяйства важно и то, чтобы трансформаторы имели высокую эффективность, т. е. чтобы потери железа и меди были относительно незначительны и поэтому были бы незначительны и потери электричества за все время работы. Часто важно применение пластинок таких размеров, чтобы из них можно было бы изготовить трансформатор оптимального веса. Можно видеть, что на основании различных факторов экономичности задача может быть обобщена.

Нужно принять во внимание, что венгерская промышленность использует и пластинки EI, прессуемые с небольшими потерями, с размерами,

взятыми из стандарта DIN (стандарт KGMSZ 635.438, основной размер 92—213 мм). Таким образом все указанные вопросы экономичности переносятся и на эти пластинки. Для этих пластинок нет функциональной зависимости между отдельными размерами, как в случае пластинок, прессуемых без потерь. Таким образом видно, что исходная проблема может быть обобщена и для пластиночного ядерного листа общей формы.

В настоящей работе авторы занимаются общими вопросами экономичности пластиночных ядерных листов обоих типов. При исследовании пластиночного ядерного листа без потерь они разрабатывают математический метод, с помощью которого проблема может очень просто изучаться. В более общем случае они используют метод SILLENT [2], несколько дополняя его. Зная пластиночные ядерные листы оптимальных размеров, авторы исследуют экономическое расхождение между стандартными оптимальными, размерами. Результаты расчета они дают в виде удобных в обращении диаграмм и таблиц.

ÜZLETEK ÁRUELLÁTÁSÁVAL KAPCSOLATOS SZÉLSŐÉRTÉKFELADATOK

RÉNYI ALFRÉD és ZIERMANN MARGIT

Bevezetés

E dolgozatban a következő problémával foglalkozunk: egy boltban, amely egy vagy több árucikket árul, és amelyben az egyes árucikkek iránti várható keresletet ismertnek tételezzük fel, mekkora az a minimális készlet az egyes árucikkekből, amellyel a raktár következő feltöltéséig előírt kielégítési biztonsággal ki lehet elégíteni a fogyasztókat?

A „kielégítési biztonság” fogalmának szemléletes közgazdasági tartalma nyilvánvalóan az, hogy a vevők túlnyomó része megtalálja a boltban azt az árut, amire szüksége van (feltéve, hogy ez az áru egyáltalán a bolt által árusított cikkek egyike). A „kielégítési biztonságnak” azonban több, e közgazdasági tartalommal összhangban levő definíciója adható meg még egyetlen árucikk esetében is és a fenti kérdésre adott válasz természetesen nagy mértékben függni fog attól, hogy ezt a fogalmat hogyan definiáljuk; ha a bolt többféle árucikket árul (márpedig a reális helyzetnek ez felel meg), akkor az a kérdés is felmerül, hogy az egyes árucikkekre vonatkozó kielégítési biztonságokat hogyan egyesítjük egyetlen mérőszámmá?

E dolgozatban a fenti problémát a kielégítési biztonság több számbajövő értelmezése mellett oldjuk meg. Azt, hogy egy konkrét esetben melyik értelmezés veendő alapul, elsősorban közgazdasági megfontolások alapján kell eldönteni, azonban figyelembe veendő a számolástechnikai szempont is. A tárgyalt alternatív felfogások ugyanis más és más numerikus feladatra vezetnek, és a számítások egyszerű vagy bonyolult voltát a gyakorlati felhasználásnál szükségképpen figyelembe kell venni.

A probléma megoldása során figyelembe vesszük azt a kárt is, amelyet a feleslegesen nagy készletek felhalmozása okoz.

A fenti probléma eredetileg cipőboltok raktárkészletével kapcsolatban merült fel, azonban a kérdést olyan általánosságban vizsgáltuk, hogy az elvileg bármilyen, az egyéni vásárlók nagy tömegét kiszolgáló boltra alkalmazható.

Az 1. § egy árucikket árusító bolt esetével foglalkozik. E § eredményei több árucikket árusító bolt esetében is alkalmazhatók, ha a biztonságos raktárkészletet az egyes árucikkekből egymástól függetlenül akarjuk megállapítani. A 2. §-ban foglalkozunk több terméket árusító boltokkal azon feltevés mellett, hogy a bolt által árult összes árucikkből a raktárkészlet beszerzésére korlátozott pénzmennyiség áll rendelkezésre és így az egyes árucikkekből raktáron tartandó mennyiségek nem határozhatók meg egymástól függetlenül. A 3. §-ban néhány kiegészítő megjegyzést teszünk; többek között megmutat-

juk, hogy mennyiben indokolt az a feltevés, hogy a kereslet közelítőleg normális eloszlású. A 4. § néhány utalást tartalmaz a kérdéskör irodalmára.

A téma felvetése az Országos Tervhivataltól ered. Az ott folyó közgazdasági kutatómunka kapcsán merült fel a minimális készlet matematikai úton való megközelítésnek igénye. Köszönettel tartozunk DR. AJTAI MIKLÓSNak, az Országos Tervhivatal elnökhelyettesének, aki az e dolgozat tárgyát képező problémára figyelmünket felhívta, továbbá munkánkat tanácsaival is támogatta.

Reméljük, hogy ezen dolgozat segítséget nyújthat a közgazdaságtudományban előretörő egzakt irányzatok megerősödésében.

1. §. Egy árucikket árusító bolt esete

Képzeljünk el egy boltot, amely csak egyetlen árucikket árul. Válasszuk meg valahogyan a szóban forgó cikk egységét.

Jelölje T a raktár két egymásutáni feltöltése közötti időtartamot. Feladatunk annak meghatározása, hogy a T hosszúságú időtartam elején a raktárkészletet milyen szintre kell feltölteni ahhoz, hogy ebből a készletből a T hosszúságú időtartam alatt, tehát a raktárkészlet következő kiegészítéséig a kellő biztonsággal ki lehessen elégíteni a keresletet. A keresletet, amely ezen időtartam alatt fel fog lépni, ζ -val jelöljük. ζ nyilván valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvényét (az előző időszakok forgalmára vonatkozó adatok alapján) ismertnek tételezzük fel, és $F(x)$ -szel jelöljük. Tehát

$$(1) \quad F(x) = P(\zeta < x),$$

annak a valószínűségét jelöli, hogy a szóban forgó időszakban a bolt által árusított árucikk iránti kereslet az x egységet nem fogja meghaladni. Jelölje R a szóban forgó időszak elején a boltban levő raktárkészletet.

A kereslet kielégítése biztonságának értelmezésére a következő alternatív definíciók látszanak alkalmasnak:

1. definíció. Azt mondjuk, hogy a kereslet α biztonsággal van kielégítve, ha $P(\zeta < R) = \alpha$, vagyis, ha α valószínűséggel *minden*, a szóban forgó időszakban a boltba vásárolni bejövő vevő megkapja a kívánt árut. Az α számot a *teljes kielégítés biztonságának* fogjuk nevezni.

A kielégítési biztonság ezen definíciója igen plauzibilis, gyakorlati szempontból azonban nem teljesen megfelelő.

Ha ugyanis az α biztonsági szintet 1-hez igen közelinek választjuk (pl. 0,99-nek), akkor ilyen biztonság eléréséhez rendkívül nagy raktárkészlet szükséges, amelynek jelentős része nagy valószínűséggel nem fog eladásra kerülni; ha viszont α értékét alacsonyabbnak választjuk (pl. 0,9-nek), akkor nem tudjuk áttekinteni, hogy abban az esetben, amikor egyes vevőket áru hiányában el kell küldeni — s ennek már nem elhanyagolható (0,1) a valószínűsége —, a vevők hányadrésze távozik dolgavégezetlenül a boltból. Ezért látszik célszerűnek a következő alternatív definíció.

2. definíció. Azt mondjuk, hogy a kereslet β biztonsággal van kielégítve, ha a kielégíthető kereslet és a teljes kereslet hányadosának várható értéke β -val egyenlő. Tehát, ha R a raktárkészlet, akkor

$$(2) \quad \beta = M\left(\frac{\min(\zeta, R)}{\zeta}\right) = F(R) + R \int_R^{\infty} \frac{dF(x)}{x}.$$

A β számot a kereslet *relatív kielégítési biztonságának* fogjuk nevezni.

Ha előírjuk a teljes, illetve a relatív kielégítési biztonságot, egyértelműen meghatározhatjuk azt a raktárkészletet, amellyel ezt az előírt biztonságot el lehet érni. Könnyen belátható, hogy ha ugyanahhoz az α számhoz határozzuk meg azt az R_1 ill. R_2 készletet, amely mellett a teljes, ill. a relatív kielégítési biztonság α -val egyenlő, akkor mindig $R_2 < R_1$.

Vizsgáljuk meg közelebbről azt az esetet, amikor a kereslet közelítőleg normális eloszlású, ami a gyakorlatban első közelítésben legtöbbször teljesül. (Erre a kérdésre a 3. §-ban még visszatérünk.) Jelölje M a kereslet várható értékét és D a szórását, akkor tehát azt tesszük fel, hogy

$$(3) \quad F(x) = \Phi\left(\frac{x - M}{D}\right),$$

ahol

$$(4) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Az R raktárkészletet írjuk $R = M + \lambda D$ alakba. Feltehetjük, hogy $R > M$, hiszen ellenkező esetben 50%-nál nagyobb valószínűséggel a raktárkészlet nem lesz elegendő a kereslet kielégítésére. Az $R = M + \lambda D$ kifejezésben szereplő két tagot a következőképpen értelmezhetjük: M a „törzskészlet”, λD pedig a „biztonsági készlet”; a λ faktort *biztonsági faktornak* fogjuk nevezni. A kielégítési biztonság első definíciója szerint a λ számra a

$$(5) \quad \Phi(\lambda) = \alpha$$

egyenlet, míg a kielégítési biztonság második definíciója alapján a

$$(6) \quad \Phi(\lambda) + (M + \lambda D) \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}(M + uD)} du = \beta$$

egyenlet adódik.

A (6) egyenletből adott M , D és β mellett λ értéke meghatározható, bár a számítás meglehetősen bonyolult. Ezzel szemben az (5) egyenletből adott α -hoz λ értéke a standard normális eloszlás táblázatából egyszerű vissza-kereséssel adódik; például, ha $\alpha = 0,95$, akkor $\lambda = 1,645$.

A 2. definíció adott β mellett az M és D számok nem minden értékéhez ad helyes eredményt. BÉKÉSSY ANDRÁS hívta fel a figyelmünket arra, hogy adott β mellett lehet M és D értékét úgy megválasztani, hogy (6)-ból λ -ra negatív érték, azaz $R < M$ adódjék, ami nyilván gyakorlatilag nem fogadható el. Ez az első pillantásra paradox eredmény érthetővé válik, ha figyelembe vesszük, hogy ha a várható kereslet, M igen nagy és ugyanakkor D értéke M -hez képest elhanyagolhatóan kicsiny, akkor a tényleges kereslet igen nagy valószínűséggel rendkívül közel lesz M -hez, tehát a kielégíthető kereslet és a teljes kereslet hányadosa csak akkor lesz pl. 0,9-cel egyenlő, ha R lényegesen kisebb M -nél. Ezen paradoxon kiküszöbölésére bevezetjük a 2. definíció egy módosítását, amely abban áll, hogy nem a kielégíthető keresletet viszo-

nyitjuk a teljes kereslethez, hanem a kielégíthető keresletnek a várható kereslet meghaladó részét (a kielégíthető „túlkeresletet”) a teljes keresletnek a várható keresletet meghaladó részéhez (a teljes „túlkereslethez”).

3. definíció. Azt mondjuk, hogy a kereslet γ biztonsággal van kielégítve, ha a várható keresleten túlmenő kielégíthető kereslet (kielégíthető túlkereslet) és a várható keresleten túlmenő teljes kereslet (teljes túlkereslet) hányadosának várható értéke γ . Tehát, ha R a raktárkészlet és M a várható kereslet, akkor

$$(2a) \quad \gamma = \mathbf{M}(\varrho) \quad \text{ahol} \quad \varrho = \begin{cases} 1 & \text{ha } \zeta \leq R \\ \frac{R - M}{\zeta - M}, & \text{ha } \zeta > R. \end{cases}$$

Vagyis

$$(2b) \quad \gamma = F(R) + \int_R^{+\infty} \frac{R - M}{x - M} dF(x).$$

A γ számot a *várakozáson felüli kereslet relatív kielégítési biztonságának* nevezhetjük.

A 3. definíció nemcsak kiküszöböli a 2. definíció említett hiányosságait, hanem meglepő egyszerűen kezelhető.

Vizsgáljuk meg ezt közelebbről abban az esetben, amikor a kereslet közelítőleg normális eloszlású, tehát $F(x) = \Phi\left(\frac{x - M}{D}\right)$, ahol $\Phi(x)$ a (4) alatti normális eloszlásfüggvény. Akkor, ha az R raktárkészletet újból $R = M + \lambda D$ alakban keressük,

$$(2c) \quad \gamma = \Phi(\lambda) + \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-v^2/2}}{v} dv.$$

Adott γ mellett λ értékét a (2c) egyenlet megoldásával határozhatjuk meg. Igen nagy előnye a 3. definíciónak, hogy λ értéke nem függ sem M -től, sem D -től, kizárólag γ -tól. A (2c) egyenlet megoldásában semmi másra nincs szükség, mint egy táblázatra, amely γ értékét λ függvényeként adja meg; e táblázatból visszakereséssel határozhatjuk meg adott γ -hoz a hozzátartozó λ értéket.

Ha meg akarjuk határozni, hogy mekkora a leggazdaságosabb raktárkészlet, figyelembe kell vennünk azt a kárt, amely azáltal adódik, hogy egyes vevők kielégítetlenül távoznak és azt a kárt, amely azáltal jön létre, hogy felesleges készlet hever raktáron. Az elsőnek említett kár nyilván a kielégítetlenül maradó kereslettel, míg a második az el nem adott készlettel arányos. Ha az arányossági tényezőket a -val és b -vel jelöljük (az a kártényezőt kézenfekvő az áru egy egységének eladásából származó haszonnal arányosnak venni, a b kártényező meghatározása nem ilyen egyértelmű), akkor a várható kár

$$(7) \quad K = a \mathbf{M}(\max(0, \zeta - R)) + b \mathbf{M}(\max(0, R - \zeta)).$$

Ha újból $R = M + \lambda D$, $F(x) = \Phi\left(\frac{x-M}{D}\right)$, vagyis a kereslet közelítőleg normális eloszlású M várható értékkel és D szórással, és λ jelöli a biztonsági tényezőt, akkor

$$(8) \quad K = D\left(a \int_{\lambda}^{\infty} (1 - \Phi(u)) du + b \int_{-\infty}^{\lambda} \Phi(u) du\right)$$

$$(9) \quad \frac{dK}{d\lambda} = D(b\Phi(\lambda) - a(1 - \Phi(\lambda))),$$

tehát az optimális raktárkészlet

$$(10) \quad M + \lambda^* D,$$

ahol λ^* a

$$(11) \quad \Phi(\lambda^*) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{a}{a+b}$$

egyenlet gyöke. Nem meglepő, hogy a megoldás csak az a és b „kártényezők” arányától függ. Azt, hogy λ^* tényleg minimalizálja a kárt, abból láthatjuk be, hogy

$$(12) \quad \frac{d^2 K}{d\lambda^2} = \frac{D(a+b)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} > 0,$$

vagyis K a λ biztonsági tényező konvex függvénye.

Például, ha $a = 4b$, akkor $\frac{a}{a+b} = 0,8$, tehát $\lambda^* = 0,842$, míg ha

$a = 9b$, akkor $\frac{a}{a+b} = 0,9$, tehát $\lambda^* = 1,282$ és ha $a = 19b$, akkor $\frac{a}{a+b} = 0,95$, tehát ez esetben $\lambda^* = 1,645$. Általában tehát azt mondhatjuk, hogy ha előírjuk, hogy a teljes kielégítési biztonság értéke α legyen, ez ugyanahhoz a raktárkészlethez vezet, mintha azt tesszük fel, hogy az a és b kártényezők úgy aránylanak egymáshoz, mint α és $1-\alpha$, és úgy határozzuk meg a biztonsági tényezőt, hogy a kár minimális legyen (feltéve, hogy a kereslet közelítőleg normális eloszlású).

2. §. Több árucikket árusító bolt esete

Ha egy bolt több cikket árusít, akkor a raktárkészlet megállapításánál elvben eljárhatnánk úgy is, hogy minden egyes árucikkre előírjuk a teljes (vagy relatív) kielégítési biztonság (esetleg árucikkenként más-más) értékét, vagy megállapíthatjuk árucikkenként az a és b kártényezőket, és az 1. §-ban ismertetett számítási eljárást minden egyes cikke egymástól függetlenül elvégezve, kiszámíthatjuk, hogy az egyes cikkekből mekkora raktárkészlet szükséges.

Éz az eljárás azonban nem felel meg teljesen a gyakorlati követelményeknek. Sokkal realisabb a következő eljárás: feltesszük, hogy a raktárkészlet

beszerzésére rendelkezésre álló teljes pénzösszeg adva van, és a kérdés az, hogyan kell ezt az összeget az egyes árucikkek beszerzésére a leggazdaságosabban elosztani. A raktárkészlet gazdaságosságát a következőképpen értelmezzük: melyik árucikkből mennyit rendeljünk, hogy a ki nem elégíthető kereslet folytán kieső bevétel okozta kár és az el nem adott áruk raktáron heveréséből származó kár összege minimális legyen?

Tegyük fel, hogy a vizsgált üzlet N féle árucikket árusít; ezeket számozzuk meg 1-től N -ig, és a k -adik sorszámot kapott árut nevezzük röviden a k -adik árunak. Tegyük fel, hogy az egyes árucikkekből a keresletek rendre közelítőleg normális eloszlásúak, továbbá, hogy a k -adik áruból a kereslet várható értéke M_k és szórása D_k . Akkor, ha a kártényezők a k -adik árura vonatkozólag a_k és b_k és a k -adik áruból a raktárkészlet megrendelésénél λ_k biztonsági faktort alkalmazunk, akkor az 1. § (9) képlete szerint a teljes kár

$$(13) \quad K = \sum_{k=1}^N D_k (a_k \int_{\lambda_k}^{\infty} (1 - \Phi(u)) du + b_k \int_{-\infty}^{\lambda_k} \Phi(u) du).$$

A λ_k biztonsági faktorok továbbá alá vannak vetve a

$$(14) \quad \sum_{k=1}^N c_k (M_k + \lambda_k D_k - r_k) = E$$

mellékfeltételnek, ahol c_k a k -adik áru egy egységének beszerzési (nagykereskedelmi) ára, és E a raktár felújítására rendelkezésre álló teljes pénzösszeg, míg r_k a k -adik áruból a rendelés előtt még raktáron levő (az előző rendelésből fennmaradt) készlet. Feladatunk tehát a (13) alatti K kárösszeg minimalizálása a λ_k biztonsági tényezők olyan megválasztásával, hogy azok a (14) feltételnek eleget tegyenek. Ilyenmódon egy feltételes szélsőértékfeladattal állunk szemben, amelyet az ún. Lagrange-féle multiplikátor-módszerrel oldhatunk meg.

Ez a módszer a

$$(15) \quad \frac{\partial K}{\partial \lambda_k} + \mu c_k D_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

egyenletrendszerre vezet. (9)-re való tekintettel a λ_k számokra a

$$(16) \quad (a_k + b_k) \Phi(\lambda_k) - a_k + \mu c_k = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, ahonnan

$$(17) \quad \lambda_k = \Phi^{-1} \left(\frac{a_k - \mu c_k}{a_k + b_k} \right).$$

A (17)-ben szereplő μ ismeretlent úgy kell meghatározni, hogy a (14) összefüggés fennálljon, tehát μ a

$$(18a) \quad \sum_{k=1}^N c_k D_k \Phi^{-1} \left(\frac{a_k - \mu c_k}{a_k + b_k} \right) = E'$$

egyenletből számítandó ki, ahol

$$(18b) \quad E' = E - \sum_{k=1}^N c_k (M_k - r_k).$$

Az E' mennyiségnek egyszerű jelentése van: E' az a pénzösszeg, amely a raktárkészlet kiegészítésére rendelkezésre álló összegből még marad, miután minden áruból a készletet a törzskészletre egészítettük ki.

Mivel az a_k, b_k, c_k, D_k számok mind pozitívak, a (18) baloldalán álló kifejezés μ -nek monoton csökkenő függvénye, amely minden valós értéket felvesz, tehát a (18) egyenletnek egy és csak egy megoldása van.

A (17) és (18) egyenletek tartalmazzák a tárgyalt szélsőértékfeladat általános megoldását. Vizsgáljunk meg néhány érdekesebb speciális esetet. Vizsgáljuk meg például azt az esetet, amikor az a_k és b_k kártényezők arányosak c_k -val, azaz a k -adik árucikk egységárával, és az arányossági tényező nem függ k -tól, azaz

$$(19) \quad a_k = ac_k \quad \text{és} \quad b_k = bc_k.$$

Ez esetben a λ_k ismeretlenek mind egyenlők, közös értéküket λ -val jelölve, λ -ra a

$$(20) \quad \lambda = \Phi^{-1} \left(\frac{a - \mu}{a + b} \right)$$

kifejezést kapjuk, ahol $x = \Phi^{-1}(y)$ az $y = \Phi(x)$ függvény inverz függvényét jelöli. A μ ismeretlen értékére ez esetben a

$$(21) \quad \mu = a - (b + a) \Phi \left(\frac{E'}{\sum_{k=1}^N c_k D_k} \right)$$

explicit képlet adódik, és így a λ biztonsági faktorra az igen egyszerű

$$(22) \quad \lambda = \frac{E'}{\sum_{k=1}^N c_k D_k}$$

képletet nyerjük. A (22) képlet persze közvetlenül levezethető abból a feltevésből, hogy a λ_k számok mind egyenlők egymással; a fenti megfontolás azonban ennél többet ad, mert megmutatja, hogy az $a_k = ac_k$ és $b_k = bc_k$ speciális esetben akkor lesz a kár minimális, ha a λ_k számok mind egyenlők egymással és közös értékük a (22) alatti λ szám, amely *független az a és b kártényezőktől*. Ezt közvetlenül is be lehet látni; a Lagrange-multiplikátor-módszer nélkül, a Jensen-féle egyenlőtlenség segítségével. Ugyanis, bevezetve a

$$(23) \quad K(\lambda) = a \int_{\lambda}^{\infty} (1 - \Phi(u)) du + b \int_{-\infty}^{\lambda} \Phi(u) du$$

jelölést, mint azt az 1. §-ban láttuk, $K(\lambda)$ λ -nak konvex függvénye, és így a Jensen-egyenlőtlenség miatt

$$(24) \quad \sum_{k=1}^N D_k c_k K(\lambda_k) \geq \left(\sum_{k=1}^N D_k c_k \right) K \left(\frac{\sum_{k=1}^N D_k c_k \lambda_k}{\sum_{k=1}^N D_k c_k} \right) = \left(\sum_{k=1}^N D_k c_k \right) K(\lambda),$$

ahol λ (22) által van definiálva, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az összes λ_k számok egyenlők λ -val.

Vizsgáljuk még meg a következő speciális esetet: ha a szóban forgó árukról feltesszük, hogy minden egyes vevő egy egységet vásárol (cipőboltokban pl. ez első közelítésként feltehető, ha egy pár cipő az egység), akkor, ha a_k értékét 1-nek, b_k értékét 0-nak választjuk, akkor K egyszerűen a ki nem elégített vevők számát fogja jelenteni, azon vevők számát tehát, akik azt az árut, amit kerestek, a boltban nem találták meg. A ki nem elégített vevők száma tehát akkor lesz minimális, ha

$$(25) \quad \lambda_k = \Phi^{-1}(1 - \mu c_k),$$

ahol μ a

$$(26) \quad \sum_{k=1}^N c_k D_k \Phi^{-1}(1 - \mu c_k) = E'$$

egyenletnek tesz eleget. A μ konstans nyilvánvalóan pozitív (hiszen $\Phi^{-1}(1) = +\infty$) és így azt kapjuk, hogy az olcsóbb áruból nagyobb biztonsági faktort kell alkalmazni. Ez szemléletesen is evidens, hiszen az, hogy az olcsóbb áruból kellő biztonságot nyújtó készletet szerezzon be a bolt, kisebb összeget igényel, és így, ha a raktárkészlet vásárlására rendelkezésre álló teljes összeg korlátozott és a kielégítetlen vevők összsámát akarjuk minimalizálni, kézenfekvő, hogy az olcsóbb áruknál nagyobb biztonsági faktortal dolgozzunk.

3. §. Kiegészítő megjegyzések

Befejezésül vizsgáljuk meg azt, hogy mennyiben indokolt az a feltevésünk, hogy a kereslet normális eloszlású. Jelölje ξ_j azt, hogy a vizsgált időszakban a szóban forgó boltot felkereső és a vizsgált árucikkből vásárolni kívánó j -edik vevő mekkora mennyiséget kíván vásárolni (az illető árucikk választott egységével kifejezve). Feltehetjük, hogy a ξ_j valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Jelölje ν az illető árucikket a szóban forgó (a raktár két feltöltése közötti) időszakban vásárolni kívánó vevők számát; nyilván ν maga is valószínűségi változó. Ilyen módon a teljes keresletet ζ -val jelölve

$$(27) \quad \zeta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu,$$

vagyis a teljes kereslet véletlentől függő számú független és egyforma eloszlású valószínűségi változó összegével egyenlő. Ha ν nagy valószínűséggel nagy értékeket vesz fel, akkor ismert tételek szerint ζ még akkor is igen általános feltevések mellett közelítőleg normális eloszlású lesz, ha nem tesszük fel, hogy a ν valószínűségi változó független a ξ_j változóktól (lásd pl. [1], [2]).

A minket érdeklő esetben pedig még általában azt is feltehetjük, hogy ν független a ξ_k változóktól; nem jelent ugyanis lényeges megszorítást, ha feltesszük, hogy $\xi_j = 1$ minden j értékére, vagyis hogy minden vevő pontosan egy egységet vesz az illető árucikkből. Ez esetben $\zeta = \nu$, vagyis a kereslet azonos az illető árucikket kereső vevők számával. Bizonyos elméleti megfontolások arra mutatnak, hogy ν közelítőleg Poisson-eloszlású lesz. Ez abból a feltevésből következik, hogy a vizsgált bolt a vásárlók széles körét szolgálja ki, és a nagyszámú potenciális vásárló a szóban forgó időszakban egymástól függetlenül ugyanazzal a (kicsiny) p valószínűséggel keresi fel a boltot. Ez eset-

ben, mint jól ismeretes (lásd pl. [4]) ν közelítőleg Poisson-eloszlású $M = np$ várható értékkel, ahol n a lehetséges vásárlók száma. Ha most M nagy szám, akkor az M várható értékű Poisson-eloszlás jól közelíthető az M várható értékű és $D = \sqrt{M}$ szórású normális eloszlással. Ez a meggondolás arra mutat, hogy azon túlmenőleg, hogy a kereslet közelítőleg normális eloszlású, még azt is feltehetjük, hogy a kereslet szórása a kereslet várható értékének négyzetgyökével egyenlő, vagyis az 1. §-ban D helyett \sqrt{M} , a 2. §-ban D_k helyett $\sqrt{M_k}$ írható ($k = 1, 2, \dots, N$). Természetesen mind a kereslet eloszlásának közelítőleg normális voltát, mind pedig a $D = \sqrt{M}$ hipotézist, amelyeket elméleti meggondolásokból vezettünk le, tapasztalati adatok megvizsgálása útján ellenőrizni kell. Olyan esetekben, amikor a $D = \sqrt{M}$ hipotézis megfelel a tapasztalatoknak, a számítások némileg egyszerűsödnek, mivel a kereslet eloszlása csak egy paramétertől függ. Így például a (6) egyenlet megoldása a $D = \sqrt{M}$ esetben táblázat vagy nomogram segítségével sokkal egyszerűbb, mint az általános esetben, hiszen ekkor (6) nem 4, hanem csak 3 mennyiség közötti összefüggést fejez ki. A 2. §-ban felmerült numerikus probléma (a (18) egyenlet megoldása μ -re) nem egyszerűsödik a $D_k = \sqrt{M_k}$ feltevés által, hiszen ebben az egyenletben az egyes M_k értékek nem szerepelnek, csak az E' kiszámításánál van rájuk szükség.

Ha figyelembe vesszük, hogy egy vevő esetleg több egységet is vásárol a szóban forgó árucikkből, de feltesszük, hogy a vásárolt mennyiség mindig az egységnek egészszámu többszöröse, ún. összetett Poisson-eloszlások lépnek fel a Poisson-eloszlás helyett. (Lásd pl. [3].) A normális eloszlással való közelíthetőség szempontjából azonban ez nem jelent lényeges különbséget, ez esetben azonban a $D = \sqrt{M}$ reláció már nem áll fenn.

E dolgozatban nem foglalkoztunk azzal a kérdéssel, amikor a boltban kapható árucikkek közül egyesek helyettesíthetik egymást, vagyis elképzelhető, hogy egy vevő, aki a j -edik árucikket kívánta megvásárolni, ha az éppen nincs raktáron, esetleg ehelyett egy másik (pl. a k -edik) árucikket veszi meg. Ez azonban visszavezethető az általunk tárgyalt esetre oly módon, hogy azokat az árucikkeket, amelyek egymást helyettesíthetik (pl. azonos nagyságú, csak a fazonban különböző cipők) összevontan kezeljük. Ez esetben azonban, miután az egyes összevont árucikk-csoportokra meghatároztuk a megfelelő raktárkészletet, el kell dönteni, hogy ezen a csoporton belül hogyan osztjuk fel a csoportba tartozó árucikkek között a rendelést.

E dolgozat eredményeinek gyakorlati alkalmazása esetén természetesen mindenekelőtt meg kell határozni a szóban forgó paraméterek, így a várható kereslet (azaz M_k) számszerű értékét. Ezt a megelőző időszakra vonatkozó kereseti adatok alapján, a matematikai statisztika módszereivel lehet elvégezni. E módszerek jól ismertek, ezért azokkal itt nem foglalkozunk, csak azt húzzuk alá nyomatékosan, hogy az üzletek leggazdaságosabb raktárkészleteinek matematikai módszerrel való meghatározásának nélkülözhetetlen előfeltétele az egyes árucikkek iránti keresletre vonatkozó pontos feljegyzések vezetése, lehetőleg több éven keresztül. Ennek során, különösen ruházati cikkek-nél, nagy figyelmet kell fordítani a keresletnek az évszakoktól való függésére, és a keresletnek az életszínvonal emelkedésétől való függésére.

Befejezésül még csak azt jegyezzük meg, hogy a nyert eredmények nemcsak arra használhatók fel, hogy a bolthálózatot adottnak tekintve

hogyan lehet minden egyes boltra nézve kiszámítani, hogy mekkora készletet tartson raktáron, hanem felhasználhatók annak vizsgálatánál is, hogy indokolt-e a bolthálózat átszervezése, pl. több kisebb bolt összevonása. Ebbe a bonyolult kérdésbe itt nem kívánunk részletesen belemenni, csak rámutattunk e két problémakör szoros kapcsolatára.

4. §. Összehasonlítás más vizsgálatokkal

A raktározási problémáknak igen kiterjedt irodalma van, amely túlnyomórészt az elmúlt 10—15 évben jelent meg. Jó képet ad a raktározási problémák matematikai elméletének mai állásáról az [5] kötet, amely számos összefoglaló tanulmányt közöl. Az e kötetben használt terminológia szerint az általunk vizsgált raktározási modell *statikus* típusú. Statikusnak nevezik azokat a modelleket, amelyek csak egy alkalommal való készletbeszerzésre, vagyis egyetlen, két egymásutáni rendelés közötti időtartamra vonatkoznak; ezzel szemben dinamikusnak nevezik azokat a modelleket, amelyek sorozatos készletbeszerzésekre vonatkoznak, vagyis a raktár feltöltésének és kiürülésének változásából álló folyamatot írják le. (Ilyen dinamikus modellekkel foglalkoznak pl. a [7] és [8] dolgozatok.) A statikus modellekre vonatkozó alapvető dolgozat ARROW, HARRIS és MARSCHAK [6] munkája.

Az általunk vizsgált raktármodell az ARROW—HARRIS—MARSCHAK-féle modelltípusba tartozik.

A relatív kielégítési biztonságnak, valamint a túlkereslet relatív kielégítése biztonságának az 1. §-ban bevezetett fogalma tudomásunk szerint új. Ugyancsak nem foglalkoztak eddig, tudomásunk szerint azzal a kérdéssel sem, amelyet a 2. §-ban vizsgálunk meg, hogy ha több árucikk raktárkészletének feltöltésére egyúttvéve korlátozott összeg áll rendelkezésre, mi az optimális felosztása ennek az összegnek.

(Beérkezett: 1961. január 10.)

IRODALOM

- [1] RÉNYI, A.: „On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables”. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) 193—199.
- [2] RÉNYI, A.: „On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables”. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1960) 97—102.
- [3] RÉNYI A.: „Összetett Poisson-eloszlásokról, II.” *MTA III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **1** (1951) 329—341.
- [4] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
- [5] ARROW, K. J.—KARLIN, S.—SCARF, H.: *Studies in the mathematical theory of inventory and production*. Stanford Mathematical Studies in the Social Sciences, I. Stanford University Press, 1958.
- [6] ARROW, K. J.—HARRIS, T.—MARSCHAK, I.: „Optimal inventory policy”. *Econometrica* **19** (1951) 250—272.
- [7] PALÁSTI I.—RÉNYI A.—SZENTMÁRTONY F.—TAKÁCS L.: „A raktárkészlet pótlásáról, I.” *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 187—202.
- [8] L. ZIERMANN M.: „A raktárkészlet pótlásáról, II.” *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 203—216.

ON SOME INVENTORY PROBLEMS OF SHOPS

A. RÉNYI and M. ZIERMANN

Abstract

The authors define the *relative safety of satisfying the demand* in a shop concerning a certain commodity as the mean value of $\min\left(1, \frac{R}{\zeta}\right)$ where R is the stock level and ζ the demand in the shop concerning the commodity in question. If $F(x) = \mathbf{P}(\zeta \leq x)$ is the cumulative distribution function of the demand during a given time interval and the relative safety of satisfying the demand is prescribed to be equal to the number β ($0 < \beta < 1$) then the least stock R ensuring this can be determined by solving the equation

$$F(R) + R \int_R^{\infty} \frac{dF(x)}{x} = \beta.$$

The *relative safety of satisfying the unexpected demand* is defined as the number γ defined by

$$\gamma = F(R) + (R - M) \int_R^{\infty} \frac{dF(x)}{x - M}$$

where M is the average demand and it is supposed that $R > M$.

In § 2 the case is considered when a shop which sells N different commodities has a fixed amount E of money available for raising the stock levels of the N commodities, and the problem is considered which is the optimal ordering policy under this restriction, i. e. the ordering policy which minimizes the loss. Two types of loss are considered: the first being proportional to the mean excess of the demand over the stock, the second with the mean excess of the stock over the demand, that is the loss function is supposed to be of the form

$$a \mathbf{M}(\max(0, \zeta - R)) + b \mathbf{M}(\max(0, R - \zeta)).$$

О ПРОБЛЕМАХ, СВЯЗАННЫХ СО СНАБЖЕНИЕМ МАГАЗИНОВ
ТОВАРАМИ

A. RÉNYI и M. ZIERMANN

Резюме

Работа занимается определением минимального складового запаса отдельных товаров в магазине, необходимого для удовлетворения покупателей с некоторой заданной уверенностью удовлетворения до следующего пополнения склада.

Авторы определяют *относительную уверенность β удовлетворения спроса* на некоторой товар как математическое ожидание частного $\frac{\min(\zeta, R)}{\zeta}$, где ζ обозначает спрос на данный товар в магазине, а R запас этого товара

на складе. Тогда для заданного β ($0 < \beta < 1$) минимальное R будет решением уравнения

$$F(R) + R \int_R^{\infty} \frac{dF(x)}{x} = \beta,$$

где $F(x) = \mathbf{P}(\xi \leq x)$ функция распределения спроса за некоторый промежуток времени.

Авторы определяют *относительную уверенность γ удовлетворения неожиданного спроса* как число

$$\gamma = F(R) + (R - M) \int_R^{\infty} \frac{dF(x)}{x - M},$$

где M обозначает ожидание спроса, и предположено, что $R > M$.

В § 2 авторы рассматривают случай, когда магазин торгует N (не заменяющими друг друга) видами товара и сумма E , которую можно использовать для пополнения склада, есть заданная величина. В этом случае — при некоторых условиях — они определяют, какого товара сколько надо заказать, чтобы убыток, вызванный отсутствием дохода из-за неудовлетворенного спроса, и ущерб, вызванный находящимся на складе непроданным товаром оказался минимальным, если рассматривается следующая функция убытка

$$a \mathbf{M}(\max(0, \zeta - R)) + b \mathbf{M}(\max(0, R - \zeta)),$$

где a и b неотрицательные числа.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET OSZTÁLYSZEMINÁRIUMAIBAN 1959-BEN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK KIVONATAI

A valószínűségszámítási osztály szemináriuma

1—2. RÉNYI ALFRÉD: *A függőség különböző mértékszámairól.* (Február 5. és 12.)

Lásd RÉNYI, A.: „On measures of dependence” (Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **10** (1959), 441—451.

3. MOGYORÓDI JÓZSEF:¹ *Valószínűségi változók véletlen tagszámú összegeinek határeloszlásairól.* (Február 19.)

Az előadó a következő **tételt** bizonyította be: Tegyük fel, hogy a $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ független valószínűségi változókból álló sorozathoz léteznek olyan $\{B_n, n = 1, 2, \dots\}$, $(B_n > 0, B_n \rightarrow \infty)$ és $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$ számsorozatok, hogy a $\xi_{nk} = \frac{\xi_k}{B_n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) valószínűségi változók végtelenül kicsinyek és

$$P \left\{ \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{B_n} - A_n < x \right\} \rightarrow F(x) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

teljesül az $F(x)$ (nem elfajult) eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában. Tegyük fel továbbá, hogy $\{v_n, n = 1, 2, \dots\}$ pozitív egész értékű valószínűségi változók egy sorozata, amelyre teljesül, hogy $\frac{v_n}{k_n} \rightarrow 1$ sztochasztikus értelemben, ahol $\{k_n\}$ pozitív egész számokból álló monoton növekvő sorozat, amely $+\infty$ -hez tart. A tett feltevések mellett annak elegendő feltétele, hogy

$$P \left\{ \frac{\xi_1 + \dots + \xi_{v_n}}{B_{k_n}} - A_{k_n} < x \right\} \rightarrow F(x)$$

teljesüljön az, hogy

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta)]}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta)]}} = 1$$

fennálljon.

Megjegyzés. Az előadó azóta bebizonyította a feltétel szükségességét. Az eredmény rövidesen dolgozat alakjában is megjelenik.

4—5. RÉVÉSZ PÁL: *Kísérletek a nulla-egy törvény és a Borel—Cantelli lemma általánosítására.* (Március 5. és 12.)

¹ Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet.

Lásd az előadó „A generalization of the zero-one law” című dolgozatát (Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica **2** (1959) 111—113.).

Az előadó továbbá bebizonyította a következő tételeket.

1. Tétel. Legyen A_1, A_2, \dots páronként független események sorozata, amelyről feltesszük, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty.$$

Ekkor létezik az egész számoknak olyan n_i részsorozata, amelyre

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{P(A_{n_i}|B)}{P(A_{n_i})} = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{n_i}) = \infty.$$

Ezen tételből egyszerűen következik, hogy a Borel—Cantelli lemma érvényes páronként független eseményekre, azaz igaz a következő

2. Tétel. Legyen A_1, A_2, \dots páronként független események sorozata, tegyük fel, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty.$$

Ekkor az A_i események közül 1 valószínűséggel végtelen sok következik be.

6—7. RÉNYI ALFRÉD: Bevezetés a disztribúcióelméletbe. (Március 19. és 26.)

Ismertető előadás főleg M. J. LIGHTHILL: „An introduction to Fourier analysis and generalized functions” (Cambridge, University Press, 1958) című könyve alapján.

8. ERDŐS PÁL: Néhány valószínűség-számítási problémáról. (Április 2.) (Intézeti szeminárium keretében.)

9. CSÁKI PÉTER: Maximálkorreláció kiszámítása bizonyos esetekben. (Április 9.)

Lásd CSÁKI, P.—FISCHER, J.: „Contributions to the problem of maximal correlation” című dolgozatát e *Közlemények* **5** (1960) A., 325—337.

10. FISCHER JÁNOS: További megjegyzések a maximálkorrelációhoz. *Kapcsolata a regresszióval.* (Április 16.)

Lásd CSÁKI, P.—FISCHER, J.: „Contributions to the problem of maximal correlation” című dolgozatát, e *Közlemények* **5** (1960) A., 325—337.

11. RÉNYI ALFRÉD: A keverés elméletéről. (Május 21.)

Lásd RÉNYI A.: „Autoklávok soros és párhuzamos kapcsolásáról és a keverés elméletéről” című cikkét, e *Közlemények* **4** (1959) 155—165.

A matematikai statisztikai osztály szemináriuma

1. SARKADI KÁROLY: A Behrens—Fisher problémáról.² (Január 7.)

Ismertető előadás, főleg a következő cikkek alapján: WALD, A., „Testing the difference between the means of two normal populations with unknown standard deviations” (Selected Papers in Statistics and Probability (1955)

² A valószínűség-számítási osztállyal közös rendezésben.

669—695, Mc Graw Hill, New York), WELCH, B. L., „The generalization of Student's problem when several different population variances are involved (Biometrika **34** (1947) 28—35), TRICKETT, W. H.—WELCH, B. L., „On the comparison of two means” (Biometrika **41** (1954) 361—374), FISHER, R. A., „On a test of significance in Pearson's Biometrika Tables” (Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B. **18** (1956) 56—60), WELCH, B. L., „Note on some criticisms made by Sir Ronald Fischer” (Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B. **18** (1956) 297—302).

2. SARKADI KÁROLY: Referáló előadás. (Február 12.)

Az előadó a következő könyvet ismertette. LEINWEBER, P. (szerk.), Taschenbuch der Längenmesstechnik (Springer, Berlin, 1954).

3. CSÁKI ENDRE: A Wilcoxon-próba két módosításáról. (Február 26.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát, e *Közlemények* **4** (1959) 313—319.

4. SARKADI KÁROLY: Megjegyzések Steinhaus, H. és Zubrzycki, S., „On the comparison of two production processes and the rule of dualism” (Colloquium Mathematicum **5 (1957) 103—115) c. dolgozatához.** (Március 12.)

FISHER, R. A.: „Statistical methods and scientific inference” (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956) c. könyvében felveti és megválaszolja azt a kérdést, hogy milyen a priori eloszlás mellett egyezik meg a binomiális eloszlás valószínűségparaméterének a posteriori eloszlása az aszimptotikusan értelmezett fiduciális eloszlással (62—64. o.). A megoldásban FISHER a binomiális eloszlást normálissal közelíti. Ez a közelítő számítás nem látszik megokoltnak, mert az a folytonos eloszlás, amelynek sűrűségfüggvénye megegyezik a binomiális valószínűségfüggvénynek a legközelebbi egész helyen felvett értékével, jobban közelíti a binomiális eloszlást és a feladat megoldásában számítási nehézség így sem lép fel. Így STEINHAUS és ZUBRZYCKI fenti cikkéből kiolvasható, hogy az adandó válasz igen érzékenyen függ a binomiális eloszlás közelítésének módjától. Az említett közelítő eloszlásnak — $\frac{1}{2}$, ill. $\frac{1}{2}$ egységgel való eltolásával a problémára élesen különböző megoldásokat kapunk, amelyek függetlenek a mintadarabszám-paramétertől. Így tehát a FISHER által felvetett problémára egyértelmű válasz nem adható.

5. FISCHER JÁNOS: A Duncan-próba.² (Április 12.)

Az előadó a következő cikket ismertette: DUNCAN, D. B., „Multiple range and multiple F-tests” (Biometrics **11** (1955) 1—42).

A valós függvénytan osztály szemináriuma

1—14. CSÁSZÁR ÁKOS folytatta és befejezte *A halmazelméleti topológia alapvonalai* című heti kétórás előadásait. Az év folyamán összesen 14 előadás hangzott el.

15. ALEXITS GYÖRGY: Bevezetés a görbeelméletbe. (November 24.)

Az előadó ismertette a görbe és az elágazási rend Menger—Uriszon-féle definícióját, továbbá W. HUREWICZ bizonyítását az irreguláris és irracionális pontok halmazának szerkezetére (Mathematische Annalen **96** (1927) 759).

16. CSÁSZÁR ÁKOS: Egyszerű görbékről. (December 8. és 15.)

Lásd CSÁSZÁR, Á.—CZIPSZER, J. „Sur les courbes irramifiées” című dolgozatát (Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **9** (1958) 315—328).

⁹ A Matematikai Kutató Intézet Közleményei V. B/4.

A differenciálegyenletek osztályának szemináriuma

1—10. SALLAY MELÁNIA és ZIMÁNYI JÓZSEFNÉ: *Referáló előadássorozat.* (Február 10., 17. és 24., március 3., 10., 17. és 24., április 14., 21. és 28.)

Az előadók a következő dolgozatot ismertették: MIKUSIŃSKI, J.—SIKORSKI, R., „The elementary theory of distributions (I)” (Rozprawy Matematyczne **XII**, Warszawa, 1957. Pantwowe Wydawnictwo Naukowe).

11. ADLER GYÖRGY: *Véges hővezetőképességű szemcsés anyagok ellenáramú hűtése.* (Április 7.)

Lásd ADLER, G.: „Réfrigération de retour des matières granuleuses” című cikkét, e *Közlemények* **4** (1959) 327—365.

12. BALATONI FERENC: *Referáló előadás.* (Május 5.)

Az előadó a következő cikket ismertette: HIRSCH, A., „Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung” (Mathematische Annalen **49** (1897) 49—72).

13. BALATONI FERENC: *A másodrendű parciális differenciálegyenletek egy osztályának variációszámítási jellemzőségről.* (Május 12.)

Az előadó szakdolgozatát ismertette.

14. FÉNYES TAMÁS: *A Mikusiński-féle operátorszámítás alkalmazása állandó együtthatós retardált differenciálegyenletek megoldására.* (Május 19.)

Lásd az előadó „Anwendung der Operatorenrechnung von Mikusiński zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen” című dolgozatát, e *Közlemények* **4** (1959) 191—196.

15. ADLER GYÖRGY: *A Mikusiński-féle operátorszámítás alkalmazása egy hidrodinamikai probléma megoldására.* (Május 19.)

Lásd ADLER, G.—FREUD, G., „Una applicazione del calcolo degli operatori di Mikusiński per la risoluzione d’una equazione alle derivate parziali” című dolgozatát, e *Közlemények* **4** (1959) 367—375.

16. KARANIKOLOFF, CH.:³ *Sur un système d’équations intégrales de type de Fredholm.* (Június 12.)

Az előadó a

$$(1) \quad \begin{aligned} \varphi_1(x) &= f_1(x) + \int_a^b \varphi_1(t) K(x, t) dt + \int_a^b \varphi_2(t) L(x, t) dt \\ \varphi_2(x) &= f_2(x) + \int_a^b \varphi_1(t) M(x, t) dt + \int_a^b \varphi_2(t) N(x, t) dt \end{aligned}$$

Fredholm-típusú integrálegyenletrendszer megoldhatóságának feltételeit vizsgálta ($\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ az ismeretlen függvények).

Ezzel kapcsolatban a következő **tételt** bizonyította be:

Tegyük fel, hogy $f_1(x)$, $f_2(x)$, $K(x, t)$, $L(x, t)$, $M(x, t)$ és $N(x, t)$ folytonosan differenciálható függvények. Ha találhatók olyan $\mu_1(x)$ és $\mu_2(x)$ az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvények, hogy az $[a, b]$ intervallumban fennáll a

$$\mu_1(x) \frac{\partial L(x, t)}{\partial x} + \mu_2(x) \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} \equiv 0$$

³ Szófiai Egyetem Matematikai Intézete.

összefüggés, akkor az (1) rendszer a

$$\varphi_1(x) = F_1(x) + \int_a^b \varphi_1(t) H_1(x, t) dt$$

$$\varphi_2(x) = F_2(x) + \int_a^b \varphi_2(t) H_2(x, t) dt$$

alakra hozható.

17. FÉNYES TAMÁS: *Referáló előadás.* (Június 16.)

Az előadó a következő cikket ismertette: BUTZER, P. L., „Die Anwendung des Operatorenkalküls von Jan Mikusiński auf lineare Integralgleichungen vom Faltungstypus” (Archive for Rational Mechanics and Analysis **2** (1958) 114—128).

18. FÉNYES TAMÁS: *Referáló előadás.* (Augusztus 28.)

Az előadó a következő cikket ismertette: MIKUSIŃSKI, J., „Sur les notions de distribution et d'opérateur” (Bulletin de l'académie Polonaise des Sciences, Série des sci. math., astr. et phys. **6** (1958) 737—741).

19. REICHARDT, H.:⁴ *Über die Ausstrahlungsbedingungen.* (Október 30.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, sajtó alatt).

20. DÜCK, W.:⁴ *Ein Entwicklungssatz bei selbstadjungierten, volldefiniten Eigenwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen.* (November 6.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, sajtó alatt).

21—23. ADLER GYÖRGY: *Referáló előadássorozat.* (November 11., 17. és 24.)

Az előadó a következő cikket ismertette: FICHERA, G., „Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari” (Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni **17** (1958) 82—191).

24. BIALY, H.:⁵ *Iterative Behandlung linearer Gleichungen erster Art.* (November 18.)

Lásd az előadó hasonló című cikkét (Archive for Rational Mechanics and Analysis, sajtó alatt).

25—26. BOGNÁR JÁNOS: *Referáló előadás.* (November 26. és december 1.)

Az előadó a következő cikket ismertette: Ейдус, Д. М., „Неравенства для функции Грина” (Математический Сборник **45** (87) (1958) 455—470).

[Magyarul: Ejduusz, D. M., „Green-függvényekre vonatkozó egyenlőtlenségek (A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei **9** (1959) 315—332).]

A komplex függvénytani osztály szemináriuma

1—2. RÉNYI KATÓ: *Bevezetés a mértékelméletbe.* (Január 2. és 9.)

Ismertető előadássorozat, DE LA VALLÉE POUSSIN, CH. J., Le Potentiel logarithmique című könyvének feldolgozásához főleg HALMOS, P. R., Measure theory (van Nostrand, New York, 1950) c. könyve alapján.

⁴ Humboldt-Universität, Berlin.

⁵ Technische Hochschule, Dresden.

3—5. ALPÁR LÁSZLÓ: *Megjegyzés a Taylor-sor szummabilitásáról a konvergencia-körön.* (Január 16., 23. és 30.)

Lásd ALPÁR, L.: „Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, I., II., III.” című dolgozatait, e *Közlemények* I.: **3** (1958) 1—12, II.: **3** (1948) 141—158, III.: **5** (1960) A. 97—152.

6—15. RÉNYI KATÓ: *Bevezetés a mértékelméletbe.* (Folytatás.) (Február 6., 13., 20. és 27., március 13., 20. és 27., április 10., 17. és 24.)

16—23. ALPÁR LÁSZLÓ: *A logaritmikus potenciál.* (Május 8., 15., 22. és 29., június 5., 10. és 19., július 3.)

Ismertető előadás DE LA VALLÉE POUSSIN, CH. J.: *Le Potentiel logarithmique, Balayage et représentation conforme* (Gauthier-Villars, Paris, 1949) című műve alapján.

24—25. ÁNGER, G.:⁵ *Ein funktionalanalytischer Aufbau der Potentialtheorie.* (November 6. és 13.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát (Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden, **8** (1958/59) Heft 4. 679—685).

26—29. ALPÁR LÁSZLÓ: *A logaritmikus potenciál.* (Folytatás.) (November 20. és 27., december 4. és 11.)

A funkcionálanalízis osztály szemináriuma

1. PINTÉR LAJOS:⁶ *Referáló előadás.* (Január 21.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: BECK, W. A.—PUTNAM, R., „A note on normal operators and their adjoints” (Journal of the London Math. Soc. **31** (1956) 213—216).

2. TANDORI KÁROLY,⁶ HORVÁTH JÁNOSNÉ:⁶ *Birkhoff-féle ergodikus tétel.*⁷ (Február 4.)

3. GEHÉR LÁSZLÓ: *Az ergodicitás fogalma.* (Február 11.)

4. KOVÁCS ISTVÁN: *Az ergodicitás következményei.* (Február 18.)

5—6. MOÓR ARTHUR:⁶ *Keverő transzformációk.* (Február 25., március 4.)

7. GEHÉR LÁSZLÓ: *Mértékalgebrák.* (Március 11.)

8—9. GEHÉR LÁSZLÓ: *Diszkrét spektrumú mértéktartó leképezések.* (Március 18. és 25.)

10. SZÓKEFALVI-NAGY BÉLA: *Gyengén keverő leképezések.* (Április 1.)

Lásd: RÉNYI, A., „On mixing sequences of sets” (Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **9** (1958) 215—228).

11—12. GEHÉR LÁSZLÓ: *Kompakt topológikus csoportok automorfizmusai.* (Április 8., 15.)

13. SZTACHÓ LAJOS:⁸ *Általánosított sajátértékek.* (Április 22.)

14—15. GEHÉR LÁSZLÓ: *Gyenge topológia.* (Május 6., 13.)

16. ZAWADOWSKY, W.:⁹ *On some special partially ordered algebras.* (Május 20.)

Az előadó egységelemes féligrendezett gyűrűkkel és azokon értelmezett pozitív lineáris funkcionálokkal foglalkozott és azokra vitte át a normált gyűrűk Gelfand-féle elméletének több tételét.

⁶ Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete.

⁷ A 2—15. és 17. előadások az ergodelmélet néhány kérdését dolgozták fel a következő könyv alapján: Halmos, P., *Lectures on ergodic theory* (Publication of the Mathematical Society of Japan **3**, The Mathematical Society of Japan, Tokyo 1956).

⁸ Szeged, Ságvári gyakorló gimnázium.

⁹ Varsó.

17. KOVÁCS ISTVÁN: *Kategória-tételek az ergodelméletben.* (Május 27.)

18. KOVÁCS ISTVÁN: *Vektorértékű disztribúciók.* (Június 11.)

Az előadó LAURENT SCHWARTZ Budapesten tartott előadását ismertette.

19. GEHÉR LÁSZLÓ: *A Schrödinger-operátorok egyértelműségéről.* (Szeptember 23.)

Lásd: NEUMANN, J., „Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren” (Math. Annalen 104 (1931) 570—578).

20—21. KOVÁCS ISTVÁN, GEHÉR LÁSZLÓ: *Hille és Yosida tétele operátorok egyparaméteres félcsoportjairól.* (Szeptember 28.)

Referátum RIESZ, F.—SZ. NAGY, B.: *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* című könyve megfelelő része alapján.

22—24. ANGER, G.:⁵ *Ein funktionalanalytischer Aufbau der Potentialtheorie.* (December 1., 4. és 7.)

Az előadó az n változós folytonos függvények terében értelmezett folytonos lineáris funkcionálok Riesz—Radon-féle integrál-előállítását alkalmazza a potenciálméletben. 3-dimenziós térben a μ mértékhez rendelt T_μ potenciált

a $T_\mu(x) = \int \Phi(x, y) d\mu$ integrállal értelmezzük, ahol $\Phi(x, y) = \frac{1}{|x - y|}$ a

Newton-féle magfüggvény. Legyen F^* az összes olyan kompakt hordozójú pozitív λ mértékek halmaza, amelyekre a T_λ potenciál az egész térben folytonos. Egy $B(\subset R^3)$ Borel-halmaz akkor és csak akkor 0 kapacitású, ha minden $\lambda \in F^*$ esetében $\lambda(B) = 0$. A Fubini-tétel alkalmazásával adódik, hogy minden olyan μ mértékre, melyre $\|\mu\| < \infty$, fennáll:

$$(*) \quad \int T_\mu d\lambda = \int T_\lambda d\mu.$$

A (*) reláció segítségével a potenciálmélet problémáit a 3-dimenziós tér folytonos függvényeire vonatkozó problémákká lehet transzformálni. Így többek között a harmonikus függvények maximum-elvének felhasználásával a Dirichlet-probléma egyszerű tárgyalása lehetséges.

Lásd: ANGER, G., „Ein funktionalanalytischer Aufbau der Potentialtheorie” (Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden 8 (1958—59) 679—685).

25. PORATH, G.:¹⁰ *Störungstheoretische Untersuchungen für abgeschlossene lineare Transformationen im Banachschen Raum.* (December 8.)

Legyenek T_0 és T_1 a \mathcal{B} Banach-tér olyan lineáris operátorai, melyeknek közös értelmezési tartományuk van, jelöljük ezt \mathcal{D} -vel. Legyen T_0 \mathcal{D} -ben zárt. Ekkor bizonyos T_1 operátorok esetén $T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1$ az ε komplex paraméter kis értékeire szintén zárt lesz. Az előadó megvizsgálta, hogy mely esetekben lesz $T(\varepsilon)$ -nak $\varepsilon = 0$ környezetében reguláris

$$z(\varepsilon) = z_0 + \varepsilon z_1 + \dots$$

sajátértéke és

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$$

reguláris sajátvektora.

Lásd: PORATH, G., „Störungstheorie der isolierten Eigenwerte für abgeschlossene lineare Transformationen im Banachschen Raum” (Math. Nachrichten, Berlin, sajtó alatt).

¹⁰ Mathematisches Institut der Universität Greifswald.

A matematikai logika és matematikai gépek elmélete csoport szemináriuma

1. ÁDÁM ANDRÁS: *Referáló előadás.* (Február 4.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: QUINE, W. V., „A way to simplify truth functions” (American Mathematical Monthly **62** (1955) 627—631).

2. MUSZKA DÁNIEL: *Beszámoló csehszlovákiai tanulmányutamról.* (Február 23.)

3. KALMÁR LÁSZLÓ: *A Szovjetunió Tudományos Akadémiájának Automatikai és Távmechanikai Intézetével kötött megállapodás ismertetése.* (Március 20.)

4. KALMÁR LÁSZLÓ és ÁDÁM ANDRÁS: *A logikai gép automatikus programozásával kapcsolatos kérdések.* (Április 14.)

Az előadó a logikai műveleteket megvalósító kapcsolások huzalos dobozok helyett telefontárcsával vezérelt marker-gépek rendszere segítségével való megvalósítására vonatkozó elgondolásait ismertették.

5. HÄRTIG, K.:¹¹ *Zur elementaren Theorie der Zeichenreihen.* (Június 26.)

Lásd az előadó „Explizite Definitionen einiger Eigenschaften von Zeichenreihen” c. dolgozatát (Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik **2** (1956) 177—203).

6. MUSZKA DÁNIEL: *Referáló előadás.* (Október 16.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: ПАРХОМЕНКО, П. П., „Анализ релейных схем при помощи машин” (Автоматика и Телемеханика **20** (1959) 486—497).

7—8. BERECKZI ILONA: *Logikai műveletek egyszerűsítéséről.* (November 13. és 20.)

Az előadó ismertette a háromváltozós logikai műveletek (konjunkciók, diszjunkciók és negációk segítségével való) minimális betű-előfordulást tartalmazó kifejezéseit tartalmazó táblázat összeállításának módszerét, valamint elgondolásait az e módszer alapján az M-3 számológép számára kidolgozandó program tekintetében e táblázat ellenőrzésére és továbbfejlesztésére.

9. MILCSENKO, T. I.:¹² *A BESZM elektronikus számológép modern változata.*¹³ (November 27.)

Az előadó ismertette a BESZM-2 számológép szerkezetét, különös tekintettel az eredeti BESZM számológéptől való eltérésekre.

10. GOLENKO, D. I.:¹² *Véletlen számok generálásának módszerei.*¹³ (November 27.)

Az előadó ismertette a Monte Carlo-módszer alapgondolatát és a pszeudovéletlen számok fogalmát, valamint az utóbbiak előállításának módszereit.

11. GAVRILOV, M. A.:¹⁴ *A jelfogós áramköröket jellemző Boole-féle függvények minimalizálása.* (November 27.)

Az előadó ismertette a minimalizációs probléma különböző megfogalmazásait, majd következő dolgozatát: „Минимизация булевых функций, характеризующих релейные цепи” (Автоматика и Телемеханика **20** (1959) 1217—1238).

12. ÁDÁM ANDRÁS: *Kétpólusú hálózatok szerkezetéről.* (November 30.)

Az előadó ismertette a jelen *Közleményekben* megjelent dolgozatait, néhány, időközben adódott egyszerűsítéssel.

¹¹ Humboldt Tudományegyetem, Matematikai Logikai Intézet, Berlin.

¹² A Szovjet Tudományos Akadémia Számítási Központja.

¹³ A Bolyai Társulat szegedi tagozatával közös rendezésben.

¹⁴ A Szovjet Tudományos Akadémia Automatikai és Távmechanikai Intézete.

Lásd: ÁDÁM A. „Kétpólusú elektromos hálózatokról I., II., III.” (e *Közlemények*, I.: 2 (1957) 211—218., II.: 3 (1958) 67—79., III.: 3 (1958) 207—218.)

13. POLLÁK GYÖRGY: *Többpólusú jelfogós rendszerek működésének ellenőrzésével kapcsolatos egy minimizációs problémáról.* (December 1.)

Az előadó ismertette elgondolásait az előadás címében szereplő probléma megoldására a hálóelmélet és a permutációcsoportok elmélete alkalmazásával.

A matematika közgazdasági alkalmazásaival foglalkozó szeminárium

1. JÁNOSSY FERENC:¹⁵ *Újratermelési modellek.* (Április 16.)

Az előadó ismertette az újratermelési modellek vizsgálatát során kapott újabb eredményeit.

2. BRÓDY ANDRÁS:¹⁶ *Az input-output módszer pontosságának vizsgálata során felmerült matematikai problémákról.* (Június 27.)

3. BOD PÉTER: *A lineáris programozás alkalmazása során jelentkező egyes (közgazdasági jellegű) nehézségek matematikai kezelése.* (Július 2.)

Az előadó a lineáris programozás hazai alkalmazásának eddigi tapasztalatait elemezve rámutatott azokra a nehézségekre, amelyek a felállított modellek számszerűsítésekor jelentkeznek. A rendelkezésre álló paraméterek pontatlansága és az egyszer megállapított paraméterek értékeinek időbeli változása szükségessé teszi az optimális programok stabilitásának a vizsgálatát.

M. COURTILLOT eredményei alapján („Programmation linéaire. Étude de la modification de tous les paramètres”, *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, Tome 247, No. 7. (18 aout 1958) p. 670—673) az előadó megmutatta, hogy milyen általános megállapítások tehetők egy tetszőleges lineáris programozási feladat optimális programjának a stabilitására vonatkozóan, ha a kapacitás-adatok, a technológiai együtthatók és az optimum függvény paraméterei rendre megváltoznak.

Befejezésül az előadó vázolta azokat a gyakorlati előnyöket, amelyeket az ismertetett formulák alkalmazásával el lehet érni.

A biometriai osztály szemináriuma

1—2. SZILÁGYI ZOLTÁN: *Mátrix-számítás a matematikai statisztikában.* (Január 12., február 9.)

3. DR. JUVANCZ IRÉNEUSZ: *A statisztikus munkája a biológiában.* (Január 26.)

4. FISCHER JÁNOS: *Matematikai módszerek a kariometriában.*² (Február 2.)

Lásd FISCHER, J.—ÍNKE, G.—TÓTH, K.: „Über methodische Fragen der Kernvariationsstatistik. VIII. Rechenschieber zur Erleichterung der karyometrischen Berechnungen” című dolgozatát (*Jacobj emlékfűzet*, 1960., sajtó alatt).

5—9. CSÁKI PÉTER és FISCHER JÁNOS: *Megjegyzések a maximálkorreláció problémájához.* (Február 16. és 23., április 6. és 13., november 16.)

Az előadók hasonló című dolgozata e *Közleményben*, ebben a kötetben jelent meg (325—337.).

10. FISCHER JÁNOS: *A Duncan-próba.* (Március 2.)

¹⁵ Országos Tervhivatal.

¹⁶ Közgazdaságtudományi Intézet.

Az előadó ismertette DUNCAN, D. B., „Multiple range and multiple F-tests” (Biometrics **II** (1955) 1—42) című cikkében közölt eljárását. Összehasonlította a többi hasonló célú eljárással (Fisher-módszer, Tucey, Newman, Keuls stb.).

11. DR. JUVANCZ IRÉNEUSZ: *Statisztikai analízis eredményeinek értékelése.* (Március 23.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát (Acta Medica, sajtó alatt).

12. DR. JUVANCZ IRÉNEUSZ: *Beszámoló a svájci biometriai szemináriumról.* (Október 22.)

13. CSÁKI PÉTER: *Referáló előadás.* (December 7.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: FERGUSON, T., „On the existence of linear regression in linear structural relations” (Univ. Calif. Publ. Statist. **2** (1955) 143—165).

A differenciálgeometriai csoport szemináriuma

1—7. VARGA OTTÓ (1 előadás), **SOÓS GYULA**¹⁷ (5 előadás), **SZENTE JÁNOS**¹⁸ (1 előadás): *Differenciálható sokaságok elmélete.*

A kéthetenként megtartott előadások célja a differenciálható sokaságok elméletének modern felépítése, az új kutatási módszer bemutatása, valamint a klasszikus differenciálgeometriával való összevetés volt. Fenti előadások első sorban az elmélet megalapozásával foglalkoztak.

Az elmélet egyes önálló kérdéseiből a következő előadások hangzottak el:

8. REICHARDT, H.:¹⁹ *Invariante Darstellung der Ableitungsgleichungen eingebetteter Mannigfaltigkeiten.*

Lásd: BLASCHKE, W.—REICHARDT, H., Einführung in die Differentialgeometrie, Kap. VIII. (Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960).

9—12. VARGA OTTÓ: *A konstans görbületű Riemann-féle terek és a nem-euklideszi geometriák kapcsolata.*

Az előadó bizonyítja a konstans görbületű Riemann-féle terek és a nem-euklideszi terek azonosságát. A bizonyítás a Cartan-féle mozgó triéder módszer egy változatával történik. E módszerrel az előadó újabb eredményekre jutott. Lásd: Annali di Matematica soron következő kötet, valamint a Monatshefte Kruppa jubileumi számát. (Megjelenés előtt.)

¹⁷ Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Matematikai Tanszék.

¹⁸ Budapesti Műszaki Egyetem Ábrázoló Geometria Tanszéke.

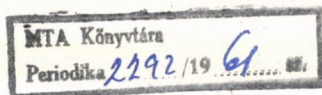
¹⁹ Mathematisches Institut der Humboldt-Universität, Berlin.

**AZ INTÉZETMUNKATÁRSAINAK A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN
MÉG FEL NEM Tüntetett, másutt megjelent vagy sajtó
alatt levő magyar nyelvű dolgozatainak jegyzéke¹**

- [1] ALPÁR L.: „Egyes hatványsorok abszolút konvergenciája a konvergenciakör területén.” *Matematikai Lapok**
- [2] ALPÁR L.: „Egyes hatványsorok szummabilitása és divergenciája a konvergenciakör területén.” (Kandidátusi disszertáció.)
- [3] BALÁZS J.: „(0,2) interpoláció ultraszférikus polinomok gyökein.” (Kandidátusi disszertáció.)
- [4] BALÁZS J.: „Ultraszférikus és Hermite-féle polinomokra vonatkozó egyenlőtlenségek.” *Matematikai Lapok*.*
- [5] BARTFAI P.—DOBÓ A.: „Egy közlekedési problémáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*.*
- [6] BOD P.: „Hozzászólás Jándy Géza: 'Optimális szállítások tervezése' című előadásához.” (Kibernetikai módszerek a közlekedésben és közlekedéscépesítésben című ankét anyaga.) *Közlekedés- és Közlekedéscépesítéstudományi Egyesület*. 1959. 274—277.
- [7] BOD P.: „A matematika közgazdasági alkalmazásának egy klasszikus munkájáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **10** (1960) 39—57.
- [8] BOD P.: „A lineáris programozás alkalmazása során jelentkező egyes (közgazdasági jellegű) nehézségek matematikai kezelése.” *Ipargazdaság* **12** (1960) 3, 27—33.
- [9] BOD P.: „Gazdasági döntések megalapozása különböző időpontokban esedékes ráfordításokkal kapcsolatban.” *Pénzügy és Számvitel* **4** (1960) 4, 132—134.
- [10] DOBÓ A.: „Egy üldözési problémáról.” *Matematikai Lapok*.*
DOBÓ A.-t lásd még: [5].
- [11] FENYŐ I.—LEVENDEL L.: „Bonyolult diagnosztikai problémák osztályozását megoldó logikai gép.” *Magyar Tudomány* (1960) 631—632.
- [12] FENYŐ I.—LEVENDEL L.: „A tüdő-tbc-s betegek kompenzációs fokának meghatározására szolgáló logikai gép.” *Orvosi Hetilap*.*
- [13] FENYŐ I.: „Differenciálegyenletek egy új megoldási módszeréről.” *Budapesti Műszaki Egyetem Évkönyve*.*
- [14] FREUD G.: J. Mikusiński: 'Operátorszámítás' című könyve magyar fordításának szerkesztése. Műszaki Kiadó, Budapest.*
- [15] FREUD G.: „Könyvismertetés Alexits György 'Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen' című művéről.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*.*
- [16] FÉNYES T.: Függelék J. Mikusiński: Operátorszámítás című könyvének magyar kiadásához. Műszaki Kiadó, Budapest.*
- [17] GALLAI T.—ERDŐS P.: „Gráfok előírt fokú pontokkal.” *Matematikai Lapok* **12** (1961).*
- [18] HEPPES A.—MOLNÁR J.: „Újabb eredmények a diszkrét geometriában.” *Matematikai Lapok* **12** (1961).*
- [19] HEPPES A.: „Egy tetraéderek felszínére vonatkozó szélsőértékfeladat.” *Matematikai Lapok*.*

¹ A csillaggal jelölt dolgozatok sajtó alatt vannak.

- [20] JUVANCZ I.: *Kertészeti Lexikon* (Biometriai címszavak). Mezőgazdasági Kiadó, Budapest.*
- [21] MUSZKA D.: „Az elektronikus katicabogár.” *Pécsi Műszaki Szemle* **40** (1959) 4, 17—18.
- [22] PRÉKOPA A.: *Valószínűesszámitás*. (Jegyzet) Központi Statisztikai Hivatal Kiadása, Budapest, 1960.
- [23] PRÉKOPA A.—ÉLTETŐ Ö.: *Matematikai statisztika*. (Jegyzet) Központi Statisztikai Hivatal Kiadása, Budapest.*
- [24] PRÉKOPA A.: *Valószínűesszámitási rész Pattantyus G. „Gépészeti kézikönyv” című könyvében*.
- [25] RÉNYI A.: „Bolyongási problémákra vonatkozó határeloszlástételek.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **10** (1960) 149—170.
- [26] RÉNYI A.: „Az információelmélet néhány alapvető kérdése.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **10** (1960) 251—282.
- [27] RÉNYI A.: „Egy általános módszer valószínűesszámitási tételek bizonyítására és annak néhány alkalmazása.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*.*
- [28] RÉNYI A.: „Pólya György: A gondolkodás iskolája.” (Könyvismertetés.) *Matematikai Lapok* **10** (1959) 374—379.
- [29] RÉNYI A.: „Jordan Károly (nekrológ).” *Magyar Tudomány* **5** (1960) 233—235.
- [30] RÉNYI A.: „Matematikai kongresszusok és a II. Magyar Matematikai Kongresszus.” *Magyar Tudomány* **6** (1961) 13—23.
- [31] RÉNYI A.: „Dialógus a matematika tanításáról.” Pedagógus Továbbképző Intézet kiadása, Budapest.*
- [32] RÓZSA P.—VEIDINGER L.: „Egy huszadrendű Toeplitz-féle mátrix invertálása.” *A Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központja, Tájékoztató az M—3-ról* (1960) 5, 73—74.
- [33] RÓZSA P.: *Matematika I., II., III.* Az Országos Atomenergia Bizottság tanfolyamán tartott előadások jegyzete. Felsőoktatási Jegyzetellátó, Budapest, 1960. 420 oldal.
- [34] SERES I.: „Bizonyos polinomok irreducibilitása a körosztási testekben.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **10** (1960) 341—351.
- [35] SERES I.: „Egy polinom irreducibilitásáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*.*
- [36] SURÁNYI J.: „Az analízis elemei és a középiskola.” Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa, 1960. 22 oldal.
- [37] SZABÓ Á.: „Az axióma szó mint matematikai terminus.” *Antik Tanulmányok*.*
- [38] SZÁSZ F.: „Az operátormodulusok Kertész-féle radikáljáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **10** (1960) 35—38.
- [39] SZÁSZ F.: „A főbbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűk.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **11** (1961).*
- [30] TURÁN P.: „Fejér Lipót.” *Matematikai Lapok*. **11** (1960) 8—18.
- [41] VINCZE I.: „Kétváltozós empirikus eloszlásfüggvények eltéréséről.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **10** (1960) 361—372.
- [42] VINCZE I.: „Megemlékezés Jordan Károlyról.” *Statisztikai Szemle* **38** (1960) 1183—1191.
- [43] ZIERMANN M.—ÉLTETŐ Ö.: *Matematikai statisztika*. (Középiskolai szakköri füzet.) Tankönyvkiadó, Budapest.*
- [44] ZIERMANN M.—CSER A.—REMÉNYI G.: *Matematikai Zsebkönyv*. Tankönyvkiadó, Budapest.*



**A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN HIÁNYOS BIBLIOGRÁFIAI
ADATOKKAL SZEREPLŐ MAGYAR NYELVŰ DOLGOZATOK
PONTOS ADATAI²**

- III.: [4] ALEXITS GY.—FENYŐ I.: *Matematika vegyészek számára.* (III. kiadás.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.
- III.: [10] CSUKÁS G.—TAMÁSSY E.: „Statistikai módszerek.” Függelék Dr. Szigeti J. *Háziállatok korszerű szelekciója* című könyvéhez. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1959. (251—268)
- V.: [26] HAJÓS GY.: *Bevezetés a geometriába.* Egyetemi tankönyv. Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.
- V.: [38] PRÉKOPA A.: *Lineáris algebra.* (Jegyzet.) Központi Statisztikai Hivatal kiadása, Budapest, 1960.
- V.: [60] SURÁNYI J.: „Megjegyzések a számelmélet alaptételéhez.” *Matematikai Lapok* **11** (1960) 41—45.
- V.: [61] SURÁNYI J.—FRIED E.: „Egy polinomokra vonatkozó számelméleti problémáról.” *Matematikai Lapok* **11** (1960) 75—84.
- V.: [88] ZIERMANN M.: „A valószínűségszámítás alkalmazása készletgazdálkodási problémákra.” *Ipargazdaság* **12** (1960) No 11, 11—15.

² A sorszám előtt a megfelelő dolgozatjegyzéket tartalmazó évfolyamra utalunk

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Pataki Ferenc

A kézirat beérkezett: 1960. XII. 20. — Példányszám: 800 — Terjedelem: 12,25 (A/5) ív

52.641/60 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

СОДЕРЖАНИЕ

MARTOS, B.: Гиперболическое программирование	383
TANKÓ, J.: Одна из характеристик стационарных процессов, употребляемая в текстильной промышленности	407
ZAJTA, A.: О пробе LENMANN-а	447
FÉNYES, T.: Приложения современного операционного исчисления к ответному анализу простых переносных систем	461
FÉNYES, T. — NÁDAS, T.: Общие проблемы о геометрической экономичности пластиночных ядерных листов карликовых трансформаторов	473
RÉNYI, A. — ZIERMANN, M.: О проблемах, связанных со снабжением магазинов товарами	495
Резюме докладов произнесенных на семинарах отделений Института	507
Список работ сотрудников Института на венгерском языке опубликованных в других изданиях или находящихся в печати и ещё не отмеченных предыдущих списках литературы	517

INDEX

MARTOS, B.: Hyperbolic programming	383
TANKÓ, J.: A characteristic of stationary processes used in textile research	407
ZAJTA, A.: On the Lehmann test	447
FÉNYES, T.: Die Anwendung der modernen Operatorenrechnung bei der Antwort- Analysis einfacher Übertragungssysteme	461
FÉNYES, T.—NÁDAS, T.: Untersuchung der allgemeinen geometrischen Wirtschaft- lichkeit der Kernbleche von Kleintransformatoren	473
RÉNYI, A.—ZIERMANN, M.: On some inventory problems of shops	495
Abstracts of lectures delivered in the seminars of the Institute	507
List of papers in Hungarian of the members of the Institute published or in print in another periodical and not yet marked in the previous list of papers	517